

Ultradistribution に対する正則化核

東大理

小松孝三郎

中村如君の論文に関連して, コンパクト台の *ultradistribution* の空間 $\mathcal{E}'^*(\Omega_y)$ を超可微分函数の空間 $\mathcal{E}^*(\Omega_x)$ に関する連続線型作用素は $\mathcal{E}^*(\Omega_x \times \Omega_y)$ の元を核とする積分作用素になることを示そう.

L. Schwartz は有名な核定理の証明を発表した最初の論文 [3] の中で類似の結果である正則化作用素の特徴づけ $L(\mathcal{E}'(\Omega_y), \mathcal{E}(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}(\Omega_x \times \Omega_y)$ を与えている. われわれの証明も本質的に Schwartz のものと同じである. 彼は更に $L(\mathcal{D}(\Omega_y), \mathcal{E}(\Omega_x))$ および $L(\mathcal{E}'(\Omega_y), \mathcal{D}'(\Omega_x))$ の半正則核による特徴づけを与えているが, これに相当することも成立することを示す. 核定理そのものの *ultradistribution* 版 $L(\mathcal{D}^*(\Omega_y), \mathcal{D}'^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{D}'^*(\Omega_x \times \Omega_y)$ は既に [2] で証明した.

以下 M_p は次の条件を満たす正数列とする:

$$(M. 0) \quad M_0 = M_1 = 1 ;$$

$$(M. 1) \quad M_p^2 \leq M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, \dots ;$$

$$(M. 2) \quad \text{定数 } A, H \text{ が存在し}$$

$$\frac{M_{p+q}}{M_p M_q} \leq A H^{p+q}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots ;$$

$$(M. 3)' \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty .$$

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とすると、 Ω 上の函数 f が $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ ($\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$) に属するとは、任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$, $h > 0$ に対して定数 C が存在し (定数 h, C が存在し)

$$(1) \quad \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C h^{|\alpha|} M_{h|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots,$$

となることであると定義する。* によって (M_p) または $\{M_p\}$ を表わすこととし、 $\mathcal{E}^*(\Omega)$ の元を * 族の超可微分函数という。 $\mathcal{E}^*(\Omega)$ のうちコンパクトな台をもつ元全体の線型部分空間を $\mathcal{D}^*(\Omega)$ と書く。

$\mathcal{D}^*(\Omega)$, $\mathcal{E}^*(\Omega)$ には自然な局所凸位相が入り完備かつ反射的 Grothendieck 空間 (= 核型空間) になる。 $\mathcal{D}^*(\Omega)$ の双対空間 $\mathcal{D}'^*(\Omega)$ の元を * 族の ultra distribution という。Ultra distribution に対しても distribution

と同様に台が定義され, $\mathcal{E}^*(\Omega)$ の双対空間 $\mathcal{E}'(\Omega)$ はコンパクト台の ultradistribution 全体の線型空間と同一視することが出来る. $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{E}^*(\Omega)$ には強位相, すなわち有界集合上の一様収束位相を与える. このとき, これらもまた完備かつ反身的な Grothendieck 空間になる. 以上については [1], [2] を見られたい.

$\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ の位相はコンパクト集合 $K \subset \Omega$ および $h > 0$ を動かして得られる半ノルム

$$(2) \quad p_{K,h}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

の族によって定まる局所凸位相である.

$\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ の局所凸位相は, 本来, (1) の評価をもつ K 上の函数 f からなる Banach 空間の $h \rightarrow \infty$ のときの帰納極限をとり, 次いで $K \nearrow \Omega$ のときの射影極限として定義されるのであるが, [1] で証明した ultradistribution の第一構造定理を用いれば, コンパクト集合 $K \subset \Omega$ および $0 < h_p \nearrow \infty$ とする列を任意にとり, $H_p = h_1 h_2 \cdots h_p$ とし

$$(3) \quad p_{K,H}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \frac{|D^\alpha f(x)|}{H_{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

