

有限群の自己同型と固定点

東大教養 近藤 武

P. Martineau は次の定理を証明した。

定理. G を有限群 A を G の自己同型群の部分群で基本可換群とする。 $C_G(A) = 1$ ならば G は可解である。

こゝでは次の結果が上の定理の簡単な系である事を示す。

定理. G を有限群 A を G の自己同型群の部分群で基本可換群 A の位数が p のべき乗とする。 A の指数 p の任意の部分群 V に対し $C_G(V)$ が G の中零性部分群とする。この時 G は可解である。

証明. $|G|$ に関する帰納法で証明する。従つて次の事を仮定して置く。

(a) G の A 不変な真部分群は可解

(b) G の A 不変な真の正規 p 部分群をもちける。

Martineau の定理により $C_G(A) \neq 1$ としてよい。 $|C_G(A)|$

を割る素数 q を取る。 r を $|G|$ を割る q と異なる任意の素数

とし、 Q, R をそれぞれ G の A 不変な q -Sylow p 群, r -Sylow p 群

とある。このとき

$$R = \langle C_R(V) \mid [A:V] = P \rangle \quad (*)$$

$C_G(V) \supseteq C_R(V)$, $C_Q(A) \subsetneq C_G(V)$ は仮定により矛盾だから

$$[C_R(V), C_Q(A)] = 1 \quad (**)$$

(*)により

$$[R, C_Q(A)] = 1$$

帰納法により $C_G(C_Q(A))$ は可解

(**)により $C_G(C_Q(A))$ は G の A -不変な1階層 L で

$G = QL$, $Q \cap L = 1$ なるものを含み。この時

$$\bigcap_{x \in G} Q^x = \bigcap_{y \in L} Q^y$$

(*)により $\bigcap_{y \in L} Q^y \supseteq C_Q(A)$

$$\therefore G \not\supseteq \bigcap_{x \in G} Q^x = \bigcap_{y \in L} Q^y \supseteq C_Q(A) \neq 1$$

即ち G は A -不変な真の正則1階層を含む事になり (β) に反す。

(終り)