

2次元微分同相写像の周期点と braid

鳴門教育大学

松岡 隆

Takashi Matsuoka

2次元微分同相写像の周期点は、「braid」の概念を用いて位相的に分類することができる。周期点の braid 型に関する近年の研究によって、braid 型と写像の力学系的性質との間に密接な関係があることが明らかになってきた。ここでは、これに関する現在までの研究状況について解説する。

§ 1. 周期点の braid の定義

まず、braid (組みひも) の概念を定義する。詳しくは、[3], [21] を参照されたい。M を曲面とする。M は境界 ∂M をもってもよいとする。

定義 1. n を自然数とすると、M の部分集合 γ で丁度 n 個の点からなるもの全体のなす集合を $V_n(M)$ と表す。即ち

$$V_n(M) = \{ \gamma \mid \gamma \subset M, \# \gamma = n \}.$$

$V_n(M)$ に自然な位相を入れた空間の基本群を M 上の n 次

braid group といひ、 $B_n(M)$ と表わす。基点 y_0 を明示するときは、 $B_n(M, y_0)$ とかく。 $B_n(M)$ の元を n 次 braid といふ。

braid の概念は次に示すようなより直観的な方法でも定義できる。 $I = [0, 1]$ とする。

定義 2. 直積空間 $M \times I$ 内の n 個の曲線の組 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ で次の条件をみたすものを n 次 geometric braid といふ。(図 1 参照)

- (i) $A_1, \dots, A_n$ は互いに disjoint
- (ii) $0 \leq t \leq 1$ に対し、 $A_i \cap (M \times \{t\})$ は T 度 1 点からなる。
(この 1 点を $(x_{A_i}(t), t)$ と表わす)
- (iii) $V_n(M)$ の 2 元、 $\{x_{A_1}(0), \dots, x_{A_n}(0)\}$ と $\{x_{A_1}(1), \dots, x_{A_n}(1)\}$ は一致する。(この元を $\{A_1, \dots, A_n\}$ の基点といふ。)

基点を止めたまま、geometric braid の条件をみたしながら連続変形で移り合う 2 つの n 次 geometric braid は、基点を止めて同値であるといひ、その同値類を n 次 braid といふ。

3 次 geometric
braid の例

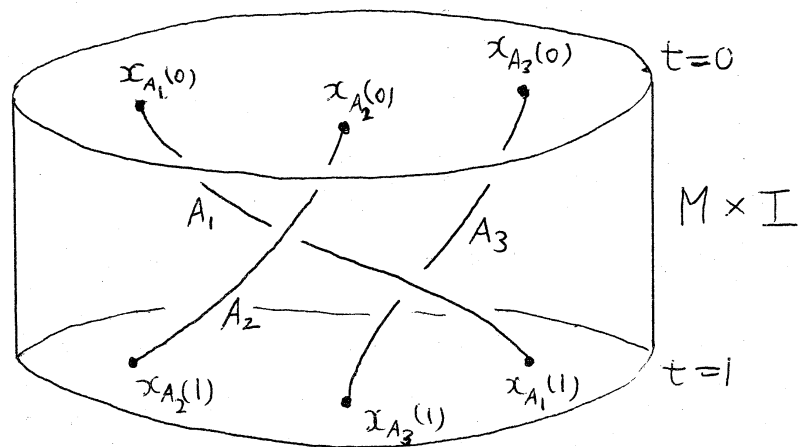


図 1

上の2つの定義は同値である。実際、geometric braid $A_1, \dots, A_n$ が与えられたとき、 $V_n(M)$ 内のループ $\{x_{A_1}(t), \dots, x_{A_n}(t)\}$ ($0 \leq t \leq 1$) は $B_n(M)$ の元を1つ定めた。逆に、 $\sigma \in B_n(M)$ に対し、 σ を表わす $V_n(M)$ 内のループとして $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ ($0 \leq t \leq 1$) の形のものがとれる。ここに、各 $x_i(t)$ は M 内の曲線である。このとき、 $M \times I$ 内の曲線 $A_i = \{(x_i(t), t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ の組は n 次 geometric braid を与え、従って定義2の意味の n 次 braid を定める。

例 $\mathbb{R}^2$ 内での3個の曲線 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ が図2左の様な軌跡を描いて動くとするとき、 $\gamma(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} \in V_3(\mathbb{R}^2)$ は $V_3(\mathbb{R}^2)$ 内のループとなり、3次 braid を定めた。これに対応する geometric braid は図2右となった。

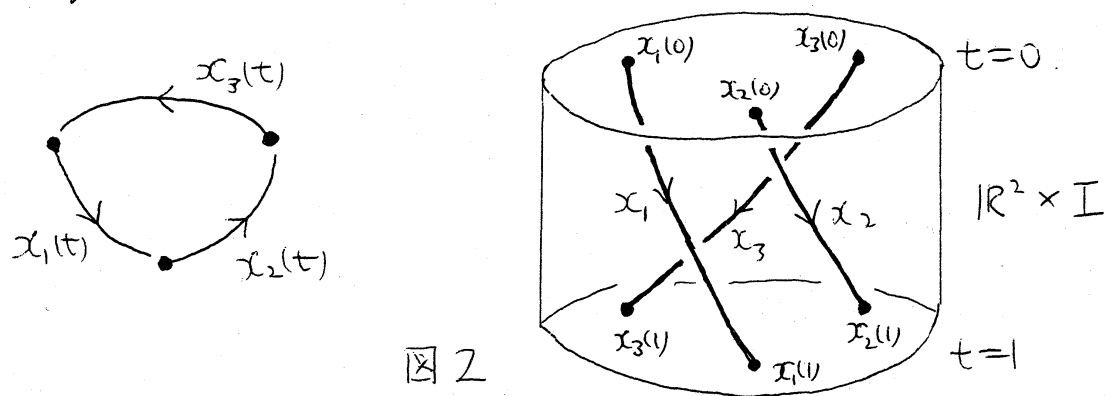
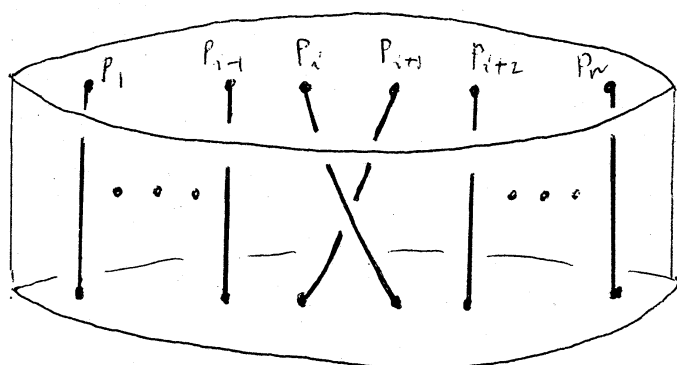
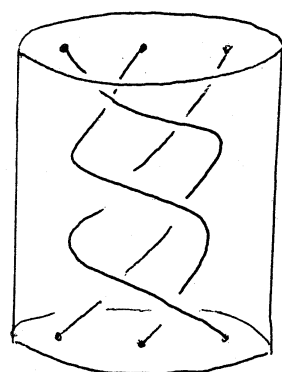