で定義される半ノルム全体で定まる局所凸位相と一致するこ

とがわかる。また、このような半ノルムが全部有限になることが f が $\mathcal{E}^{M_p}(\Omega)$ に属するための必要十分条件である。

Ω_x, Ω_y をそれぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の開集合とし、それぞれの点を x, y と表わす。[2] の核定理により連続線型作用素 $T: \mathcal{D}^*(\Omega_y) \rightarrow \mathcal{D}^{*'}(\Omega_x)$ は核 $N \in \mathcal{D}^{*'}(\Omega_x \times \Omega_y)$ を用いて一意的に

$$(4) \quad Tf(x) = \int_{\Omega_y} N(x, y) f(y) dy$$

と表わされる。 E, F が局所凸空間であるとき、 $L_p(E, F)$ によって、有界集合上一様収束の位相をもつ連続線型作用素 $T: E \rightarrow F$ 全体の線型空間を表わすことにする。このとき上の対応は位相をこめら同型

$$(5) \quad L_p(\mathcal{D}^*(\Omega_y), \mathcal{D}^{*'}(\Omega_x)) \cong \mathcal{D}^{*'}(\Omega_x \times \Omega_y)$$

である。

定理 1. 上の対応の下で位相もこめら

$$(6) \quad L_p(\mathcal{E}^{*'}(\Omega_y), \mathcal{E}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_x \times \Omega_y).$$

証明. $\mathcal{E}^{*'}(\Omega_y)$ は完備かつ樽型, $\mathcal{E}^*(\Omega_y) = (\mathcal{E}^{*'}(\Omega_y))'$ は完備 Grothendieck 空間かつ $\mathcal{E}^*(\Omega_x)$ は完備ゆえ, [4] Proposition 50.5 により

$$L_\beta(\mathcal{E}'(\Omega_y), \mathcal{E}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_y) \hat{\otimes} \mathcal{E}^*(\Omega_x).$$

一方, [2] Theorem 2.1 により右辺は $\mathcal{E}^*(\Omega_x \times \Omega_y)$ と同型である. (研究集会のときは $\mathcal{E}^*(\Omega)$ の構造を用いた違った証明を与えた.) $\square$

同様に次の同型が得られる:

$$(7) \quad L_\beta(\mathcal{D}^*(\Omega_y), \mathcal{E}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_x) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(\Omega_y),$$

$$(8) \quad L_\beta(\mathcal{E}'(\Omega_y), \mathcal{D}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{D}'(\Omega_x) \hat{\otimes} \mathcal{E}^*(\Omega_y).$$

この右辺をわかりやすくするため, Schwartz [3] にならって局所凸空間値の超可微分函数の空間を考える.

F を局所凸空間, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする. このとき F に値をもつ Ω 上の (M_p) 族 ($\{M_p\}$ 族) の超可微分函数の定義として次の二つが与えられる.

$f: \Omega \rightarrow F$ が $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega, F)$ ($\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega, F)$) に属するとは, f が F の位相に關し Ω 上無限回可微分, かつ F 上の任意の連続半ノルム q , 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$, $h > 0$ に対して定数 C が存在し (定数 h, C が存在し).

$$(9) \quad \sup_{x \in K} q(D^\alpha f(x)) \leq C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0, 1, \dots,$$

と存在を定義する。これはそれぞれ

$$(10) \quad g_{K, h}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} g\left(\frac{D^\alpha f(x)}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}\right) < \infty,$$

$$(11) \quad g_{K, H}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} g\left(\frac{D^\alpha f(x)}{H_{|\alpha|} M_{|\alpha|}}\right) < \infty$$

と同等である。但し H_p は $0 < h_p \nearrow \infty$ とする任意の列を用いて $H_p = h_1 \cdots h_p$ と定義される数列である。

また, $f \in \tilde{\mathcal{E}}^*(\Omega, F)$ とは, 任意の $e' \in F'$ に対して $\langle f(x), e' \rangle$ が $\mathcal{E}^*(\Omega)$ に属することであると定義する。

