

Some distribution-free multivariate comparison procedures

九州芸工大 田 村 亮二

§ 1. 序

C 個の p -変量処理母集団 π_i ($i=1, \dots, C$) と対照母集団 π_0 の分布関数をそれぞれ $F_i(x) = F(x - \theta_i)$, $F_0(x) = F(x)$ とする。 $F(x)$ の連続性(または絶対連続性)は仮定するがその関数形は未知である。昨年のシンポジウムで次の多重比較[1]を考察した。与えられた定数ベクトル $Q' = (Q^{(1)}, \dots, Q^{(p)})$, $\forall Q^{(u)} \geq 0$ に対して, $Q' \theta_i = \Delta_i$ とし

- (1) $\Delta_i > 0$ のとき π_i は π_0 より better
 $\Delta_i \leq 0$ のとき π_i は π_0 より not better

という基準が定められているとき

- (2) $P_r[\forall \theta_i = 0 \text{ のとき } \pi_0 \text{ が best として select}] = 1 - \alpha$
 を満たし, π_0 より better なものと not better なものに分離せよ。筆者はこれに対して Rank procedure を提唱し, 正規分布 $F(x)$ の仮定で用いられる procedure との比較を行った。

今回は (1) の拡張である次の基準の下の問題を考察する。

与えられた g 個の定数ベクトル $\underline{a}_h = (a_h^{(1)}, \dots, a_h^{(p)})$, $\forall a_h^{(k)} \geq 0$
 $h=1, \dots, g$ に対して, $\underline{\Delta}' = (\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(g)})$, $\Delta^{(h)} = \underline{a}_h' \underline{\theta}$ とし,

$\Delta_i \leq \underline{0}$ ($\Delta_i = \underline{0}$ も含む), $i=1, \dots, C$ のとき π_0 は best

(3) $\Delta_i \geq \underline{0}$ ($\Delta_i = \underline{0}$ は含む) のとき π_i は π_0 より better

$\Delta_i \neq \underline{0}$ ($\Delta_i \geq \underline{0}$ の否定) のとき π_i は π_0 より not better

という基準が定められているとき

(4) $P_n[\forall \Delta_i = \underline{0} \text{ のとき } \pi_0 \text{ が best として select}] \geq 1-\alpha$

を満たし π_0 より better なものと not better なものに分離する
 procedure 如何。

さらに $g=1$ のときの結果と前回の結果との比較を試みる。

(昨年のシンポジウムで山本教授より示唆)

§ 2. 定義と補助定理

補助定理 1. p -変量の確率変数 X の cdf $F(x-\underline{\theta})$,

$\underline{a}_h$ ($h=1, \dots, g$) は与えられ p -ベクトルで $A' = [\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_g]$ の
 rank は g とする。そのとき $Y^{(h)} = \underline{a}_h' X$, $h=1, \dots, g$ の同時確
 率密度は $g(y-\underline{\Delta})$ の形で与えられる。ただし $\Delta^{(h)} = \underline{a}_h' \underline{\theta}$,
 $\underline{\Delta} = (\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(g)})$ 。

証明は初等的であるから略。なお $F(x)$ が共分散行列 Σ と
 もてば $g(y)$ の共分散行列は $A\Sigma A'$ に与えることも明らか。

この補助定理から我々の問題は次のように形式化される。

q -変量の処理母集団 π_i , その分布関数 $G_i(y) = G(y - \Delta_i)$,
 $(i=1, \dots, c)$. 対照 π_0 の分布関数 $G_0(y) = G(y)$ で $G(y)$ の
 連続性 (または絶対連続性) は仮定するがその関数形は未知.
 処理の良さについても基準は (3) で定められている. 今 G_j
 からの標本 $\{Y_{j1}, \dots, Y_{jn_j}\}$, $Y_{jd} = (Y_{jd}^{(1)}, \dots, Y_{jd}^{(q)})$,
 $d=1, \dots, n_j$, $j=0, 1, \dots, c$, $\sum_{j=0}^c n_j = N$ に基いて (4) を満たし
 π_0 より better なものと not better なものに分離する方法を
 求めること. 簡単のため

D_0 : 対照 π_0 が best であるという判定

$D_{i_1 \dots i_r}$: π_{i_p} ($p=1, \dots, r$) は π_0 より better で残りの
 π_{j_s} ($s=1, \dots, s$, $r+s=c$) は π_0 より not better という判定

とする.