図2

$M = \mathbb{R}^2$, D^2 (閉円板) のとき、braid group の群構造は、Artin によって決定されている ([3, Th. 1.8, Cor. 1.8.4]). $i=1, \dots, n-1$ に対し、図3の geometric braid により定まる n 次 braid を σ_i とかく。

図3. braid σ_i 図4 θ_3

命題1. $M = \mathbb{R}^2, D^2$ のとき,

- (1) $B_n(M)$ は $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ を生成元にもつ有限生成群で、次の基本関係式をもつ。

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| > 1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

- (2) $B_n(M)$ の center $\{\sigma \in B_n(M) \mid \sigma \alpha = \alpha \sigma \text{ for } \forall \alpha \in B_n(M)\}$ は $\mathbb{Z}$ と同形で、 $\theta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$ が生成元である。

注 θ_n は、平面の 360° 回転から自然に定まる braid である。例えば、 θ_3 は図4に示されるものである。

さて、「周期点の braid」を定義しよう。以後、 $f: M \rightarrow M$ を smooth embedding で id とイソトピックなものとする。 f に対し、イソトピー $\{f_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ で $f_0 = \text{id}, f_1 = f$ をみたすものを1つ選んでおく。 f の周期点で最小周期 n をもつものを単に n -周期点 と呼ぶことにする。

定義3. $\gamma = \{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ を f の不変集合とすると
 γ を基点とする $V_n(M)$ 内の n -7°

$$f_t(\gamma) = \{f_t(x_1), \dots, f_t(x_n)\}$$

が定める n 次 braid を $b(\gamma)$ とかき. γ が定める braid とい
う。必要に応じて $b(\gamma)$ を $b(\gamma, f)$, $b(\gamma, \{f_t\})$ ともかく。

x_0 が f の n -周期点であるとき, $b(\text{orb}(x_0))$ を x_0 が定める braid といひ, $b(x_0)$ とかく。ここに, $\text{orb}(x_0)$ は x_0 の軌道を表わす。

例 f を Horseshoe 写像とし, イットセー f_t を図5の様
に選ぶ。このとき, 記号列 (011) に対応する f の 3-周期
軌道 $\gamma = \{x_1, x_2, x_3\}$ (図6) が定める braid $b(\gamma)$ は, 図7
が示す様に $\sigma_2 \sigma_1$ となる。

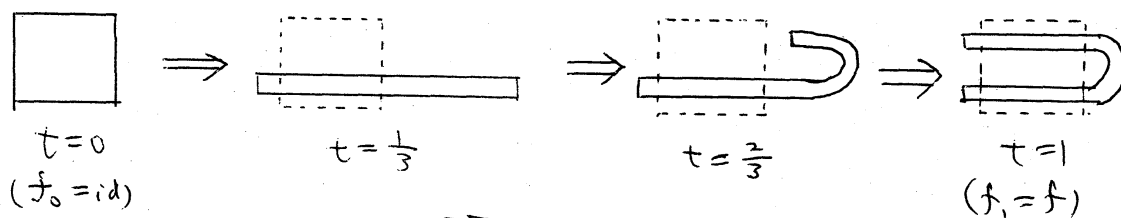


図5

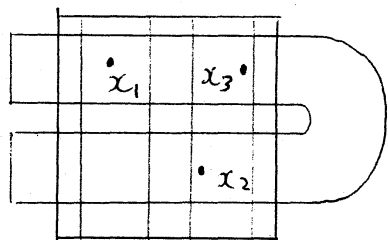


図6. 3-周期軌道
 $\gamma = \{x_1, x_2, x_3\}$

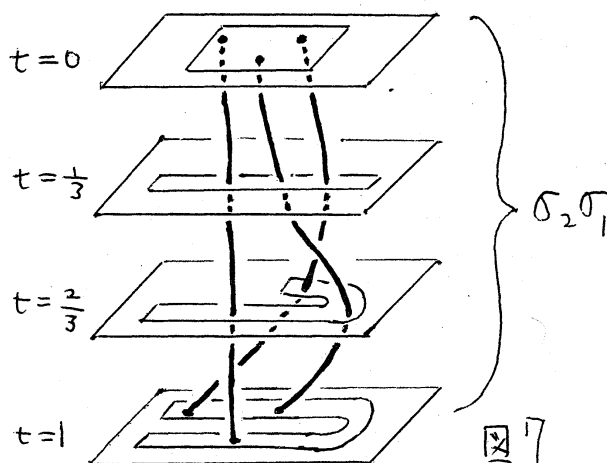


図7

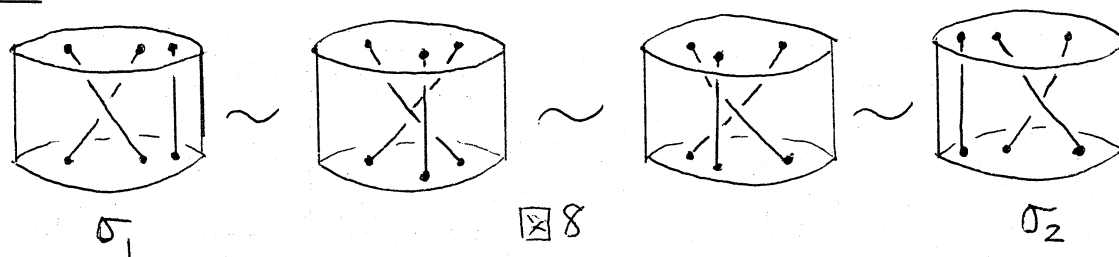
注意 $b(\gamma)$ の定義は、イソトピー $\{t_t\}$ の取り方に依存する。例えば、 $M = \mathbb{R}^2, D^2$ のとき、 $\{g_t\}$ を別のイソトピーとすると、 $\exists m \in \mathbb{Z}, b(\gamma, \{g_t\}) = \theta_n^m b(\gamma, \{f_t\})$ となる。

braid の定義では基点 γ_0 が固定されているので、周期点の分岐問題や次章で述べる周期点の順序などを考える際には扱いが不便である。そこで、braid の定義をゆきめし、基点 γ_0 によらない概念である「braid type」を導入する。

定義 4.