明らかに $\mathcal{E}^*(\Omega, F) \subset \tilde{\mathcal{E}}^*(\Omega, F)$ が成り立つ。

命題 1. F が列的完備ならば,

$$(12) \quad \mathcal{E}^*(\Omega, F) = \tilde{\mathcal{E}}^*(\Omega, F).$$

証明. $f \in \tilde{\mathcal{E}}^*(\Omega, F)$ とする。Grothendieck の補題 [3] Appendice Lemme II により f は F の位相に関して無限回連続可微分である。

$* = (M_p)$ のとき, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ と $h > 0$ に対して

$$(13) \quad \{D^\alpha f(x) / (h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}) : x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

は F の有界集合となる。実際、任意の $e' \in F'$ に対し

$$(14) \quad \langle D^\alpha f(x), e' \rangle = D^\alpha \langle f(x), e' \rangle$$

ゆえ、(13) の集合は弱有界である。したがって Mackey の定理により有界となる。これより (10) が成立することがわかる。

$* = \{M_p\}$ のときも、上と同様、任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ と列 $0 < h_p \nearrow \infty$ に対し

$$(15) \quad \{D^\alpha f(x) / (H_{|\alpha|} M_{|\alpha|}) ; x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

が有界になることがわかる。したがって、(11) が成立する。

命題 2. $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ のとき、任意の同程度連続集合 $E \subset F'$ に対し

$$(16) \quad \{\langle f(x), e' \rangle ; e' \in E\}$$

は $\mathcal{E}^*(\Omega)$ の相対コンパクト集合である。

証明. (13), (15) の有界性および (14) を用いれば、(16) は $\mathcal{E}^*(\Omega)$ で有界であることがわかる。 $\mathcal{E}^*(\Omega)$ は Grothendieck 空間であるから、有界集合は相対コンパクトである。□

特に、 F 上の連続半ノルム q を用いて $\|e'\|_q = \sup$

$\{ |\langle e, e' \rangle| ; q(e) \leq 1 \} \leq 1$ とする $e' \in F'$ 全体の集合を E とすれば, 同様にして

$$(17) \quad q_{K,h}(f) = \sup_{\|e'\|_q \leq 1} p_{K,h}(\langle f, e' \rangle),$$

$$(18) \quad q_{K,H}(f) = \sup_{\|e'\|_q \leq 1} p_{K,H}(\langle f, e' \rangle)$$

となることがわかる.

$\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ にはこれらの半ノルム全体で定義される局所凸位相を入れる.

命題 3. F が準完備ならば, $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ は準完備であり, F が完備ならば $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ も完備である.

証明. F は (準) 完備, $f_0 \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ における (有界な) Cauchy 有向族とする. このとき, 各 $x \in \Omega$ に対して $D^\alpha f_0(x)$ は F における (有界な) Cauchy 有向族をなし, ある $f^{(\alpha)}(x) \in F$ に収束する. この収束は各コンパクト集合上一様であるから $f(x) = f^{(0)}(x)$ は Ω 上無限回可微分, かつ $D^\alpha f(x) = f^{(\alpha)}(x)$ となることがわかる.

$* = (M_p)$ のとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し ν_0 を十分大にすれば $\nu, \mu \geq \nu_0$ に対し

$$\rho_{K,h}(f_\nu - f_\mu) = \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \rho \left(\frac{D^\alpha f_\nu(x) - D^\alpha f_\mu(x)}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \right) \leq \varepsilon$$

がなりたつ. $\mu \rightarrow \infty$ とすれば $\rho_{K,h}(f_\nu - f) \leq \varepsilon$ がおかる. すなわち f_ν は f に収束する.

