

総実代数体の Kronecker 極限公式について

江上 繁樹 (富山大学)

EGAMI Shigeki

§0. [S1], [S2], [S3] において, 総実代数体 K の合同 ideal 類 C に対する partial zeta 関数 $\zeta_K(s, C)$ について, $s=0$ における値および 1 階導関数の値の新しい表示が得られた. よく知られているように, これらの値は ある種の符号条件を満たす Hecke 類指標 χ に対する $L_K(1, \chi)$ の値と結びついている. より一般の χ を扱うためには $\zeta_K(s, C)$ の高階導関数の 0 における値が必要になる. このノートでは $0 \leq r \leq [K:\mathbb{Q}]-1$ のとき $\zeta_K^{(r)}(0, C)$ を Barnes zeta 関数の多重積分 および, その s に関する導関数の 1 次結合で表わすことを試みる. $r=0, 1$ の場合, [S1]~[S3] の別証が得られる. 証明の方法は [E1] の拡張である.

§1. K を n 次総実代数体 ($n \geq 1$), C をある modulus に関する狭義 ray class, $\mathfrak{a}$ を整 ideal で $\mathfrak{a}^{-1} \in C$ なるものとする.

$$\zeta_K(s, C) = N\mathfrak{a}^s \sum_{(\alpha) \subset \mathfrak{a}} N_K(\alpha)^{-s},$$

ただし, 和は $(\alpha) \subset \mathfrak{a}$ となる単項 ideal (α) 全体にわたるものとする.

[S1] にあるように, 右辺の和は

/

$$\sum_{(\alpha) \in \mathcal{A}} N_k(\alpha) s = \sum_{\vec{j} \in \mathcal{J}} \sum_{x \in R_{\vec{j}}} \zeta(s, A_{\vec{j}}, x),$$

ただし, $\mathcal{J}$ は添字の有限集合, $R_{\vec{j}}$ は $\mathbb{Q}_{>0}^{r_{\vec{j}}}$ ($1 \leq r_{\vec{j}} \leq n$) の有限集合.

$A_{\vec{j}}$ は $(n, r_{\vec{j}})$ 型の成分が正であるような行列である. また $\zeta(s, A, x)$ は次のような Dirichlet 級数である: $A = (a_{\lambda_{\vec{j}}})$ $\lambda=1, \dots, n$, $a_{\lambda_{\vec{j}}} > 0$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$, $x_{\vec{j}} > 0$ に對して.

$$\zeta(s, A, x) = \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r} \prod_{\lambda=1}^n \left(\sum_{\vec{j}=1}^r a_{\lambda_{\vec{j}}} (n_{\vec{j}} + x_{\vec{j}}) \right)^{-s}$$

この級数は $\operatorname{Re} s > \frac{r}{n}$ で広義一様かつ絶対収束し, 全 s -平面に有理型に解析接続される. ([5]) 特に $n=1$ の場合, Barnes の zeta 関数といい, $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ に對して, $\zeta_r(s, \Omega, x)$ とかくことにする. 以上のことから, $\zeta_k(s, c)$ の $s=0$ での挙動を調べるには $\zeta(s, A, x)$ について調べれば十分である.

$1 \leq k \leq n$ とする k に對して, A の k 行と n 行を入れかえた行列を $A^{(k)}$ であらわす. また $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi(u) = \varphi(u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ 1 - u_1 - \dots - u_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

と置く. 次の命題は容易に出る

Proposition 1. $\operatorname{Re} s > \frac{r}{n}$ のとき

$$\zeta(s, A, x) = \frac{P(ns)}{P(s)^n} \sum_{k=1}^n \int_{D_{n-1}} (u_1 \cdots u_{n-1})^{s-1} (1-u_1 \cdots u_{n-1})^s \times$$

$$\zeta_n(s, {}^t(A^{(k)})\varphi(u), x) du_1 \cdots du_{n-1},$$

$$T=T^{-1}. \quad D_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_i \geq 0, x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq 1\}.$$

[S1]~[S3] では、この積分（少し形は違うが）を contour integral に変形して解析接続しているが、ここでは、被積分関数を変形して
いく。

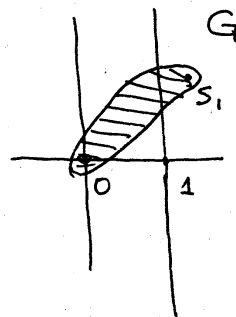
§2. この節では一般に

$$I(s, g) = \int_{D_m} (u_1 \cdots u_m)^{s-1} (1-u_1 \cdots u_m)^s g(s, u) du_1 \cdots du_m$$