- (1) geometric braid の条件をみたしながら連続変形で移り合う2つの n 次 geometric braid は同値であるという。勿論変形において、基点は動いてもよい。
- (2) $\sigma \in B_n(M, \gamma_0), \sigma' \in B_n(M, \gamma'_0)$ が同値 ($\sigma \sim \sigma'$ とかく)
 $\iff_{\text{def}} \sigma, \sigma'$ を表す geometric braid $\{A_1, \dots, A_n\}, \{A'_1, \dots, A'_n\}$ が同値
- (3) $\sigma \in B_n(M, \gamma_0)$ の同値類を σ が定める braid type といい、 $[\sigma]$ とかく。

例 $B_3(\mathbb{R}^2)$ において、 $\sigma_1 \sim \sigma_2$ である。(図8参照)



次の命題は n 次 braid type 全体の集合が braid group の共役類の集合と同一視できる事を示す。

命題 2.

(1) $\sigma, \sigma' \in B_n(M, r_0)$ に対し

$\sigma \sim \sigma' \iff \sigma$ と σ' は共役,

i.e. $\exists \alpha \in B_n(M, r_0), \sigma' = \alpha \sigma \alpha^{-1}$

(2) $B_n(M, r_0) / \text{共役} \longrightarrow \{M \text{ 上の } n \text{ 次 braid type}\}$

$\downarrow$ $\downarrow$
 σ の共役類 $\longrightarrow [\sigma]$

は全単射

定義 5 不変集合 γ の braid $b(\gamma)$ が定める braid type $[b(\gamma)]$ を γ の braid type と呼び、 $\beta(\gamma)$ とかく。

容易にわかるように、不変集合の braid type は次の意味でパラメータの変化に対し不変である。

命題 3. $f_\mu : M \rightarrow M$ をイソトピーとし、 γ_μ を μ に関し連続な f_μ の不変集合で $\# \gamma_\mu = n$ を満たすとする。

$\implies \gamma_\mu$ の braid type $\beta(\gamma_\mu, f_\mu)$ は一定

この命題によって、周期点の braid type は、周期点の分枝について調べるときに有用な不変量であることがわかった。実

際, Sannami [29] は, braid type を用いて, Henon 写像の周期点の分岐について調べている。

注 周期点の braid type から knot が定まる。周期点の knot 型については, Holmes, Williams [5] による詳しい研究がある。([33], [34] など)

§2. braid の分類

ここでは, 力学系理論において重要な意味をもつ, braid の分類を与える。この分類はコンパクト曲面上の同相写像に関する Nielsen-Thurston の分類を通して行なわれる。まず Nielsen-Thurston 理論を簡単に紹介しよう。([10], [11], [32] など を参照)

定義6 コンパクト曲面 N 上の同相写像 $g: N \rightarrow N$ が reducible

$\iff \exists C_1, \dots, C_k : \text{disjoint essential curve s.t.}$

(i) $\forall i \neq j, C_i \not\sim C_j$

(ii) $\forall i, \exists j \text{ s.t. } g(C_i) \sim C_j$

ここに, essential curve とは, 1 点や ∂N の成分にホモトピックでない単純閉曲線, 「 $\sim$ 」はイソトピックを表す。 g が reducible でないとき, irreducible (既約) という。

定理1 (Nielsen-Thurston の分類定理)

$g: N \rightarrow N$ をコンパクト曲面 N 上の既約な同相写像とするとき、次のいずれか一方のみがなりたつ。

(i) g は 周期的 i.e. $\exists m \in \mathbb{N}$, $g^m \sim \text{id}$

(ii) g は pseudo-Anosov (pA) 型

i.e. $\forall C: \text{essential curve}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^m(C) \propto C$

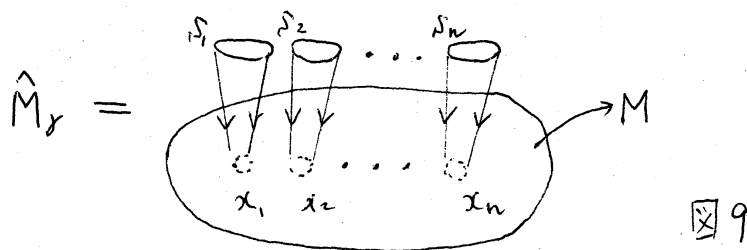
更に、 g が周期的 $\implies \exists g': N \rightarrow N$ 同相写像, $g \sim g'$, $(g')^m = \text{id}$

g が pA 型 $\implies g \sim \exists \text{ pA 写像 (定義省略)}$

上の g' や pA 写像を、 g の Nielsen-Thurston 標準形 という。

Nielsen-Thurston 標準形は、conjugacy を除いて一意に定まる。

braid の分類に入る前に、もう一つの準備として写像の「blow-up」について述べる。smooth embedding $f: M \rightarrow M$ の不変集合 $\gamma = \{x_1, \dots, x_n\}$ に対し、 $\hat{M}_\gamma$ または単に $\hat{M}$ で、 M の γ での blow up を表わす ([5])。 $\hat{M}_\gamma$ は M から γ を取り去って、代わりに n 個の単位円周 $S_1, \dots, S_n$ をくっつけたものである。(図9)。



f を $\hat{M}_\gamma$ に自然に拡張した写像を $\hat{f}_\gamma: \hat{M}_\gamma \rightarrow \hat{M}_\gamma$, または $\hat{f}: \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ とかき, f の γ での blow up と呼ぶ. $\hat{f}_\gamma$ は, S_i 上では次で定義された.

$$\hat{f}_\gamma|_{S_i}: S_i \rightarrow S_j, \quad \hat{f}_\gamma(v) = \frac{Df(x_i)v}{|Df(x_i)v|} \quad (v \in S_i)$$

ここに, j は $f(x_i) = x_j$ で定まるもので, $Df(x_i)$ は f の x_i での微分, S_i は $T_{x_i}M$ の単位円周とみなす.

例 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x$, $\gamma = \{0\}$ のとき, $\hat{f}_\gamma$ は図10に示されたような写像となる.

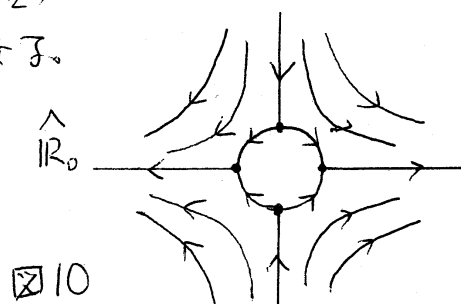


図10

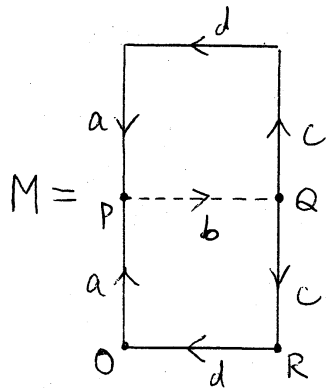
以上の準備の下, braid の分類に入った. 以後 M はコンパクトとする. $b \in B_n(M, \gamma)$ が任意に与えられたとする. b に対し, イソトピー $\varphi_t: M \rightarrow M$ で, $\varphi_0 = \text{id}$, $\varphi_1(\gamma) = \gamma$, $b(\gamma, \{\varphi_t\}) = b$ を満たすものを1つ選ぶ. このような φ_t が存在することは容易にわかる.

