

Banach 空間における Accretive

作用素について

広大理 劍持信幸

1. 序

この小論において, Banach 空間における (一般に多価) accretive 作用素の local boundedness, m -accretiveness, 及び maximal accretiveness について論ずる。

Hilbert 空間における accretive 作用素はその定義域の内実において locally bounded であることが知られている (Pazy [6], Rockafellar [7] を参照)。この事実は, 連続かつ逆連続な duality 作用素をもつ Banach 空間においても正しいということを示そう。

次に, 抽象的 Cauchy 問題

$$(E) \quad \frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0, \quad u(0) = a$$

を考える。ここで, 未知関数 $u(t)$ は実数区間 $[0, +\infty)$ 上定義され, Banach 空間 X の中に値をもつような関数であり,

A は X における accretive 作用素である。T. Kato [5] の結果によると, X^* (X の dual 空間) が uniformly convex であり A が X 全体を定義域にもつような一価の hemicontinuous accretive 作用素であるならば, (E) は任意に与えられた $a \in X$ に対し解をもち, さらに A は m -accretive である。この T. Kato の結果を, A が多価の locally bounded な maximal accretive 作用素である場合に拡張し, さらに X に対するいくつかの制限のもとで, 定義域が開集合であるような maximal accretive 作用素は m -accretive であるということを示そう。

2. 記号の説明と定義

小論を通じ X を実 Banach 空間, X^* をその dual 空間とする。 X 及び X^* における norm は $\|\cdot\|$ で表わし, $x^* \in X^*$ の $x \in X$ における値を $\langle x, x^* \rangle$ で表わす。

X の各点 x に対し X の部分集合 Tx を対応させる作用素 T に対し, 集合 $D(T) = \{x \in X; Tx \neq \emptyset\}$ をその定義域という。 T が $x_0 \in X$ において locally bounded であるとは, x_0 のある近傍 U で, $T(U) = \bigcup \{Tx; x \in U\}$ が X の有界集合となるものが存在することという。

X から X^* の中への作用素 $J: x \longrightarrow Jx = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}$;

$\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$ } を duality 作用素という。 X^* が strictly convex ならば, J は一価の作用素であり, さらに uniformly convex ならば, J は X の各有界集合上で一様連続であることが知られている (T. Kato [4] を参照)。

X における作用素 T が accretive であるとは, $D(T)$ の任意の実数 x, y と, 任意の $x' \in Tx, y' \in Ty$ に対し $\langle x' - y', f \rangle \geq 0$ となるような $f \in J(x - y)$ が存在することという。 accretive 作用素 T が maximal accretive であるとは, T の真の accretive な拡張が存在しないことといい, m -accretive であるとは, $R(I + T) = \{x + x' ; x' \in Tx, x \in X\} = X$ となることという。

$B(x, r)$ (resp. $B^*(x^*, r)$) によって X (resp. X^*) における中心 x (resp. x^*) 半径 r の closed ball を表す。

3. accretive 作用素の local boundedness

この節を通して, X 及び X^* は strictly convex とし, duality 作用素 J は連続かつ逆連続 (従って J は X から X^* 上への位相写像) であるとする。このとき次の結果を得る。

[定理 1] T を X における (一般に多価の) accretive 作用素とする。このとき $\tilde{D}(T)$ ($D(T)$ の内点全体) の各点におい

て, T は *locally bounded* である.

この定理を示すには, 次の二つの補題を用いる. 証明の方針は Rockafeller [7] による.

【補題1】 $S \in X$ の部分集合で, $(-S) \cap \overset{\circ}{S} \neq \emptyset$ とする.
このとき, 二正数 ε, δ で

$$B^*(0, \varepsilon) \subset \bigcap_{x \in B(0, \delta)} \text{conv}(J(S-x))$$

となるものが存在する. ただし, $\text{conv}(J(S-x))$ によって $J(S-x)$ の *convex hull* を表わす.

【補題2】 $T \in X$ における多価作用素, $0 \in \overset{\circ}{D}(T)$ とする.
このとき, 次のような性質をもつ有界集合 S, S', C が存在する: (1) $(-S) \cap \overset{\circ}{S} \neq \emptyset$ (2) $\overline{S'} = S$ ($\overline{S'}$ は S' の閉包を示す)
(3) $Tx \cap C \neq \emptyset \quad \forall x \in S'$.