定義 1.

$$(5) \quad n_j T_{Nj}^{(h)} = \sum_{d=1}^{n_j} Z(R(Y_{jd}^{(h)})), \quad j=0, 1, \dots, c, \quad h=1, \dots, q,$$

$R(Y_{jd}^{(h)})$ = h 成分全体 (個数は N) の中で $Y_{jd}^{(h)}$ の rank

$Z(1) < \dots < Z(N)$: $\Phi(x)$ (標準正規分布 $N(0, 1)$) からの大

きさ N の順序統計量

$$(6) \quad \begin{aligned} T_N^{(h)'} &= (\hat{T}_{N1}^{(h)}, \dots, \hat{T}_{Nc}^{(h)}) & h=1, \dots, q \\ \tilde{T}_{Ni}^{'} &= (\hat{T}_{Ni}^{(1)}, \dots, \hat{T}_{Ni}^{(q)}) & i=1, \dots, c \end{aligned}$$

$$\hat{T}_{Ni}^{(h)} = \left(\frac{n_0 n_i}{n_0 + n_i} \right)^{\frac{1}{2}} (T_{Ni}^{(h)} - T_{N0}^{(h)})$$

定義 2.

$$(7) \quad n_j \bar{Y}_{Nj}^{(h)} = \sum_{d=1}^{n_j} Y_{jd}^{(h)}, \quad d=0, 1, \dots, c, \quad h=1, \dots, q$$

$$(8) \quad \bar{Y}_N^{(h)'} = (\hat{\bar{Y}}_{N1}^{(h)}, \dots, \hat{\bar{Y}}_{Nc}^{(h)}) \quad h=1, \dots, q$$

$$\bar{Y}_{Ni}' = (\hat{\bar{Y}}_{Ni}^{(1)}, \dots, \hat{\bar{Y}}_{Ni}^{(q)}) \quad i=1, \dots, c$$

$$\hat{\bar{Y}}_{Ni}^{(h)} = \left(\frac{n_0 n_i}{n_0 + n_i} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{Y}_{Ni}^{(h)} - \bar{Y}_{N0}^{(h)}) / (\hat{Q}_h \hat{S} Q_h)^{\frac{1}{2}}$$

$\hat{S}$ は Σ の一致推定量

補助定理 2. $\forall \Delta_i = Q$ のとき $\bar{T}_N^{(h)}$ の分布は exact に c -変量正規分布 $N(Q, \Lambda)$ である. $\bar{Y}_N^{(h)}$ は漸近的に $N(Q, \Lambda)$

$$\Lambda = [\lambda_{ij}], \quad \lambda_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ [\lambda_i \lambda_j / (\lambda_0 + \lambda_i)(\lambda_0 + \lambda_j)]^{\frac{1}{2}} & i \neq j \end{cases}$$

$$\lambda_j = n_j / N.$$

証明. $\bar{T}_N^{(h)}$ については Bell-Doksum [1] から. また $\bar{Y}_N^{(h)}$ については中心極限定理と Mann-Wald [2] から.

補助定理 3. $\Delta_i = \hat{\Delta}_i / \sqrt{N}$, $\hat{\Delta}_i = (\hat{\delta}_i^{(1)}, \dots, \hat{\delta}_i^{(q)})$ のとき

$$(i) \quad \bar{T}_N^{(1)}, \dots, \bar{T}_N^{(q)} \text{ の同時分布は漸的に } N(\mu, \Lambda \otimes \Gamma)$$

$$(9) \quad \mu_i^{(h)} = \left(\frac{\lambda_0 \lambda_i}{\lambda_0 + \lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_i^{(h)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} \Phi^{-1}(G^{(h)}(y)) dG^{(h)}(y), \quad \mu = [\mu_i^{(h)}]$$

$$(10) \quad \sigma_{hk} = \begin{cases} 1 & h=k \\ \iint \Phi^{-1}(G^{(h)}(x)) \Phi(G^{(k)}(y)) dG^{(h,k)}(x, y) & h \neq k \end{cases}$$

$$\Gamma = [\sigma_{hk}]$$

$G^{(h)}, G^{(h,k)}$ は $G(\underline{\lambda})$ の h 成分, h, k 成分の周知分布.