定義7 (braid の分類)

$b \in B_n(M)$ が 既約, 周期的, または, PA型

$\iff$ $(\varphi_1)_\gamma: \hat{M}_\gamma \rightarrow \hat{M}_\gamma$ がそれぞれ既約, 周期的, または PA型

例. $\sigma, \sigma_2^{-1} \in B_3(D^2)$ は PA 型であった。これを示すために $b(x, \{\varphi_t\}) = \sigma, \sigma_2^{-1}$ となる $\varphi_t: D^2 \rightarrow D^2$ を構成しよう。 $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ とし $M = T^2 / x \sim -x$ とおく。 M は $\mathbb{R}^2$ 内の長方形領域 $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ において 図11 に示した矢印の通り、辺 a, c, d を貼り合わせて得る空間と同一視される。 S^2 と同相である (図12)。



$$\begin{aligned} P &= (0, \frac{1}{2}) \\ Q &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ R &= (\frac{1}{2}, 0) \end{aligned}$$

図11

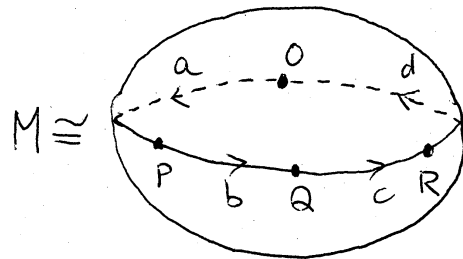


図12

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ が導く同相写像 $\varphi': M \rightarrow M$ は O を不動点としてもち、自然に同相写像 $\varphi: \hat{M}_0 \rightarrow \hat{M}_0$ に拡張される。 φ は辺 a, b, c, d を図13の様に移す。また、 $\hat{M}_0 \cong D^2$ である。

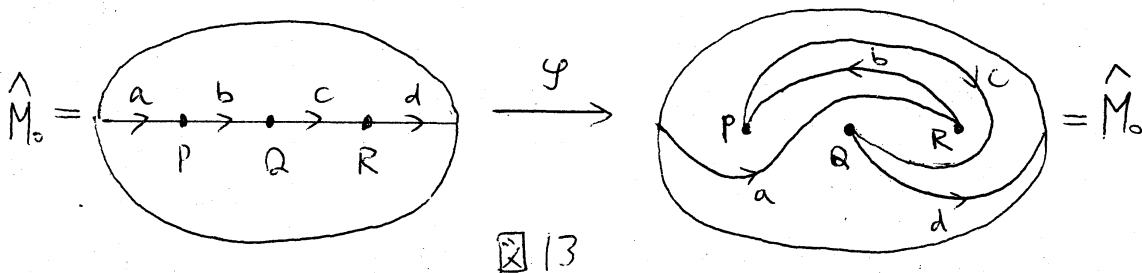


図13

よって $\gamma = \{P, Q, R\}$ と思えば、 $\varphi_0 = \text{id}$, $\varphi_1 = \varphi$ を与える適当なイソトピー $\varphi_t: \hat{M}_0 \rightarrow \hat{M}_0$ に対し、 $b(x, \{\varphi_t\}) = \sigma, \sigma_2^{-1}$ となることわかる。 また、 $(\varphi_t)_\gamma (= \hat{\varphi}_t)$ は T^2 上の Anosov 微分

同相写像から導かれる事を用いれば, PA型となることがわかる. よって, σ, σ_2 は PA型である. ([11, p.217])

定義8. $b \in B_n(M)$ が PA型であるとす. 定義7の $(\hat{\varphi}_b)_\mu$ にイソトピックな PA写像を $\Phi_b: \hat{M}_b \rightarrow \hat{M}_b$ とし, $\Psi_b: M \rightarrow M$ で, Φ_b から定まる同相写像を表す. また, b のトポロジカル・エントロピー $k(b)$ を $k(\Psi_b) (= k(\Phi_b))$ として定義する. Ψ_b の conjugacy class, 及び $k(b)$ は, b により一意に定まる.

Thurston [32], Asimov-Franks [1] による次の定理は, 上に述べた braid の分類の力学系理論における重要性を示す.

定理2. $f: M \rightarrow M$ を id とイソトピックな smooth embedding とし, γ を f の有限不変集合とする. このとき,

$k(\gamma)$ が PA型

$\Rightarrow$ (i) $k(f) \geq k(b) > 0$

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}, \# \{f \text{ の } p\text{-周期点}\} \geq \# \{\Phi_{b(f)} \text{ の } p\text{-周期点}\}$

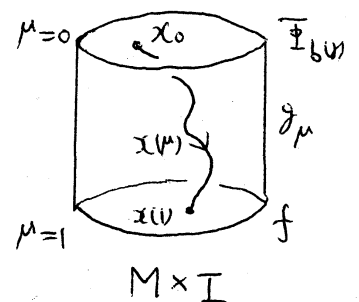
(iii) $\Phi_{b(f)}$ の任意の p -周期点 x_0 に

対し, $\Phi_{b(f)}$ から f へのイソトピー

g_μ ($0 \leq \mu \leq 1$) と, g_μ の p -周期点

$x(\mu)$ で $x(0) = x_0$ をみたす

ものが存在する.



この定理は、 PA 型周期点をもつ力は力学系的に複雑な写像であることを示し、更に、その複雑さは、少なくとも PA 写像の複雑さ以上であることを示している。

braid の分類に関する判定法として、以下に述べる結果が得られている。

定理3 (Boyland [6]).

n : 素数, $b \in B_n(D^2)$, $\text{perm}(b)$ が cyclic

$\Rightarrow$ (i) b は既約

(ii) $e(b) \not\equiv 0 \pmod{n-1}$, または $e(b) = k(n-1)$, $b^n \neq \theta_n^k$

$\Rightarrow b$ は PA 型

ここに、 $\text{perm}(b)$ は b に対応する置換, $e(b)$ は b の指数和 (即ち $b = \sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_r}^{e_r}$ と表わすとき, $e(b) = e_1 + \dots + e_r$)。

例 $\sigma_1, \sigma_2^{-1} \in B_3(D^2)$ に対応する置換は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ で cyclic だから、 σ_1, σ_2^{-1} は既約。また、 $e(\sigma_1, \sigma_2^{-1}) = 0$, $(\sigma_1, \sigma_2^{-1})^3 \neq \theta_3^0 (= \text{単位元})$ だから、 σ_1, σ_2^{-1} は PA 型。Horse-shoe 写像の 5-周期軌道で、記号列 $(00111), (00101)$ に対応するものの braid は、いずれも $\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4$ となるが、この指数和は 6 で、 $n-1=4$ の倍数でないから、これも PA 型である。

