

スピンのブラウン運動 II

阪大・教養 植 山 宏

(9 月 2 2 日 受 理)

3. 前節(文献^(A) § 2)の結果は, 遷移確率(21)に基いている。この遷移確率(以下 $W_0(M, M')$ と書く)は, ハミルトニアン摂動項より $|H'(M, M')|^2$ として求められたものであり, 正確な $W(M, M')$ は文献^{(5)*}の(2-26)式より

$$W(M, M') = n(M, \epsilon) W_0(M, M') \quad (35)$$

でなければならない。今, 系を巨視変数 M で張られる部分系と, それ以外の部分に分割し, 後者を熱浴と考えれば, $n(M, \epsilon)$ はカノニカル分布

$$n(M, \epsilon) \propto A e^{-\beta \epsilon'(M)} \equiv f^{\text{eq}}(M) \quad (36)$$

となる事が分る。⁽⁶⁾

この時, (35)より $W_0(M, M') = W_0(M', M)$ を利用すれば, 詳細釣り合の条件

$$W(M, M') f^{\text{eq}}(M') = W(M', M) f^{\text{eq}}(M) \quad (37)$$

が導かれる。

4. よって

$$f^{\text{eq}}(M) = A e^{-\beta H_0 M_z} \quad (38)$$

を導入すると

$$W(M, M') = -A \sum_j \frac{1}{\tau_j} e^{-\beta H_0 M_z} L_j^2 \delta(M - M') \quad (39)$$

となる。この遷移確率の 1st derivate moments は

* 文献^(A)の参照(1)~(5)の番号を示す。

$$\begin{aligned}
\alpha_{1x} &= - \left(\frac{1}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_z} \right) M_x + \frac{1}{\tau_y} \beta H_0 M_x M_z \\
\alpha_{1y} &= - \left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_z} \right) M_y + \frac{1}{\tau_x} \beta H_0 M_y M_z \\
\alpha_{1z} &= - \left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} \right) M_z - \beta H_0 \left(\frac{1}{\tau_x} M_y^2 + \frac{1}{\tau_y} M_x^2 \right)
\end{aligned} \tag{40}$$

となる。2nd derivatives moments は § 2 の (28) と変らない。これは, random force によって規定されている。

仮定

$$1/\tau_x = 1/\tau_y = 1/2\tau_0, \quad 1/\tau_x + 1/\tau_z = 1/\tau_y + 1/\tau_z = 1/\tau_1 \tag{41}$$

を導入すれば, Langevin eq. は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = - \Gamma \mathbf{M} - \eta (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{M}) \times \mathbf{M} + \mathbf{R} \tag{42}$$

となり, 右辺第二項は Landau - Lifshitz friction を示す。但し,

$$\Gamma_{ij} = r_j \delta_{ij} \quad r_x = r_y = 1/\tau_1 \quad r_z = 1/\tau_0 \tag{43}$$

$$\eta = - \frac{\beta H_0}{2 \tau_0} \tag{44}$$

となる。§ 2 (8) の変換を元へ戻せば, (42) は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = r \mathbf{H}_0 \times \mathbf{M} - \Gamma \mathbf{M} - \eta (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{M}) \times \mathbf{M} + \mathbf{R} \tag{45}$$

を意味する。Fokker - Planck eq. は, α_2 まで考える近似では,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{M}, t) = - \sum_j \frac{\partial}{\partial M_j} \{ \alpha_{1j}(\mathbf{M}) f(\mathbf{M}, t) \} + \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial M_i \partial M_j} \alpha_{2ij}(\mathbf{M}) f(\mathbf{M}, t) \right\} \tag{46}$$

となり, 久保・橋爪両氏⁽¹⁾の (34) 式と同じである。尤も, そこで表れる δ を $\delta = 0$ と

する。この結果は本質的に川端氏の結果⁽⁵⁾と等しい内容である。

5. 前節の結果は、§ 1. (1) 式を直接に積分する初等的方法の結果と矛盾する。

即ち、(1) を

$$M(t) = \exp \left\{ \int_0^t A(s) ds \right\} M(0) \quad (47)$$

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -rH'_z(s) & rH'_y(s) \\ rH'_z(s) & 0 & -rH'_x(s) \\ -rH'_y(s) & rH'_x(s) & 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