(ii) $\underline{\gamma}_N^{(1)}, \dots, \underline{\gamma}_N^{(c)}$ の同時分布は漸近的に $N(\underline{\nu}, \Lambda \otimes \Delta)$

$$(11) \quad \underline{\nu}_i^{(h)} = \left(\frac{\lambda_0 \lambda_i}{\lambda_0 + \lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \underline{\delta}_i^{(h)} / (\underline{a}_h' \Sigma \underline{a}_h)^{\frac{1}{2}}, \quad \underline{\nu} = [\underline{\nu}_i^{(h)}]$$

$$(12) \quad \omega_{hk} = \begin{cases} 1 & h=k \\ \underline{a}_h' \Sigma \underline{a}_k / (\underline{a}_h' \Sigma \underline{a}_h)^{\frac{1}{2}} (\underline{a}_k' \Sigma \underline{a}_k)^{\frac{1}{2}} & h \neq k \end{cases}$$

$$\Delta = [\omega_{hk}]$$

証明. $n_j S_{Nj}^{(h)} = \sum_{d=1}^{n_j} E[Z(R\gamma_{jd}^{(h)})]$

$$\underline{S}_N^{(h)'} = (\hat{S}_{N1}^{(h)}, \dots, \hat{S}_{Nc}^{(h)}) \quad , \quad \hat{S}_{Ni}^{(h)} = \left(\frac{n_0 n_i}{n_0 + n_i} \right)^{\frac{1}{2}} (S_{Ni}^{(h)} - S_{N0}^{(h)})$$

とあると, $\sqrt{N}(\underline{T}_{Nj}^{(h)} - \underline{J}_{Nj}^{(h)}) \xrightarrow{(P)} 0 \quad (N \rightarrow \infty)$ が Bell-Doksum

[1] によって示されている. かくて $\sqrt{N}(\underline{T}_N^{(1)}, \dots, \underline{T}_N^{(c)})$ と

$\sqrt{N}(\underline{S}_N^{(1)}, \dots, \underline{S}_N^{(c)})$ とは漸近的に同じ分布に従う. さらに

後者が漸的に $N(\underline{\mu}, \Lambda \otimes \Gamma)$ に従うことは田村[3]の結果

である. 重の代りにある条件を満たす H に対しても同様の結

果が得られる.

§3. Selection procedures.

Procedure N.

(13) $\underline{T}_{Ni} \leq \underline{z}_i, i=1, \dots, c$ ならば D_0 を採択せよ

$\underline{T}_{Ni\beta} > \underline{z}_i, \beta=1, \dots, r, \underline{T}_{Nj_r} \leq \underline{z}_i, \gamma=1, \dots, s, r+s=c$

ならば $D_{i_1 \dots i_r}$ を採択せよ

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{\underline{z}_1} \dots \int_{-\infty}^{\underline{z}_c} n(\underline{0}, \Lambda) d\underline{y} = 1 - \frac{\phi}{q}, \quad \underline{z}'_1 = (\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_c)$$

Procedure M

$$(15) \quad \begin{aligned} & \bar{Y}_{Ni} \leq \underline{z}_d, i=1, \dots, c \quad \text{ならば} \quad D_0 \quad \text{を採択せよ} \\ & \bar{Y}_{N\alpha\beta} > \underline{z}_d, \beta=1, \dots, r, \bar{Y}_{Nj\gamma} \leq \underline{z}_d, \gamma=1, \dots, s, r+s=c \\ & \quad \text{ならば} \quad D_{i_1 \dots i_r} \quad \text{を採択せよ.} \end{aligned}$$

定理 1. Procedure N では (4) は "strictly" に成立する
が Procedure M では漸近的にである。

証明. $P_r[\forall \underline{\Delta}_i = 0 \text{ のとき } \pi_0 \text{ が best として select}]$

$$= P_r[\bar{T}_{Ni} \leq \underline{z}_d, i=1, \dots, c \mid \forall \underline{\Delta}_i = 0]$$

$$= P_r[\bar{T}_N^{(h)} \leq \underline{z}_d, h=1, \dots, g \mid \forall \underline{\Delta}_i = 0]$$

Bonferroni の不等式から

$$\geq 1 - \sum_{h=1}^g P_r[\bar{T}_N^{(h)} \not\leq \underline{z}_d \mid \forall \underline{\Delta}_i = 0]$$

$$= 1 - g + \sum_{h=1}^g P_r[\bar{T}_N^{(h)} \leq \underline{z}_d \mid \forall \underline{\Delta}_i = 0]$$

$$= 1 - \delta \quad ((14) \text{ を用いた })$$

Procedure M では $P_r[\bar{T}_N^{(h)} \leq \underline{z}_d \mid \forall \underline{\Delta}_i = 0] \sim 1 - \frac{\delta}{g}$ である
ため (4) は strictly にではなく漸近的に成立。

