

ある種の K3 曲面の自己同型について

京大 理 上野健爾

解析曲面 (即ち 2 次元コンパクト複素多様体, 以下曲面と
いうことにする) S は その標準束 K_S が解析的に自明であ
り, 不正則数 $\kappa(S, \mathcal{O}_S)$ が 0 のとき K3 曲面と呼ばれる。 $\mathbb{P}^3$
内の非特異 4 次曲面や 2 次元複素トーラスを自然な involution
で割った解析空間の minimal resolution による非特異モデル
(これを Kummer 曲面と呼ぶ) などがその例である。

K3 曲面 S は代数次元 $a(S)$ として 2, 1, 0 のすべての可能
な値をとり得る。また $a(S) = 2$, 即ち代数曲面である K3 曲
面の場合は $\text{Aut}(S)$ は無限群となる例が知られている。 ([4],
[5].) これは Fano による例で, $\mathbb{P}^3$ 内のある種の 4 次曲面が
登場するが, この例では位数 2 の自己同型が無数個あること
が示される。ここでは $a(S) = 2, 1$ のとき 無限位数の自己同
型が存在する K3 曲面の例を与える。 $a(S) = 0$ の時は吉原氏
(Example 4.1 の X_2)
による 2 次複素トーラスの例 [6] から対応する Kummer 曲面を

とすると、無限位数の自己同型をもつことが分かる。

K3 曲面の自己同型は常に離散的であることを注意しておく。 $\text{Aut}(S)$ が無限群となる K3 曲面は高次元複素多様体の代数次元やアルバネース次元による分類の時に大切な役割を占める。

§1. 種数 2 の曲線よりできる Kummer 曲面

以下 C は $\mathbb{C}$ 上定義された種数 2 の完備代数曲線とし、 C の Jacobi 多様体を $J(C)$ と記す。 $J(C)$ は 2 次元複素トーラスであるので $J(C)$ よりできる Kummer 曲面を $\text{Kum}(C)$ と記すことにする。 $\text{Kum}(C)$ はよく知られているように 32 個の非特異有理曲線を含んでいる。即ち アルバネース写像 $\varphi: C \rightarrow J(C)$ を C の hyperelliptic involution と $J(C)$ の自然な involution $z \mapsto -z$ と compatible になるようにとると $\varphi(C)$ の $J(C)/\langle 2 \rangle$ の像の $\text{Kum}(C)$ への引き戻しは $\mathbb{P}^1$ となっている。このとき $\varphi(C)$ は $J(C)$ の 2 等分点を丁度 6 個含んでいることに注意しておく。また $\varphi(C)$ を $J(C)$ の 2 等分点だけぞらしたのもも involution して不変であり、これは $\varphi(C)$ とは一致しない。従って $\varphi(C)$ と同様にして $\text{Kum}(C)$ 上に $\mathbb{P}^1$ を定める。このようにして 16 個の $\mathbb{P}^1$ が $\text{Kum}(C)$ 上にできる。また $J(C)/\langle 2 \rangle$ は $J(C)$ の 2 等分点に対応して 16 個の rational double points をもっており、その resolution より 16 個の $\mathbb{P}^1$ が

できる。このようにして resolution よりでてくる 16 個の IP^1 を E 曲線と呼び, $\varphi(C)$ より出てくる 16 個の IP^1 を L 曲線と呼ぶことにする。1 本の L 曲線は 6 本の E 曲線と交わることは, $\varphi(C)$ が丁度 6 個の 2 等分点を含むことより分かる。逆に 1 本の E 曲線は 6 本の L 曲線と交わることも分かる。実は 16 本の L 曲線と E 曲線とを次のように添数をつけることができることが知られている。(例えば [1], [2] を参照のこと.)

$$L_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} 1, & i \neq k, l = j \text{ または } i = k, l \neq j \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$1 \leq i, j, k, l \leq 4,$$

但し $L_{ij} \cdot E_{kl}$ は $Kum(C)$ 上での交点数を表わす。さらに L_{ij} や E_{kl} の自己交点数は -2 である。

さて $Kum(C)$ 上に D, D' という因子を

$$D = 2L_{11} + 2E_{41} + E_{21} + E_{31} + L_{42} + L_{43}$$

$$D' = 2E_{11} + 2L_{44} + L_{12} + L_{13} + E_{24} + E_{34}$$

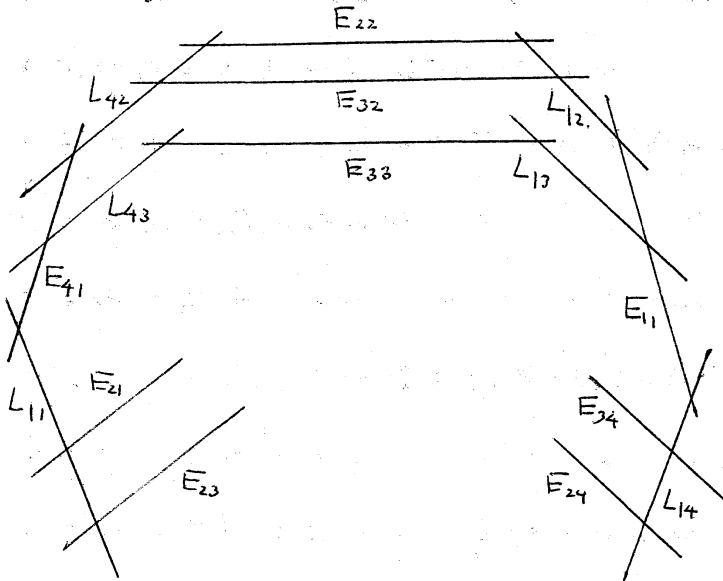
で定義する。これは

$$(*) \quad D^2 = D'^2 = D \cdot D' = 0$$

なる性質をもつ。しかも D, D' は Kodaira による elliptic surface の singular fibres の分類表によると I_1^* 型の singular fibre の configuration になっている。以下 $S = Kum(C)$ とおくことにする。