定理4 (Kobayashi [17]) $b \in B_n(D^4)$ を閉じておける link が、ソリッド・トーラスの中で graph link と同値でない
 $\Rightarrow b$ は PA 型の braid を部分として含む ([18], [19] も参照)

その他の結果

- (1) Benardete, Gutierrez, Nitecki [2] は $b \in B_n(D^4)$ が既約、周期的、または PA 型であることを判定するための完全なアルゴリズムを与えた。
- (2) Llibre, Mackay, Quaschi [16], [20] は genus が 0 または 1 である曲面に対し、エントロピーが 0 である braid を帰納的方法で決定した。
- (3) Huang [13], [14] は T^2 上で braid を分類している。

§3. braid type の シャルコフスキー型順序

ここでは、1次元写像の周期点の存在に関するシャルコフスキーの定理のアナロジーが、2次元微分同相写像について成り立つことを示す。この一般化において braid type の概念が本質的な役割を果たす。

まず、シャルコフスキーの定理を述べよう ([4], [30], [31] 参照)。自然数全体を次の順序に並べる。(これをシャルコフスキー順序という。)

$$3, 5, 7, 9, \dots, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \dots, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, \dots$$

$$\dots, 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1$$

定理5 (Sharkovskii) $I = \mathbb{R}, [0, 1]$ とする。 $f: I \rightarrow I$ を連続とする。このとき、 f が n -周期点をもてば、シャルコフスキー順序で n より右にある ν_m に対し、 f は m -周期点をもつ。

系 $f_\mu: I \rightarrow I$ ($0 \leq \mu \leq 1$) は連続で、 f_0 は周期点をもたず、 f_1 はすべての周期の周期点をもつとする。 μ を 0 から 1 まで動かすとき、初めて n -周期点が登場するパラメータ値を μ_n とかくとき、次が成り立つ。

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_{2^2} \leq \mu_{2^3} \leq \dots \leq \mu_{2^2 \cdot 7} \leq \mu_{2^2 \cdot 5} \leq \mu_{2^2 \cdot 3} \leq \dots$$

$$\dots \leq \mu_{2 \cdot 7} \leq \mu_{2 \cdot 5} \leq \mu_{2 \cdot 3} \leq \dots \leq \mu_7 \leq \mu_5 \leq \mu_3$$

(シャルコフスキー順序の逆の順序)

この系が示すように、シャルコフスキーの定理の2次元版を作ることができれば、2次元写像の分岐パターンへの構造に関する情報を得ることが出来る。

さて、2次元の問題に移ろう。次の集合を定義する。

$$BT_n(M) = \{ \beta : n\text{-次 braid type} \mid \text{perm}(\beta) \text{ が cyclic} \}$$

$$BT(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} BT_n(M)$$

E を次のいずれかとする。

$$\text{Emb}_0(M) = \{ f: M \rightarrow M \mid \text{smooth embedding} \mid f \sim \text{id} \}$$

$$\text{Diff}_0(M) = \{ f: M \rightarrow M \mid \text{diffeo} \mid f \sim \text{id} \}$$

$$\text{Diff}_0(M, \text{rel } \partial M) = \{ f \in \text{Diff}_0(M) \mid f = \text{id} \text{ on } \partial M \}$$

このとき、 $\text{BT}(M)$ の元の間にはチャルコフスキ-型順序「 $\geq$ 」が次で定義される。

定義 9. $\beta, \beta' \in \text{BT}(M)$ に対し、

$$\beta \geq \beta'$$

$\iff$ braid type が β である周期点をもつ写像 $f \in E$

は、必ず braid type が β' である周期点をもつ。

勿論、この定義を意味するものにすぎたわけには、順序集合 $(\text{BT}(M), \geq)$ の構造を決定する必要がある。構造の完全な決定は現時点では望むべくもないが、いくつかの部分的結果は得られていた。以下それをまとめる。braid type $\beta = [b]$ は、 b が既約、周期的、PA型であるに従って、それぞれ既約、周期的、PA型 と呼ぶことにする。

定理 6 (Boyland [9]) $(\text{BT}(M), \geq)$ は半順序集合である。

定理 7 (Boyland [6]) $\beta = [b]$ が PA型 ならば、

$$\{ \beta' \in \text{BT}(M) \mid \beta' \leq \beta \} = \text{bt}(\pi_b).$$

ここに $bt(\Sigma_b) = \{ \beta(\gamma, \Sigma_b) \mid \gamma: \Sigma_b \text{ の周期軌道} \}$.

特に $E = \text{Diff}_0(D^2, \text{rel } \partial D^2)$ ならば,

$\beta \geq$ 無限個の braid type

定義 10 対応 $BT(D^2) \times BT(D^2) \rightarrow BT(D^4)$ を次のやり方

$$\downarrow$$

 $(\beta, \beta') \longmapsto [\beta, \beta']$

で定義する.

$$\beta = \left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right], \quad \beta' = \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] \text{ かつ } [\beta, \beta'] = \left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right] \text{ かつ } \beta' \text{ の軌道が } \beta \text{ の軌道と交差する}$$

注 $[\dots[[\beta_1, \beta_2], \beta_3], \dots, \beta_k]$ を $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]$ とかくとき, 次が成り立つ ([8, p. 6]).

$\forall \beta \in BT(D^4), \exists \beta_1, \dots, \beta_k \in BT(D^2)$, 既約 s.t.

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k] \quad (\text{既約分解})$$

定理 8 (Boyland [8]) $\beta_0 \in BT(D^2)$ を既約とする. このとき.

$$(i) \beta \geq \beta' \Rightarrow [\beta_0, \beta] \geq [\beta_0, \beta']$$

$$(ii) \beta < [\beta, \beta_0]$$

$$(iii) \beta_0 \geq \beta' \Rightarrow [\beta, \beta_0] \geq [\beta, \beta']$$

順序 $\geq$ の具体的な計算が次の 2 つの論文で行なわれている.