定理1の証明: $0 \in \overset{\circ}{D}(T)$ として, T が C で *locally bounded* であることを示せば十分である. 従って $0 \in \overset{\circ}{D}(T)$ とする.
補題2によって, (1), (2), (3) を満たす有界集合 S, S', C が存在する. $\rho = \sup \{ \|x\|; x \in S \}$, $\rho' = \sup \{ \|x\|; x \in C \}$

とおく。補題1によって, ε 正数 ε , δ が存在して

$$(4) \quad B^*(0, \varepsilon) \subset \bigcap_{x \in B(0, \delta)} \text{conv}(J(S-x))$$

とできる。このとき, $T(B(0, \delta))$ は X の有界集合であることを示せばよい。そのため, $B(0, \delta)$ の実 x , T_x の実 x' を任意にとる。 T の accretiveness より, 任意の $u \in S'$ と $u' \in Tu \cap C$ に対し,

$$\begin{aligned} \langle x', J(u-x) \rangle &\leq \langle u', J(u-x) \rangle \\ &\leq (\|u\| + \|x\|) \|u'\| \\ &\leq (p + \delta) p' \end{aligned}$$

が成立。即ち

$$J(S'-x) \subset \{x^* \in X^*; \langle x', x^* \rangle \leq (p + \delta) p'\} = F.$$

J は位相写像だから, $J(S-x) = J(\overline{S'-x}) = \overline{J(S'-x)}$ に注意すると, $\text{conv}(J(S-x)) \subset F$ を得る。(4)を用いると, $B^*(0, \varepsilon) \subset F$ となり, よって $\|x'\| \leq (p + \delta) p' / \varepsilon$ となる。これは

$$T(B(0, \delta)) \subset B(0, \frac{(p + \delta) p'}{\varepsilon})$$

なることを示している。

(終)

注意 1: T が連続かつ逆連続であるという仮定は補題 1 を示すときのみ必要である。

注意 2: 定理 1 の証明方法を用いると次のことを示すことができる。 T は $\overline{D(T)} = X$ なる accretive 作用素であるとする。このとき, *locally bounded* となるような実が一実でも存在するなら, 実は T は X のすべての実で *locally bounded* となり更に X が reflexive かつ T が maximal accretive なら $D(T) = X$ となる。

注意 3: 定理 1 によると, Crandall - Pazy [3] の定理 2.5 は bicontinuous な duality 作用素をもつ Banach 空間においても成立することが分かる。

4. 非線型発展方程式

X における多価作用素 A に対し微分方程式

$$(5) \quad \frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0$$

を考える。 X -値関数 $u(t)$ が実数区間 Ω 上 (5) の解であるとは, $u(t)$ が Ω 上連続であって, Ω のほとんどすべての実で $u(t)$ は強微分可能で (5) を満たすことという。この節を通じて, X^* は uniformly convex とする。

〔定理2〕 $A \in X$ における accretive 作用素で、その定義域 $D(A)$ は開集合とし、次の条件 (a), (b), (c) を満たすとする：
 (a) 各 $x \in D(A)$ に対し、 Ax は X の閉凸集合である。
 (b) A は demiclosed である (i.e. $x'_n \in Ax_n, x_n \in D(A)$ $x_n \longrightarrow x$ strongly in X , $x'_n \longrightarrow x'$ weakly in X ならば、 $x \in D(A)$ かつ $x' \in Ax$ である。)。 (c) 各 $x \in D(A)$ に対し x の近傍 U_x と X の有界集合 V_x が存在して、すべての $y \in U_x$ に対し $Ay \cap V_x \neq \emptyset$ とできる。このとき、任意に与えられた $a \in D(A)$ に対し $[0, +\infty)$ 上の (5) の解で $u(0) = a$ を満たすものが存在する。しかも、存在は a に対し一意である。

この定理の証明には少々の準備が必要である。次の補題3は T. Kato [5] による。

〔補題3〕 $\{u_n\}$ を区間 (a, b) 上の strongly measurable X -値関数の列とし、ある定数 K に対し

$$\|u_n(t)\| \leq K \quad \text{a.e. } t \in (a, b)$$

とする。 $V(t)$ を X の実列 $\{u_n(t)\}$ の弱集積の全体とするとき、 $1 < p < \infty$ なるある p に対し $u_n \longrightarrow u$ weakly in $L^p(a, b; X)$ ならば