Riemann-Roch の定理によって $\dim |D| = 1$ であることが分か

り, $\pi_{|D|}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は elliptic surface になることもすぐ分かる。しかも (*) によつて D, D' は $\pi_{|D|}$ の singular fibres となっている。一方 E 曲線 E_{22}, E_{32} と D, D' との交点数を計算すると 1 となる。



このことより E_{22}, E_{32} は elliptic surface $\pi_{|D|}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ の holomorphic sections の, $s \in S$ によって与えられることが分かる。section の s を zero section と考えることによつて $\pi_{|D|}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は Kodaira [3] の意味で basic member となり, Kodaira の記号を使うと S は $S_0^\#$ の holomorphic section となっている。 $S_0^\#$ は S の開集合であり, $\mathbb{P}^1$ 上の group manifold になっている。 $\pi_{|D|}$ の regular fibre では $S_0^\#$ は s の fibre と一致し, singular fibres D, D' ではそれぞれ $L_{42} - \mathcal{P}_1 \simeq \mathbb{C}$, $L_{12} - \mathcal{P}_2 \simeq \mathbb{C}$ $\mathcal{P}_1 = L_{42} \cap E_{41}$, $\mathcal{P}_2 = L_{12} \cap E_{11}$ となっている。従つて $S_0^\#$ は D, D' に対応する fibre では有限位

数の non trivial な subgroup を持たない。 s をこれらの fiber に制限すると 0 ではない (E_{22} と E_{32} とは交わらない。 0 は $E_{22} \cap L_{12}$, $E_{22} \cap L_{12}$ に対応する) ので, ここでは無限位数となっている。

さて section 0 によって $S \in \mathbb{P}^1$ 上の楕円曲線 $\mathcal{E}$ をみることができる。このとき section s は $\mathcal{E}$ の $\mathbb{C}$ 有理点となる。従って $\mathcal{E}$ をこの $\mathbb{C}$ 有理点だけ平行移動すると, これは $\mathcal{E}$ の $\mathbb{C}$ 上定義された自己同型, 従って S の双有理写像を定めるが, これは S が極小モデルであることより双正則写像であることが分かる。即ち s は $\text{Aut}(S)$ の無限位数の元を与ええる。一方 E_{32} も $\mathbb{P}^1$ の section を与えていることが分かる。この用 $\mathcal{E}(E_{32})$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ はすべて異なることも容易に分かる。以上により, 次の結果を得る。

定理, 種数 2 の曲線 C に対応する Kummer 曲面 $\text{Kum}(C)$ は楕円曲面の構造をもつ。この楕円曲面は sections を無限個もち, 従って特に $\text{Kum}(C)$ は無限個の $\mathbb{P}^1$ を含んでいる。また $\text{Aut}(\text{Kum}(C))$ は無限位数の元を含む。

注意. 楕円曲面の構造は上の 1 種類ではなく決り入れうる。この E 曲線, L 曲線を使って簡単に示すことができる。

§2 代数次元1のK3曲面の自己同型

前節の記号を使って $\mathcal{Y} = \mathbb{P}^1$, $S = \text{Kum}(C)$ とおくことにする。

$\gamma: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は basic member であった。これより

$$0 \rightarrow R^1\gamma_*\mathbb{Z} \rightarrow R^1\gamma_*\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(S_0^\#) \rightarrow 0$$

であることが分かる。 $R^1\gamma_*\mathcal{O}$ は 可逆層であることもすぐ分かる。これより

$$\rightarrow H^1(\mathbb{P}^1, R^1\gamma_*\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^1, R^1\gamma_*\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(S_0^\#)) \rightarrow$$

なる exact sequence を得る。さて $H^1(\mathbb{P}^1, R^1\gamma_*\mathbb{Z})$ は discrete であり, spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^1, R^q\gamma_*\mathcal{O}_S) \Rightarrow H^{p+q}(S, \mathcal{O}_S)$$

は E_2 -項で退化することより

$$H^2(S, \mathcal{O}_S) \simeq H^1(\mathbb{P}^1, R^1\gamma_*\mathcal{O}_S)$$

即ち $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{P}^1, R^1\gamma_*\mathcal{O}_S) = 1$ となることより $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(S_0^\#))$ は無元位数の元々をもつ。すると $\gamma: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を γ によって twist した曲面 S^γ は代数次元1の楕円曲面となる。更に前節の σ に対してできた自己同型 σ は S^γ にも自然に作用する。従って次の結果が得られた。

命題 S^γ は代数次元1のK3曲面であり $\text{Aut}(S^\gamma)$ は無限位数の元を含む。

文献

- 1) Griffiths, P. and J. Harris. Principles of algebraic geometry. A. Wiley - Interscience Publication. New York 1978.
- 2) Hudson, R. W. H. T. Kummer's quartic surface. Cambridge University Press. 1905
- 3) Kodaira, K. On compact analytic surfaces II. Ann. of Math. 77 (1963), 563-626.
- 4) Matsumura, H and P. Monsky. On the automorphism of hypersurfaces. J. Math. Kyoto Univ. 3 (1964), 347-361.
- 5) Fano, G. Sopra alcune superficie del 4° ordine rappresentabili sul piano doppio. Rend. Reale Ist. Lombardo di Scienze e Lettere 39 (1906).
- 6) Yoshikawa, H. The structure of complex tori with the automorphism of maximal degree. Preprint.