命題 4 ([25]) $E = \text{Emb}_0(\mathbb{R}^2)$ とする。 $[\sigma_1^{i_1} \sigma_2^{-1} \dots \sigma_1^{i_d} \sigma_2^{-1}] \in BT_3(\mathbb{R}^2)$ を $\beta(i_1, \dots, i_d)$ とかくとき、

$$(1) \quad \beta(i_1, \dots, i_d) > [\sigma_1^j] \iff -d \leq j \leq i_1 + \dots + i_d$$

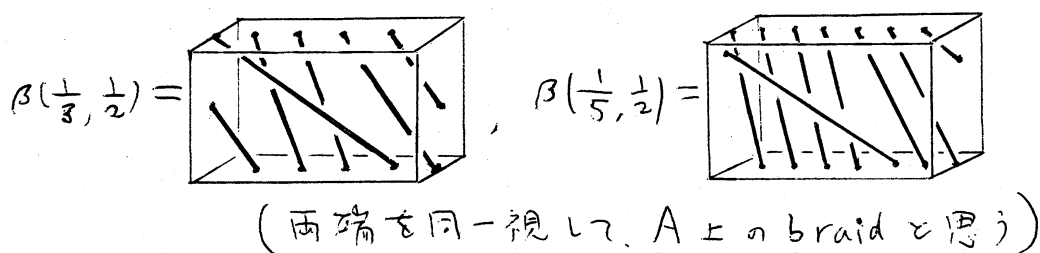
$$(2) \quad i \geq 3 \text{ とき, } \beta(i) > \beta(i-2), \theta_3 \cdot \beta(i-2)$$

$$(3) \quad \beta(1) > [\sigma, \sigma_2], [\sigma, \sigma_2]^{-1}$$

定理 9 (Boyland [7]) $A = \text{annulus}$ とし, $E = \text{Diff}_0(A)$ とする。
 $\forall a, b \in \mathbb{Q}, 0 < a < b < 1$, に対し, $BT(A)$ における元 $\beta(a, b)$ が定義されたが (定義は省略)、これに関し次が成り立つ。

$$\beta(a, b) \geq \beta(a', b') \iff (a, b) > (a', b')$$

例 $\beta(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) < \beta(\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$ である。ここに、



注 この章での話に関連した話題として次の結果が得られた。

定理 10 (Gambaudo [12], Matsumoto [22, Th. 0.1])

$f \in \text{Emb}_0(D^2)$ の任意の周期軌道 γ で周期 > 1 であるものに対し、 γ と link する f の不動点が存在する。

§4. braid group の Burau 表現の応用

ここでは $M = D^2, \mathbb{R}^2$ の場合に, braid group の Burau 表現を用いれば, φ の周期点の個数に関し詳しい情報が得られることを示す。

$M = D^2, B_n = B_n(D^2), \Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ とおく。 Λ は t, t^{-1} 上の Laurent 多項式環で

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \text{有限個の } i \text{ を除いて } a_i = 0 \right\}$$

である。

定義 11 (被約 Burau 表現) $R: B_n \rightarrow GL_{n-1}(\Lambda)$ を次で定義する。

$$R(\sigma_i) = R_i \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

ここに $GL_{n-1}(\Lambda)$ は Λ の元を成分とする $(n-1)$ 次正方行列で逆行列をもつものの全体のなす群で, R_i は次で与えられる。

$$R_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-3} \end{array} \right]$$

$$R_{n-1} = \left[\begin{array}{c|cc} I_{n-3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & t & -t \end{array} \right]$$

$i = 2, \dots, n-2$ に対し

$$R_i = \left[\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & t & -t & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array} \right]$$

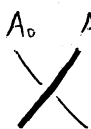
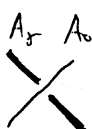
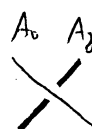
注 R_i の逆行列は次の様になる。

$$R_i^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} -t^{-1} & t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & I_{n-3} \end{array} \right] \quad R_{n-1}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} I_{n-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -t^{-1} \end{array} \right] \quad R_i^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|cc} I_{i-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} & t^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-2} \end{array} \right]$$

さて、 $\gamma = \{x_1, \dots, x_n\}$ を smooth embedding $f: D^2 \rightarrow D^2$ の不変集合とし、 x_0 を $\hat{f}_\gamma: \hat{D}_\gamma^2 \rightarrow \hat{D}_\gamma^2$ の不動点とする。このとき x_0 が γ に何回絡んでいるかを表す linking number $lk(x_0, \gamma)$ を次で定義する。

定義 12.

- (1) $x_0 \in D^2 - \gamma$ の場合: $b(\{x_0\}, \{f_t\})$ 及び $b(\gamma, \{f_t\})$ にそれぞれ対応する geometric braid を $\{A_0\}, \{A_1, \dots, A_n\}$ とする。 $A_\gamma = A_1 \cup \dots \cup A_n$ とおき A_0 と A_γ の各交点 P に対し、 $lk(P) \in \mathbb{Z}$ を次のように対応させる。([8, p.21])

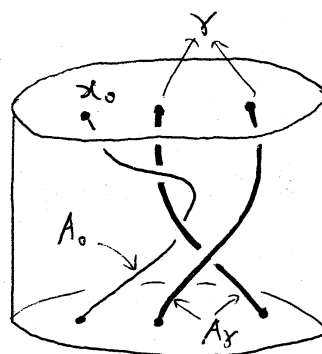
P のまわりの 状況	----->				
lk(P) の値	----->	0	0	-1	+1

このとき、 $lk(x_0, \gamma) = \sum_{P \in A_0 \cap A_\gamma} lk(P)$ と定める。

- (2) $\exists i, x_0 \in \beta_i$ の場合: f を少し修正すれば $x_0 \in D^2 - \gamma$ となるようにできるから、(1) で定めた値を $lk(x_0, \gamma)$ とする。

例. 図14の場合, A_0 と A_γ の2つの交差点の lk の値は0と1であるから, $lk(x_0, \gamma) = 1$ となる。

図14



f の周期点の個数の評価は, 次の定理から導かれる。

定理11 [23] $f \in \text{Emb}_0(D^2)$ とし, γ を f の有限不変集合とするとき, $\hat{f}_\gamma: \hat{D}_\gamma^2 \rightarrow \hat{D}_\gamma^2$ に対し, 次の成り立つ。

$$-\text{tr} R(b(\gamma)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ind}(N_i(\hat{f})) t^i$$

ここに, tr は行列のトレースを表し, $\text{Ind}(\cdot)$ は不動点指数である, また, $N_i(\hat{f}) = \{x \in \text{Fix}(\hat{f}) \mid lk(x, \gamma) = i\}$ 。

この定理は, $b(\gamma)$ の Burau 行列のトレースを計算すれば, 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し, γ と i 回絡む不動点の集合の不動点指数 (ある意味での個数) がわかることを示している。([27, (5.5)]を参照)

例 f を図15で表わされる generalized horse-shoe とする。

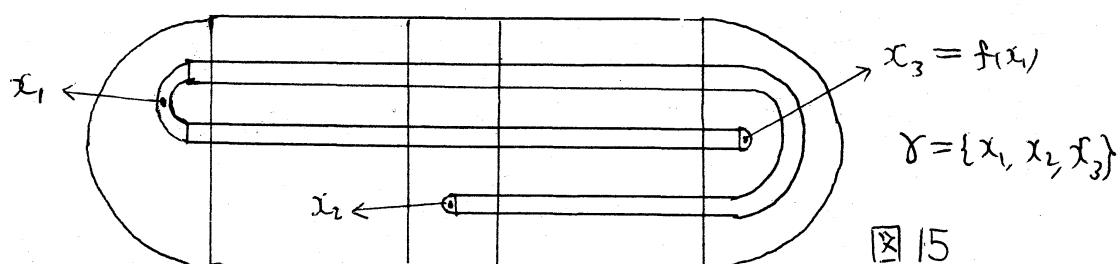


図15

これらの attractive な 1-周期軌道を γ とかくと, $b(\gamma) = \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ である。このとき

$$R(b(\gamma)) = R_1 R_2^{-1} = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t^{-1} \\ 1 & -t^{-1} \end{pmatrix}$$