と積分し、確率変数 $H'_j(s)$ について平均する。

仮定

$$\langle H'_j(0) H'_k(s) \rangle = \Psi_j(s) \delta_{jk} \quad (49)$$

を仮定し、 $H'_j(s)$ の 2 次相関まで正しく求めると、

$$\begin{aligned} \langle M(t) \rangle &= \langle \exp \int_0^t A(s) ds \rangle M(0) \\ &= \exp \left[\langle \exp \int_0^t A(s) ds - 1 \rangle_c \right] M(0) \end{aligned} \quad (50)$$

故に、

$$\langle M_i(t) \rangle = \exp \left\{ \int_0^t -(\Psi_j(s) + \Psi_k(s)) ds \right\} M_i(0) \quad (51)$$

(i, j, k) は (x, y, z) の置換

となり、これより、

$$\frac{d}{dt} \langle M_i(t) \rangle = - \int_0^t (\Psi_j(s) + \Psi_k(s)) \langle M_i(t-s) \rangle ds \quad (52)$$

となる。マルコフ近似をすれば、

$$\frac{d}{dt} \langle M_i(t) \rangle = - \left(\frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_k} \right) \langle M_i(t) \rangle \quad (53)$$

となり，常に線型である。但し，

$$\frac{1}{\tau_j} = \int_0^\infty \Psi_j(s) ds \quad (54)$$

(53) の結果は，(49) の代りに

$$\langle H'_j(0) H'_k(s) \rangle = \frac{1}{\tau_j} \delta_{jk} \delta(s) \quad (55)$$

とするのと同じである。

故に， $\{H'_j(s)\}$ が $M(0)$ と統計的に独立である限り，Landau-Lifshitz friction といった非線型項は生じ得ない。

6. 結 び

§ 4 の結論は，(38) より得られたものである。所が，classical spin では(38) は成立たない。Zeemann 項に対するハミルトニアンは通常 $H_0 M_z$ であり，その固有値（エネルギー）は， $H_0 M_z$ である（ M_z を対角化する表示で）。所が我々のハミルトニアンは $H_0 L$ であり，その表示は

$$\begin{aligned} & \langle M_x M_y M_z | H_0 L | M'_x M'_y M'_z \rangle \\ &= - H_0 L_z \delta(M_x - M'_x) \delta(M_y - M'_y) \delta(M_z - M'_z) \\ &= + i H_0 \left\{ \frac{M_x}{M_y - M'_y} - \frac{M_y}{M_x - M'_x} \right\} \delta(M - M') \end{aligned} \quad (56)$$

となり，対角的でない。よって，平衡分布(36)は，(38) でなく一様分布であって，よって結局 § 2 の計算が正しく，§ 4 は誤りという事になる。

この事は，§ 4 の無意味という事ではない。遷移確率(39)は一つの確率論的モデルを提供している。この確率過程は Langevin eq. (45) ででも表現される。

又，古典的なモデルを量子論的なモデルに置換することによって，§ 4 の結果も得ることが出来るものと思われる。事実，Wangness と Bloch⁽⁷⁾ の (4-19) (4-20) 両式

には Landau-Lifshitz friction に相当する項が含まれている。彼らの方法は master eq. によるが, master eq. の方法と Langevin eq. の方法とは本質的には異なる所がないので⁽²⁾, 残された問題はそう多くはない。唯, Zwanzig 等によって発達した最近の master eq. の方法で文献(7)を再検討するのは面白そうである。

文 献

- (A) 物性研究 vol. 19. no. 1.
- (6) H. Ueyama (unpublished)
- (7) R.K. Wangness and F. Bloch, Phys. Rev. 89 728 (1953)