定理 2. 各 Procedure で次式が漸近的に成立する。

$$(16) \quad P_r[\forall \underline{\Delta}_i \leq 0 \text{ のとき } \pi_0 \text{ が best として select}]$$

$$\geq 1 - \delta$$

証明. $\underline{\Delta}_i = \delta_i / \sqrt{N}$, $\delta_i \leq 0$ のとき証明すればよい。

定理 1 のときと同様にして,

$$\begin{aligned}
 (16) \text{の左辺} &= P_n[\forall \underline{T}_{Nk} \leq \underline{z}_d \mid \forall \underline{\Delta}_k = \underline{\delta}_k/\sqrt{N}, \underline{\delta}_k \leq \underline{0}] \\
 &\geq (1-q) + \sum_{h=1}^q P_n[\underline{T}_N^{(h)} \leq \underline{z}_d \mid \forall \underline{\Delta}_k = \underline{\delta}_k/\sqrt{N}, \underline{\delta}_k \leq \underline{0}]
 \end{aligned}$$

補助定理 3 より

$$\sim (1-q) + q \int_{-\infty}^{\underline{z}_d} \cdots \int_{-\infty}^{\underline{z}_d} n(\underline{\mu}^{(h)}, \wedge) d\underline{y}$$

$$\underline{\mu}^{(h)} = (\mu_1^{(h)}, \dots, \mu_c^{(h)}) \leq \underline{0}$$

$$\geq (1-q) + q \int_{-\infty}^{\underline{z}_d} \cdots \int_{-\infty}^{\underline{z}_d} n(\underline{0}, \wedge) d\underline{y}$$

$$= 1 - q$$

系 1. $G^{(h,k)}(x, y)$ が 平均ベクトル $\underline{0}$ (一般性を失わず),
共分散行列 $\begin{bmatrix} \underline{a}'_h \underline{\Sigma} \underline{a}_h & \underline{a}'_h \underline{\Sigma} \underline{a}_k \\ \underline{a}'_k \underline{\Sigma} \underline{a}_h & \underline{a}'_k \underline{\Sigma} \underline{a}_k \end{bmatrix}$ の正規分布のとき, 2つ

の Procedure は漸近的に同等である.

証明. 上の仮定の下では, (9) (10) から容易に

$$\mu_k^{(h)} = \left(\frac{\lambda_h \lambda_k}{\lambda_h + \lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_k^{(h)} / (\underline{a}'_h \underline{\Sigma} \underline{a}_h)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_{hk} = \underline{a}'_h \underline{\Sigma} \underline{a}_k / (\underline{a}'_h \underline{\Sigma} \underline{a}_h)^{\frac{1}{2}} (\underline{a}'_k \underline{\Sigma} \underline{a}_k)^{\frac{1}{2}} \quad h \neq k$$

とる, $\underline{T}_N^{(1)}, \dots, \underline{T}_N^{(q)}$ の漸近分布は $\underline{\bar{T}}_N^{(1)}, \dots, \underline{\bar{T}}_N^{(q)}$ のそれと同じになる.

§ 4. $q = 1$ のとき.

$q = 1$ の場合は勿論上述の特別な場合であるが, もう少し詳しく論ずることが出来る. またこの結果と前回の結果 [4] の比

較も考察する。 π_j からの標本を $\{Y_{j1}, \dots, Y_{jn_j}\}$ とする。

定義 3.

$$(17) \quad n_j T_{Nj}(H) = \sum_{d=1}^{n_j} Z(R(Y_{jd})) \quad , \quad j=0, 1, \dots, c$$

$Z(1) < \dots < Z(N)$: 既知の分布関数 $H(z)$ からの順序統計量

(§2 では $H(z) = \Phi(z)$ のときのみ問題にした)

$$\hat{T}_{N\hat{\lambda}_i}(H) = \left(\frac{n_0 n_{\hat{\lambda}_i}}{n_0 + n_{\hat{\lambda}_i}} \right)^{\frac{1}{2}} (T_{N\hat{\lambda}_i}(H) - T_{N0}(H)) / \sigma$$

$$\sigma^2 = \int_0^1 H^{-1}(t)^2 dt - \left(\int_0^1 H^{-1}(t) dt \right)^2$$

Procedure H

$$(18) \quad \begin{aligned} & \hat{T}_{N\hat{\lambda}_i}(H) \leq z_d, \quad i=1, \dots, c \quad \text{ならば } D_0 \text{ を採択せよ} \\ & \hat{T}_{N\hat{\lambda}_\beta}(H) > z_d, \quad \beta=1, \dots, r, \quad \hat{T}_{Nj_r}(H) \leq z_d, \quad r=1, \dots, g, \quad r+s=c \\ & \text{ならば } D_{\hat{\lambda}_1} \dots \hat{\lambda}_r \text{ を採択せよ} \end{aligned}$$

$$(19) \quad \int_{-\infty}^{z_d} \dots \int_{-\infty}^{z_d} n(\underline{z}, \wedge) d\underline{y} = 1 - \alpha$$