$$u(t) \in \overline{\text{conv } V(t)} \quad \text{a. e. } t \in (a, b)$$

が成立する。

この補題3を用いて次の補題を得る。

〔補題4〕 A を定理2におけると同じものとする。 $u(t) : (a, b) \rightarrow X$ は連続関数、 K は正数とし、すべての $t \in (a, b)$ に対し $u(t) \in D(A)$ 、 $Au(t) \in B(0, K)$ を満たす。このとき、 (a, b) 上 strongly measurable な関数 $v(t)$ で

$$v(t) \in Au(t) \cap B(0, K) \quad \text{a. a. } t \in (a, b)$$

となるものが存在する。

次に、局所解の存在及び一意性に関する補題を述べる。

〔補題5〕 A を定理2におけると同じものとする。このとき、任意に与えられた $a \in D(A)$ に対し、正数 r と $[0, r)$ 上 (5) の解 $u(t)$ で $u(0) = a$ を満たすものが存在する。しかも存在は a に対し一意的である。

(証明) A に対する仮定 (C) によると、適当な正数 R ,

K で, $B(a, R) \subset D(A)$, すべての $x \in B(a, R)$ に対し $Ax \cap B(0, K) \neq \emptyset$ となるものが存在する。 $r = R/K$, 各自然数 n に対し $\varepsilon_n = r/n$ とおく。関数 u_n を次のように定義する。 $[0, \varepsilon_n]$ 上 $u_n(t) = a$ とする。 u_n に対し $(0, \varepsilon_n)$ 上 strongly measurable な関数 $\mathcal{U}_n^{(1)}$ で

$$\mathcal{U}_n^{(1)}(t) \in Au_n(t) \cap B(0, K) \quad \text{a. a. } t \in (0, \varepsilon_n)$$

となるもの $\mathcal{U}$ とする (このような関数は補題 4 により存在する)。次に $[\varepsilon_n, 2\varepsilon_n]$ 上

$$u_n(t) = a - \int_{\varepsilon_n}^t \mathcal{U}_n^{(1)}(s - \varepsilon_n) ds$$

とおく。帰納的に, $t \in [(k-1)\varepsilon_n, k\varepsilon_n]$ に対し

$$u_n(t) = a - \sum_{i=1}^{k-2} \int_{i\varepsilon_n}^{(i+1)\varepsilon_n} \mathcal{U}_n^{(i)}(s - \varepsilon_n) ds - \int_{(k-1)\varepsilon_n}^t \mathcal{U}_n^{(k-1)}(s - \varepsilon_n) ds$$

とおく (ただし, $\mathcal{U}_n^{(k-1)}$ は $((k-2)\varepsilon_n, (k-1)\varepsilon_n)$ 上 strongly measurable な関数で, $\mathcal{U}_n^{(k-1)}(t) \in Au_n(t) \cap B(0, K)$ a. a. $t \in ((k-2)\varepsilon_n, (k-1)\varepsilon_n)$ となるようなものである)。 $\mathcal{U}_n(t) = \mathcal{U}_n^{(i)}(t)$ if $t \in ((i-1)\varepsilon_n, i\varepsilon_n)$ とおく。 u_n は $[0, r]$ から $B(a, R)$ の中への連続関数で, ほとんどすべての $t \in (\varepsilon_n, r)$

に対し

$$(6) \quad \frac{du_n(t)}{dt} = -V_n(t-\varepsilon_n) \in -Au_n(t-\varepsilon_n)$$

が成立している。この様にしてつくられ区間 $\{u_n\}$ は $[0, r]$ 上一様収束することを示そう。 $n, m \in \mathbb{N}$ なる二つの自然数とする。このとき、ほとんどすべての $t \in (\varepsilon_m, r)$ に対し

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|u_n(t) - u_m(t)\|^2) \\ &= 2 \left\langle \frac{d}{dt} (u_n(t) - u_m(t)), J(u_n(t) - u_m(t)) \right\rangle \\ &= -2 \langle V_n(t-\varepsilon_n) - V_m(t-\varepsilon_m), J(u_n(t) - u_m(t)) \rangle \\ &\leq -2 \langle V_n(t-\varepsilon_n) - V_m(t-\varepsilon_m), J(u_n(t) - u_m(t)) \\ &\quad - J(u_n(t-\varepsilon_n) - u_m(t-\varepsilon_m)) \rangle \end{aligned}$$

が成立。この不等式は (6) と A の accretiveness より得られる。上の不等式を (ε_m, t) 上で積分すると、

$$\begin{aligned} (7) \quad & \|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \\ & \leq \|u_n(\varepsilon_m) - u_m(\varepsilon_m)\|^2 + 4K \int_{\varepsilon_m}^r \|J(u_n(s) - u_m(s)) - J(u_n(s-\varepsilon_n) \\ & \quad - u_m(s-\varepsilon_m))\| ds \end{aligned}$$