の形の積分の $s=0$ への解析接続を考察する。ただし

$g(s, u)$ は次の条件をみたすものとする：

- (*) $\left[\begin{array}{l} \exists G: 0 \text{ 附近 } s_1 (\operatorname{Re} s_1 > 1) \text{ 近くある領域,} \\ \exists F: D_m \text{ 近くある } \mathbb{C}^m \text{ の領域} \\ \text{があり, } g(s, u) \text{ は } G \times F \ni (s, u) \text{ で正則} \end{array} \right.$



被積分関数は u_i のいくつかが 0 になるところで $\operatorname{Re} s < 1$ のとき
singularity をもつので、それらを除くことを考える。

$0 \leq p \leq m-1$ に対し p は $\neq L$.

$$D^{(0)} = \{(0, \dots, 0)\},$$

$$D^{(p)} = \bigcup_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq m} D(\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad D(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \left\{ (u_1, \dots, u_m) \in D^m \mid \begin{array}{l} u_i = 0 \text{ if } \\ i \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \end{array} \right\}$$

とある。明らかに $D^{(0)} \subset D^{(1)} \subset \dots \subset D^{(m-1)} \subset D = D_m$ 。

$H \subset D_m$ で正則な m 複素変数の関数のなす線型空間,

$$H^{(p)} = \{ f \in H \mid f(u) = 0 \quad \forall u \in D^{(p)} \}, \quad H^{(-1)} = H$$

とある。

$$H = H^{(-1)} \supset H^{(0)} \supset \dots \supset H^{(m-1)}$$

H 上の線型作用素 $\partial^{(p)}$ を

$$(\partial^{(p)} f)(u_1, \dots, u_m) = f(u_1, \dots, u_m) - \sum_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq m} f \circ P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}(u),$$

$$F=F=L. \quad P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}(u) = (v_1, \dots, v_m), \quad v_\lambda = \begin{cases} 0 & \lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \\ u_{\lambda_i} & (i=1, \dots, p) \end{cases}$$

とある。 $\partial^{(p)} H^{(p-1)} \subset H^{(p)}$ は容易にわかる。従って

$$\Delta_p \equiv \partial^{(p)} \circ \partial^{(p-1)} \circ \dots \circ \partial^{(0)}.$$

とある。 $\Delta_p H \subset H^{(p)}$ 。

さらに

Proposition 2. $1 \leq p \leq m$, $1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq m$ とするとき

$$f \in H^{(p-1)} \Rightarrow \frac{1}{u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_p}} (f \circ \Phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_p})(u) \text{ は } D(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \text{ で}$$

連続.

Corollary. 上の条件の下に.

$$f \in H \Rightarrow \frac{1}{u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_p}} ((\Delta_{p-1} f) \circ P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p})(u) \text{ は } D(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \text{ で}$$

連続.

この結果を用いて, $I(s, g)$ の解析接続を与える.

まず, 形式的な変形により

$$\begin{aligned} I(s, g) &= I(s, \Delta_m g) + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq m} I(s, (\Delta_{p-1} g) \circ P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}) \\ &\quad + I(s, g(s, 0, \dots, 0)) \quad (\operatorname{Re} s > 1) \end{aligned}$$

そこで, 和の各項および最後の項は

$$\begin{aligned} &I(s, (\Delta_{p-1} g) \circ P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}) \\ &= \frac{1}{m-p+1} \frac{\Gamma(s)^{m-p+1}}{\Gamma((m-p+1)s)} \int_{D(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} (u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_p})^{s-1} (1-u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_p})^s \times \\ &\quad (\Delta_{p-1} g) \circ P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}(u) \cdot du_{\lambda_1} \cdots du_{\lambda_p}. \end{aligned}$$

$$I(\lambda, g(\lambda, 0, \dots, 0)) = g(\lambda, 0, \dots, 0) \frac{1}{m} \frac{\Gamma(\lambda)^{m+1}}{\Gamma((m+1)\lambda)}$$

$$I(\lambda, \Delta_m g) = \int_{D_m} (u_1 \cdots u_m)^{\lambda-1} (1-u_1 \cdots u_m)^{\lambda} (\Delta_m g)(u) du_1 \cdots du_m.$$