$H(z) = \Phi(z)$, $H(z) = Z$ にとつたときの Procedure をそれぞれ

Procedure H_N , H_r で表わす。

系 2. Procedure H_N は strictly に次式を満足する。 $H(z)$ が Bell-Doksum の条件 [1] を満たせば Procedure H は漸近的に (19) を満足する。

$$(19) \quad P_\pi[\forall \Delta_i = 0 \text{ のとき } \pi_0 \text{ が best に select}] = 1 - \alpha$$

証明. Procedure H_N に対しては補助定理 2 と定理 1 とが

5. 一般の H に対しては [1] と定理 2 から.

定理 3. $\Delta_i = \delta_i / \sqrt{N}$ のとき, $D_{i_1} \dots i_r$ が正しい確率は漸近的に次式で与えられる.

$$(20) \quad P_{i_1 \dots i_r}(H) \sim \int_{z_\beta - \mu_{i_1}}^{\infty} \dots \int_{z_\beta - \mu_{i_r}}^{\infty} \int_{-\infty}^{z_\beta - \mu_{j_1}} \dots \int_{-\infty}^{z_\beta - \mu_{j_s}} n(\underline{0}, \Lambda) d\underline{y}$$

$$(21) \quad \mu_i = \left(\frac{\lambda_0 \lambda_i}{\lambda_0 + \lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} H^{-1}(G(x)) dG(x) / \sigma$$

証明. $P_{i_1 \dots i_r}(H) = P[\hat{T}_{N i_\beta} > z_\beta, \beta = 1, \dots, r, \hat{T}_{N j_\gamma} \leq z_\beta$

$\gamma = 1, \dots, s, r+s=c \mid \Delta_i = \delta_i / \sqrt{N}, \delta_{i_\beta} > 0, \beta = 1, \dots, r$

$\delta_{j_\gamma} \leq 0, \gamma = 1, \dots, s]$

補助定理 3 を用いて参考の上の結果が得られる.

定理 4. 前回の Procedure W [4] の Procedure H に対する漸近相対効率 $e_{W, H}$ は

$$(22) \quad e_{W, H} = \left[\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} J(F(x)) dF(x) / \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} H^{-1}(G(y)) dG(y) \right)^2 \right]^2$$

で与えられる.

証明. (20) (21) と前稿の結果と比較すれば容易.

Procedure W と H の対応するものと比較すれば

(a) Normal score type

$J(t) = \Phi^{-1}(t), H(z) = \Phi(z)$ の場合で $e_{W, H_N} = 1$

(b) Wilcoxon type

$J(t) = t, H(z) = z$ の場合で, そのときは (22) から

$$(23) \quad e_{w, H_{12}} = (\underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a}) / (\underline{a}' \underline{B} \underline{a})$$

$$\underline{B} = [b_{hk}], \quad b_{hk} = \begin{cases} 1 & h=k \\ \frac{6}{\pi} \sin^{-1} \frac{p_{hk}}{2} & h \neq k \end{cases}$$

$$\underline{\Sigma} = [p_{hk}] \quad p_{hk} = 1$$

さて (23) は

$$e_{w, H_{12}} = (\underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a}) / [\underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a} - \sum_{h \neq k} a^{(h)} a^{(k)} \{ p_{hk} - \frac{6}{\pi} \sin^{-1} \frac{p_{hk}}{2} \}]$$

かくて $\forall p_{hk} \geq 0$ のとき $p_{hk} - \frac{6}{\pi} \sin^{-1} \frac{p_{hk}}{2} \geq 0$ となり

$e_{w, H_{12}} \geq 1$ を得る. $\forall p_{hk} \leq 0$ のときは同様に $p_{w, H_{12}} \leq 1$

文 献

- [1] Bell-Doksum : Some new distribution-free statistics.
A.M.S. 36 (1965) 203-214
- [2] Mann-Wald : On stochastic limit and order
relationships. A.M.S. 14 (1943)
- [3] Tamura : Multivariate nonparametric several-
sample tests. A.M.S. 37 (1966)
- [4] 田村亮二 : Some nonparametric methods for multi-
variate analysis. 数理解析研講究録 44 (1968)