

Poisson 方程式と静磁場方程式の外部境界値問題 に対する領域分割型結合解法

繁田 岳美 原山 卓也

茨城大学大学院理工学研究科

〒310-8512 茨城県水戸市文京 2-1-1

E-mail: shigeta@mito.ipc.ibaraki.ac.jp

概要

2次元 Poisson 方程式と静磁場方程式の外部境界値問題の数値解法を考えることを目的とする。外部領域 Ω を、ソース項あるいは電流密度の台を含むような有界部分領域 Ω_0 と、 Ω_0 の外側に広がる外部無限領域 Ω_1 とに分割する。有限要素法と境界要素法を、領域 Ω_0 と Ω_1 における問題にそれぞれ適用する。Dirichlet-Neumann 交代法に基づく反復解法を適用する。この反復解法の収束性と最適なパラメータの選択法を理論的に示し、数値計算を通して理論的結果の正当性を確認する。

1 はじめに

無限領域問題は、工学上よく遭遇する問題の1つである。本論文では、2次元無限領域における Poisson 方程式の境界値問題ならびに静磁場問題を、領域を分割して数値的に解く近似解法を述べる。

平面 $\mathbf{R}^2$ における滑らかな閉曲線 Γ_0 の外部領域を Ω とする。まず、最初に扱う問題は、次の Poisson 方程式の外部境界値問題である：

問題 1 既知関数 $f \in L^2(\Omega)$ と $g \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ に対して、以下を満たす $u \in H^1(\Omega)$ を求めよ：

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{on } \Gamma_0. \end{aligned}$$

ここに、台 $\text{supp } f$ はコンパクトと仮定する。

さらに、第2の問題を考える。2次元ベクトル値関数 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$ に対して

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

である。以下の関数空間を定義する：

$$\begin{aligned} H(\text{rot}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2; \text{rot } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}, \\ H(\text{div}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2; \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}. \end{aligned}$$

領域の内部を左側に見るように方向付けられた境界 Γ_0 に沿った単位接線ベクトルを $\boldsymbol{\tau}$ で表し、磁場 $\mathbf{H}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の間に関係式 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を仮定する。また、電流密度の台 $\text{supp } J$ はコンパクトとし、透磁率 μ は、簡単のため正定数と仮定する。このとき、次の外部静磁場問題を考える：

問題 2 既知の電流密度 $J \in L^2(\Omega)$ と磁場の接線成分 $\bar{H}_\tau \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$ に対して、以下を満たす磁場 $\mathbf{H} \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$ を求めよ：

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= J, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \bar{H}_\tau \quad \text{on } \Gamma_0. \end{aligned}$$

2 Dirichlet-Neumann 交代法とそれに基づく定式化

問題 1 や問題 2 の外部領域 Ω を有界領域で打ち切り, 有界領域内での解を求めることにする. そこで, 人工境界として $\text{supp } f$ や $\text{supp } J$ を内部に含む閉曲線 Γ_1 を与える. ただし, 境界 Γ_1 と Γ_0 との距離 $\text{dist}(\Gamma_1, \Gamma_0) > 0$ となるようにする. こうすることで, Ω は Γ_1 によって, 内部領域 Ω_0 と外部領域 $\Omega_1 := \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$ とに分割される. ここで, $i = 0, 1$ に対し, n_i, τ_i をそれぞれ Γ_1 上の Ω_i に対する外向き単位法線ベクトルと単位接線ベクトルとする (図 1). 我々の目的は, 問題 1 と 2 の解 $u, \mathbf{H}$ の Ω_0 への制限

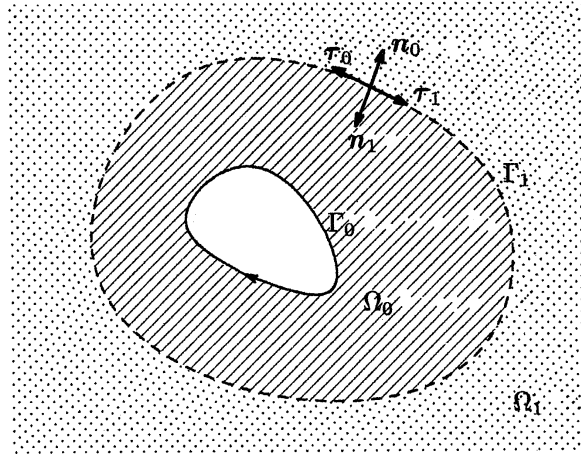


図 1: 領域分割

$u|_{\Omega_0}, \mathbf{H}|_{\Omega_0}$ を求めることである.

問題 1 の解法として, 次の Dirichlet-Neumann 交代法 (D-N 法) を考える [9]:

Step 1. 初期推定境界値 $\lambda^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ とえ, $k := 0$ とおく.