がすべての $t \in [0, r]$ に対し成立する。一方、全ての $t \in [\varepsilon_m, r]$ に対し、

$$\begin{aligned}
& \| (u_n(t) - u_m(t)) - (u_n(t - \varepsilon_n) - u_m(t - \varepsilon_m)) \| \\
& \leq \| u_n(t) - u_n(t - \varepsilon_n) \| + \| u_m(t) - u_m(t - \varepsilon_m) \| \\
& \leq K(\varepsilon_n + \varepsilon_m).
\end{aligned}$$

よって、 J が $B(a, R)$ 上一様連続なることに注意すると、(7)の右辺は、 $n, m \rightarrow \infty$ のとき、0 に収束する。即ち、 $\{u_n\}$ はある $[0, r]$ 上連続関数 u に一様収束する。明らかに $u(0) = a$ をみたす。(6) によると、 $\| du_n(t)/dt \| \leq K$ a. a. $t \in (0, r)$ 。従って、 $1 < p < \infty$ なる p に対し、適当な部分列 $\{u_{n_j}\}$ をとると、 $du_{n_j}/dt \rightarrow v$ weakly in $L^p(0, r; X)$ となる様に行える。このとき、 $du/dt = v$ である。補題3及び A に対する仮定 (a), (c) を用いると、

$$\frac{du(t)}{dt} = v(t) \in -Au(t) \quad \text{a. a. } t \in (0, r)$$

を得る。即ち u は $u(0) = a$ をみたす $[0, r]$ 上 (5) の解である。存在の一貫性は A の accretiveness より明らかである (終)

定理2の証明：局所解の存在が補題5により示されたが、この解が無限に延長され得ることは、Brezis - Pazy [4] の Lemma 2.2, A についての仮定 (b), (c) 及び $D(A)$ が開集合であることより容易にわかる。(終)

5. accretive 作用素の m -accretiveness

Hilbert 空間においては, maximal accretiveness と m -accretiveness は同一の概念であるが, 一般 Banach 空間においては異なる。一般に m -accretive ならば常に maximal accretive であるが, 逆は成立しない。(反例については, Cadvert [2] を参照)

【定理3】 X^* は uniformly convex, $A \in$ 定理2における同じものとする。このとき, A は m -accretive である。

(証明) Cauchy 問題

$$\frac{du(t)}{dt} + (I+A)u(t) \ni \phi, \quad u(0) = a$$

は, 定理2によると, 任意に与えられた $\phi \in X$ と $a \in D(A)$ に対し, $[0, +\infty)$ 上で解 $u(t)$ をもつ。T. Kato [5] の Lemma 8.2 によると, $t_n \rightarrow +\infty$ なる数列 $\{t_n\}$ で $n \rightarrow \infty$ のとき $u(t_n) \rightarrow u_0$ strongly in X , $du(t_n)/dt \rightarrow 0$ strongly in X となる様なものが存在する。 A は demiclosed だから $(I+A)u_0 \ni \phi$ である。即ち $R(I+A) = X$. (終)

最後に定理3より得られる系を述べよう。

[系1] X^* , A を定理3におけると同じもの, $B \in X$ における m -accretive 作用素で, $D(B) \subset D(A)$ とする。このとき, $A+B$ は m -accretive である。

[系2] X^* を uniformly convex, J を連続かつ逆連続, $A \in D(A)$ が開集合であるような accretive 作用素とする。このとき, A が m -accretive であるための必要十分条件は A が maximal accretive となることである。

References

[1] H. Brezis and A. Pazy, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, Israel J. Math., 8 (1970), 367 ~ 383.

[2] B. Calvert, Maximal accretive is not m -accretive, Boll. Un. Mat. Italiana, S.4, 3 (1970), 1042 ~ 1044.

[3] M. Crandall and A. Pazy, Semi-group of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Functional Anal., 3 (1969), 376 ~ 418.

[4] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508~520.

[5] T. Kato, Accretive operators and evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Nonlinear Functional Anal., Chicago, Amer. Math. Soc., 1 (1970) 138~161.

[6] A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions in Hilbert spaces, C.I.M.E., Problems in nonlinear analysis, (1971), 343~430.

[7] R. T. Rockafellar, Local boundedness of nonlinear monotone operators, Michigan Math. J., 16 (1969), 397~407.