$* = \{M_p\}$ のときも同様である. $\square$

$\varphi \in \mathcal{E}^*(\Omega)$, $e \in F$ のとき, 積 $\varphi(x)e$ は $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ に属する. これにより テンソル積の元 $\sum_{i=1}^m \varphi_i \otimes e_i \in \mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ に $\sum_{i=1}^m \varphi_i(x)e_i \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ を対応させる線型写像 $\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F \rightarrow \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ が定まる. 容易に示されるようにこの写像は単射であるから, これによって $\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F \subset \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ とみえる. (17), (18) は, このとき $\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ にひきおこされる局所凸位相が Grothendieck の位相と一致することを示している.

定理 2. F が準完備ならば, $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ は $\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes_\varepsilon F$ の準完備化 $\mathcal{E}^*(\Omega) \hat{\otimes} F$ と同型であり, F が完備ならば, $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ は完備化 $\mathcal{E}^*(\Omega) \hat{\otimes} F$ と同型である.

証明. $\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ が $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ の中で有界的に稠密であることのみを証明すればよい. これは Schwartz [3] Proposition 10 と同様に証明できる. すなわち, $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$, $\rho_* = \rho_{K,h}$ または $\rho_{K,H}$, および $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする. $\rho_*(f)$ は f の K

の近傍での振舞いのみによって定まるから、 K の近傍で 1 に等しい $\chi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ をとり、 $f_0(x) = \chi(x)f(x)$ とすれば、 f_0 は $\Omega_\delta \subset \subset \Omega$ の中にコンパクト台をもつ $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ の元であって $q_*(f - f_0) = 0$ とする。

[1] Theorem 6.10 の証明と同様に $f_0 \in \mathcal{E}^*(\Omega, F)$ は平行移動に関して連続であることが示される。したがって、十分 0 に近いコンパクト台をもつ $j \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ による正則化

$$(19) \quad j * f_0(x) = \int j(x-y) f_0(y) dy$$

をとれば、 $q_*(f_0 - j * f_0) \leq \varepsilon/2$ が成り立つ。

正則化作用素 $j *$ は $C_c(\Omega_\delta, F)$ から $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ への連続線型作用素であるから、 f_0 を 1 の分解を用いて $f_1 \in C_c(\Omega_\delta) \otimes F$ で近似すれば、 $q_*(j * f_0 - j * f_1) \leq \varepsilon/2$ とすることができ、 $j *$ は $C_c(\Omega_\delta) \otimes F$ を $\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ へのうつす写像でもあるから、 $j * f_1 \in \mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ かつ $q_*(f - j * f_1) \leq \varepsilon$ とする。

以上の証明で用いた近似は、 q_* および ε に依存せず f のみによって定まる有界集合に属する元による近似となるから、 $\mathcal{E}^*(\Omega) \otimes F$ は $\mathcal{E}^*(\Omega, F)$ において有界的に稠密である。□

したがって, (7), (8) と合せて次の定理が得られる.

定理 3 (4) の対応の下で, 位相もこめて次の同型がなりたつ:

$$(20) \quad L_{\beta}(\mathcal{D}^*(\Omega_y), \mathcal{E}^*(\Omega_x)) \cong \mathcal{E}^*(\Omega_x) \hat{\otimes} \mathcal{D}^{*'}(\Omega_y) \\ \cong \mathcal{E}^*(\Omega_x, \mathcal{D}^{*'}(\Omega_y));$$

$$(21) \quad L_{\beta}(\mathcal{E}^{*'}(\Omega_y), \mathcal{D}^{*'}(\Omega_x)) \cong \mathcal{D}^{*'}(\Omega_x) \hat{\otimes} \mathcal{E}^*(\Omega_y) \\ \cong \mathcal{E}^*(\Omega_y, \mathcal{D}^{*'}(\Omega_x)).$$

参考文献

- [1] H. Komatsu, Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 20 (1973), 25-105.
- [2] H. Komatsu, Ultradistributions, II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 24 (1977), 607-628.
- [3] L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles,

J. Anal. Math., 4 (1954-55), 88-148.

[4] F. Trèves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York-London, 1967.