だから, $-\text{tr} R(b(\gamma)) = t + t^{-1} - 1$ 。ゆえに

$$\text{Ind}(N_i(f)) = \begin{cases} 1 & i=1, -1 \\ -1 & i=0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となり, f は γ の linking number が 1, -1, 0 であった個の不動点をもつことがわかった。

定理11において Burau 表現というものが現れる理由を説明しよう。 f が generalized torse-shoe で次の条件を満たす場合を考えよう。

(i) 長方形領域 $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ が存在して, $D^2 = (Q_1 \cup \dots \cup Q_{n+1})$ では f は縮小写像である

(ii) $Q_{ij} = Q_j \cap f^{-1}(Q_i)$ の連結成分を $Q_{ij,1}, Q_{ij,2}, \dots, Q_{ij,a_{ij}}$ とかくとき, f は各 $Q_{ij,k}$ 上で線形

例えば, 図16で表わされる f は条件を満たし, $a_{11} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 1$, その他 $a_{ij} = 0$ である。(n-1)次行列 (a_{ij}) は f の構造行列となっている。 f の attractive な 1-周期軌道を γ とし, A_γ を γ が定めた geometric braid とする。各 θ_{ijk} と A_γ の linking number l_{ijk} を定義12と同様に定義する。

また $\Delta_{ijk} = \begin{cases} -1 & \text{f が不安定方向を逆向きに移す} \\ 1 & \text{同じ向きに移す} \end{cases}$

と置く。このとき、行列

$$\Gamma_f = \left(\sum_{k=1}^{a_{ij}} \Delta_{ijk} t^{l_{ijk}} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}$$

は Burau 行列 $R(b(\gamma))$ と一致することわかった。例えば、図16
 の場合 (この場合、 $b(\gamma) = \sigma_2$ である)。

$$\Delta_{111} = \Delta_{211} = \Delta_{231} = \Delta_{331} = 1, \Delta_{221} = -1$$

$$l_{211} = l_{221} = 1, l_{111} = l_{231} = l_{331} = 0$$

だから (図17 参照)、 $\Gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_2 = R(b(\gamma))$ となる。更に

$-\text{tr} \Gamma_f = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}(x) t^{\text{lk}(x, \gamma)}$ となる ($\because Q_{ijk} \cap \text{Fix}(f) = \{x_{ijk}\}$ であるが、このとき

$-\Delta_{ijk} = \text{Ind}(x_{ijk}), l_{ijk} = \text{lk}(x_{ijk}, \gamma)$ より)。

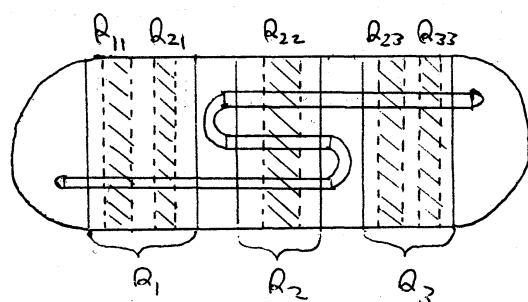


図16

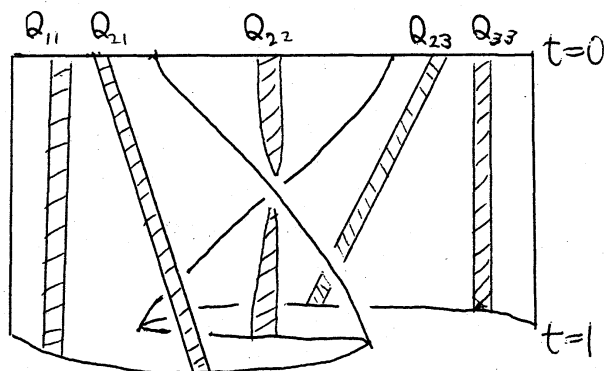


図17

$x \in N_i(\hat{f}^m)$ かつ i と m が互いに素ならば、 x は $\hat{f}$ の m -周期点である。また $\#\{\text{lk}(x, \gamma) \mid x \in \text{Fix}_x(\hat{f}^m), x \in S_1 \cup \dots \cup S_n\} \leq n$
 だから、定理11より f の周期点の個数に関し次がわかった。

系. $b \in B_n(D^2)$ に対し $r_i(b) \in \mathbb{Z}$ ($i \in \mathbb{Z}$) を次で定義する。

$$-\mathrm{tr} R(b) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i(b) t^i$$

このとき、次が成り立つ

$$\#\{\text{f の } m\text{-周期点}\}$$

$$\geq \#\{i \in \mathbb{Z} \mid r_i(b)m^m \neq 0, i \text{ は } m \text{ と素}\} - n$$

定理11を用いて、 $\mathbb{R}^2$ 上の embedding に関する次の定理を導くことができた。

定理12 [26] $f \in \mathrm{Emb}_0(\mathbb{R}^2)$, γ : f の不変集合, $\#\gamma = n$ とし, γ の元はすべて hyperbolic とする。このとき

$$m > 2n, r_i(b)m^m \neq 0, i \text{ と } m \text{ は互いに素}, i \not\equiv 0 \pmod{n}$$

$\Rightarrow$ f の m -周期点で、 γ との linking number が i であるものが存在する。

注 Huang - Jiang [15] は、定理11とその系をトーラス T^2 に拡張している。また、定理11のもかりやすい証明も与えている。最後に $\mathrm{tr} R(b)$ も具体的に計算した結果を紹介しよう[28]。 B_n について

$$p = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}, \quad p(i_1, \dots, i_d) = p \sigma_1^{i_1} \cdots p \sigma_1^{i_d}, \quad \theta = \theta_n$$

とあるとき、次の braid の表示法が得られる。

命題 5. $\forall b \in B_n, \exists i_1, \dots, i_d > 0, \exists m \in \mathbb{Z}$ s.t.
 $[b] = [\theta^m p(i_1, \dots, i_d)]$

注 上の $\{i_1, \dots, i_d, m\}$ は一意的でない。

braid type のこの表示法を用いて、Bourau 行列のトレースを次の様に計算することが出来る。

命題 6. $\text{tr } R(\theta^m p(i_1, \dots, i_d))$

$$= -(-t)^{d+mn(n-1)} \sum_{P, Q} \left\{ (-1)^{\#Q} (-t)^{\sum_{i \in Q} i_i} \prod_{p \in P} J_{i_p} \right\}$$