Proposition 2により

上の積分の各項は条件★のGの元として全区域で収束し、その範囲で

λ の正則関数であらう。従って $I(\lambda, g)$ は0の近傍へ解析接続される。

§3. 前§での結果を Proposition 1の積分に応用する。 $m=n-1$

とあき、簡単のため

$$g_k(s, u) = \zeta_r(ns, t(A^{(k)}\varphi(u)), x)$$

とあき。 $g_k(s, u)$ が条件★を満たすことは容易に示せる ([B], [E2])

従って

Theorem. $s=0$ の近傍で

$$\zeta(\lambda, A, x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left\{ \zeta_r(n\lambda, A_k, x) + \sum_{p=1}^{n-2} \frac{1}{n-p} \frac{\Gamma(n\lambda)}{\Gamma((n-p)\lambda)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)^p} x \right.$$

$$\left. \sum_{1 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_p \leq n-1} \int_{D(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} (u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_p})^{\lambda-1} (1-u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_p})^{\lambda} (\Delta_{p-1} g_k) \phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}(u) du_{\lambda_1} \cdots du_{\lambda_p} \right\}$$

$$+ \frac{\Gamma(n\delta)}{\Gamma(\delta)^n} \int (u_1 \cdots u_{n-1})^{\delta-1} (1-u_1 \cdots u_{n-1})^\delta (\Delta_{n-1} g_k)(u) du_1 \cdots du_{n-1} \Big\}$$

D_{n-1} に対する A_k は A の k 行 k 列要素である。

Corollary 1 ([S2], [S3])

$$\zeta(0, A, x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \zeta_r(0, A_k, x)$$

$$\left. \frac{d}{ds} \zeta(s, A, x) \right|_{s=0} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left. \frac{d}{ds} \zeta_r(s, A_k, x) \right|_{s=0} \right.$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \int_0^1 \frac{1}{u} (\zeta_r(0, A_j u + A_k(1-u), x) - \zeta_r(0, A_k, x)) du \Big\},$$

$p \geq 2$ の場合、 ζ_r の多項式部分が出てきて、わかりやすい形には書けない。

$$\frac{1}{n-p} \frac{\Gamma(n\delta)}{\Gamma((n-p)\delta) \Gamma(\delta+1)^p} \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_p \leq n-1} \frac{\int (u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_p})^{\delta-1} (1-u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_p})^\delta}{p(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} \\ \times (\Delta_{p-1} g_k) P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}(u) du_{\lambda_1} \cdots du_{\lambda_p}$$

$$\Rightarrow \sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(p)}(A, x) \delta^v$$

と $\delta=0$ の範囲とすると

Corollary 2.

$$\left. \left(\frac{d}{ds} \right)^q \zeta(s, A, x) \right|_{s=0} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{ds} \right)^q \zeta_r(hs, A_k, x) \Big|_{s=0} \\ + C_{q-1}^{(1)}(A, x) + C_{q-2}^{(2)}(A, x) + \cdots + C_0^{(q)}(A, x) \quad (0 \leq q \leq n-1).$$

Remark 1. $\zeta_r(0, (u_1, \dots, u_n), (x_1, \dots, x_n))$ は u_i, x_i 達の有理関数.

また $\frac{d}{ds} \zeta_r(s, (u_1, \dots, u_n), (x_1, \dots, x_n))$ は Barnes の r 重ガンマ関数によって表れられる ([B], [E2]).

2. $C_0^{(q)}(A, x)$ は a_{ij}, x_j の有理関数の q -重積分 (ただし $q \geq 1$ は初等関数の $q-1$ 重積分による).

文献

- [S1] Shintani, T., On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 23 (1976), 393-417
- [S2] Shintani, T., On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, ibid. 24 (1977), 167-199
- [S3] Shintani, T., On values at $s=1$ of certain L -functions of totally real algebraic number fields. Algebraic Number Theory (Proc. International Symp. Kyoto), Japan Soc. for Promotion

of Science, 201-212, 1977.

[B] Barnes, E.W., On the theory of the multiple gamma function., Trans. Cambridge Philos. Soc. 19, 374-425 (1904).

[E1] Egami, S., A note on Kronecker limit formula for real quadratic fields, Mathematika 33 (1986), 239-243

[E2] Egami, S., Note on multiple gamma functions (preprint).