ここに、 $J_i = -t + t^2 - \dots + (-t)^{i-1}$ であり、和 $\sum_{P, Q}$ は次をみたす $P, Q \subset \{1, \dots, d\}$ すべてをわたる。

- (i) $P \cap Q = \emptyset, P \cup Q \neq \emptyset$
- (ii) $\forall p \in P$ に対し、 $1 \leq i \leq n-2$ s.t. $p+i \in P \cup Q$
- (iii) $\forall q \in Q$ に対し、 $q+1, \dots, q+n-2 \notin P \cup Q$
 $q+n-1 \in P \cup Q$

ただし、 $\{1, \dots, d\}$ における足し算は mod d で考える。

条件をみたす、 P, Q の取り方は、次のように存在するところか

りやすい。 d 個の箱を並べることにする。ただし

$$\left. \begin{array}{ll} i \in P \text{ のとき} & \text{斜線箱} \\ i \in Q \text{ のとき} & \text{山形箱} \\ i \notin P \cup Q \text{ のとき} & \text{空箱} \end{array} \right\} \text{の形の箱を選ぶとする。}$$

例えば $d=5$, $P=\{2\}$, $Q=\{3\}$ のとき、並べられる 5 個の箱は  となる。このとき、次が成り立つ。

命題 6 の条件 (ii)

$$\Leftrightarrow \text{斜線箱の後ろには高々 } (n-3) \text{ 個の空箱が続く}$$

条件 (iii)

$$\Leftrightarrow \text{山形箱の後ろには丁度 } (n-2) \text{ 個の空箱が続く}$$

例 $n=d=5$ のとき、可能な P, Q の選び方は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{斜線箱} \cdots 1 \text{ 通り} \\ \text{斜線箱} \quad \text{斜線箱} \quad \text{斜線箱} \quad \text{斜線箱} \quad \text{山形箱} \end{array} \right.$$

$\cdots$ 巡回置換を施したものを数えて、25 通り

の合計 26 通りある。

$-\text{tr} R(b)$ のある項の係数が正であれば、 b は PA 型の braid を含むから、命題 6 を用いて、PA 型 braid のあるクラスを見い出すことができる。また $b(\text{Fix}(t))$ となりうる braid の形を調べることができる。[28]

REFERENCES

1. D. Asimov and J. Franks: Unremovable closed orbits, *Geometric Dynamics, Lecture Notes in Math.* 1007(1983), Springer, 22-29. Revised version, preprint.
2. D. Benardete, M. Gutierrez, and Z. Nitecki: Braids and the Nielsen-Thurston classification, preprint.
3. J.S. Birman: Braids, Links, and Mapping Class Groups, *Ann. Math. Studies* 82, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.
4. L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz and L.S. Young: Periodic points and topological entropy of one dimensional maps, *Lecture Notes in Math.* 819 (1980), Springer, 18-34.
5. R. Bowen: Entropy and the fundamental group, *The Structure of Attractors in Dynamical Systems, Lecture Notes in Math.* 668 (1978), Springer, 21-29.
6. P. Boyland: Braid types and a topological method of proving positive entropy, preprint.
7. P. Boyland: An analog of Sharkovski's theorem for twist maps, *Hamiltonian Dynamical Systems, Contemporary Math.* 81 (1988), A.M.S., 119-133.
8. P. Boyland: Braid types of periodic orbits for surface homeomorphisms, *Notes on Dynamics of Surface Homeomorphisms, Lecture Notes*, (1989), Warwick Univ., 1-50.
9. P. Boyland: Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms, preprint.
10. A.J. Casson and S.A. Bleiler: Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston, *London Math. Soc. Student Texts* 9, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
11. A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru: *Travaux de Thurston sur les surfaces*, *Asterisque* 66-67, Soc. Math. France, 1979.
12. J.M. Gambaudo: Periodic orbits and fixed points of a C^1 orientation-preserving embedding of D^2 , *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 108 (1990), 307-310.
13. H. Huang: Motions of curve and topological proof of Kra's results, abstract.
14. H. Huang: On homeomorphisms and braid types of surfaces, abstract.
15. H. Huang and B. Jiang: Braids and periodic solutions, *Topological Fixed Point Theory and Applications, Lecture Notes in Math.* 1411 (1989), Springer, 107-123.
16. J. Guaschi, J. Llibre, and R.S. MacKay: A classification of braid types for periodic orbits of diffeomorphisms of surfaces of genus one with topological entropy zero, preprint.
17. T. Kobayashi: Links of homeomorphisms of a disk and topological entropy, *Invent. Math.*, 80 (1985), 153-159.

18. T. Kobayashi: Links of homeomorphisms of surfaces and topological entropy, *Proc. Japan Acad.*, 60 (1984), 381-383.
19. T. Kobayashi: Links of embeddings of surfaces and topological entropy, *The Theory of Dynamical Systems and its Applications to Nonlinear Problems* (H.Kawakami ed.), World Sci. Publ., Singapore, 1984, 42-49.
20. J. Llibre and R.S. MacKay: A classification of braid types for diffeomorphisms of surfaces of genus zero with topological entropy zero, preprint.
21. S. Moran: *The Mathematical Theory of Knots and Braids: An Introduction*, North-Holland Math. Studies 82, North-Holland, Amsterdam, 1983.
22. S. Matsumoto: Flows of the solid torus and fixed point free homeomorphisms of the plane, preprint.
23. T. Matsuoka: The number and linking of periodic solutions of periodic systems, *Invent. Math.*, 70 (1983), 319-340.
24. T. Matsuoka: Waveform in the dynamical study of ordinary differential equations, *Japan J. Appl. Math.* 1(1984), 417-434.
25. T. Matsuoka: Braids of periodic points and a 2-dimensional analogue of Sharkovskii's ordering, *World Sci. Adv. Ser. in Dynam. Sys.* 1, World Sci. Publ., Singapore, 1986, 58-72.
26. T. Matsuoka: The number and linking of periodic solutions of non-dissipative systems, *J. Diff. Equations*, 76 (1988), 190-201.
27. T. Matsuoka: The number of periodic points of smooth maps, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 9 (1989), 153-163.
28. T. Matsuoka: in preparation.
29. A. Sannami: A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family, *Japan J. Appl. Math.*, 2 (1989), 291-330.
30. A.N. Sharkovskii: Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself, *Ukr. Mat. Z.*, 16 (1964), 61-71 (Russian).
31. P. Štefan: A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endmorphisms of the real line, *Commun. Math. Phys.*, 54 (1977), 237-248.
32. W.P. Thurston: On the geometry and dynamics of diffeomorphisms on surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 19 (1988), 417-431.
33. P.J. Holmes: Knots and orbit genealogies in nonlinear oscillators, *New Directions in Dynamical Systems* (T. Bedford & J. Swift eds.), London Math. Soc. Lecture Notes 127 (1988), Cambridge Univ. Press, 150-191.
34. P.J. Holmes: Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: Extended families and bifurcation sequences, preprint.