Step 2. 外部領域 Ω_1 における Laplace 方程式の Dirichlet 問題を解く:

$$\begin{aligned} \Delta u_1^{(k)} &= 0 & \text{in } \Omega_1, \\ u_1^{(k)} &= \lambda^{(k)} & \text{on } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Step 3. 内部領域 Ω_0 における Poisson 方程式の混合境界値問題を解く:

$$\begin{aligned} -\Delta u_0^{(k)} &= f & \text{in } \Omega_0, \\ \frac{\partial u_0^{(k)}}{\partial n_0} &= -\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial n_1} & \text{on } \Gamma_1, \\ u_0^{(k)} &= g & \text{on } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Step 4. 境界値を更新する:

$$\lambda^{(k+1)} = \alpha_k u_0^{(k)} + (1 - \alpha_k) \lambda^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_1.$$

ここに, パラメータ α_k は適切に選ばれた実数である.

Step 5. $k := k + 1$ とし, Step 2 へ戻る.

次に、問題 2 の解法を考える。外部領域 Ω_1 では、

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \quad (1)$$

が成立する。スカラー値関数 φ に対する

$$\operatorname{rot}^* \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^T$$

を用いて、 $\mu \mathbf{H} = \mathbf{B} = \operatorname{rot}^* A$ により関数 $A \in H^1(\Omega_1)$ を導入すると、式 (1) は Laplace 方程式

$$\Delta A = 0 \quad \text{in } \Omega_1$$

に帰着される。さらに、境界 Γ_1 上における関係式

$$\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n_1}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{\partial A}{\partial \tau_1}.$$

に注意する。関数 A の勾配のみを必要とし、 A の値そのものは必要としないので、上記 Laplace 方程式の問題に対して、 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ のとき、 $|A(\mathbf{x})| \rightarrow 0$ となる条件を課してもよい。

D-N 法を静磁場問題に応用して、問題 2 を解くために、次の手法が考えられる：

Step 1'. 初期推定境界値 $\lambda^{(0)} \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ を与え、 $k := 0$ とおく。

Step 2'. 外部領域 Ω_1 における Laplace 方程式の Neumann 問題

$$\begin{aligned} \Delta A_1^{(k)} &= 0 && \text{in } \Omega_1, \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial n_1} &= -\lambda^{(k)} && \text{on } \Gamma_1, \\ |A_1^{(k)}(\mathbf{x})| &\rightarrow 0 && \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

を解き、 $\partial A_1^{(k)} / \partial \tau_1|_{\Gamma_1}$ を求める。

Step 3'. 内部領域 Ω_0 における静磁場問題

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0^{(k)} &= \mathbf{J}, \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}_0^{(k)}) = 0 && \text{in } \Omega_0, \\ (\mu \mathbf{H}_0^{(k)}) \cdot \mathbf{n}_0 &= -\frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial \tau_1} && \text{on } \Gamma_1, \\ \mathbf{H}_0^{(k)} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \overline{H}_\tau && \text{on } \Gamma_0 \end{aligned}$$

を解き、 $\mathbf{H}_0^{(k)} \cdot \boldsymbol{\tau}_0$ を求める。

Step 4'. 境界値を更新する：

$$\lambda^{(k+1)} = \alpha_k (\mathbf{H}_0^{(k)} \cdot \boldsymbol{\tau}_0) + (1 - \alpha_k) \lambda^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_1.$$

ここに、パラメータ α_k は $0 < \alpha_k < 1$ を満たす実数である。

Step 5'. $k := k + 1$ とし、Step 2' へ戻る。

この手法を、ここでは静磁場 D-N 法と呼ぶことにする。

Poisson 方程式の D-N 法については、以下の性質が成り立つことが知られている [8]：

命題 1 (Yu, 1995) もし $0 < \alpha_k < 1$ を満たすならば、D-N 法により求められる $u_0^{(k)}$ は真の解 $u|_{\Omega_0}$ に収束する。

特に, 境界 Γ_0 と Γ_1 がそれぞれ半径 R_0 と R_1 のとき, 次の系が成り立つ.

系 1 (Yu, 1995) 最適なパラメータ α_{opt} は

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{R_1^2 + R_0^2}{2R_1^2 + R_0^2}$$

で与えられる.

境界 Γ_0 と Γ_1 がそれぞれ半径 R_0 と R_1 の円のとき, 上記命題の証明に習い, 静磁場 D-N 法について, 次の結果を得ることができる:

定理 1 もし $0 < \alpha_k < 1$ を満たすならば, 静磁場 D-N 法は収束する.

系 2 最適なパラメータ α_{opt} は

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{R_1^2 + R_0^2}{2R_1^2 + R_0^2}$$

で与えられる.

3 有限要素法と境界要素法の適用

数値計算において, Step 3 の内部問題を三角形 1 次節点要素を用いた有限要素法で解く. また, Step 3' の内部静磁場問題を, 三角形 1 次辺要素を適用した混合型有限要素法で解く [1], [3]–[5]. 三角形 1 次辺要素

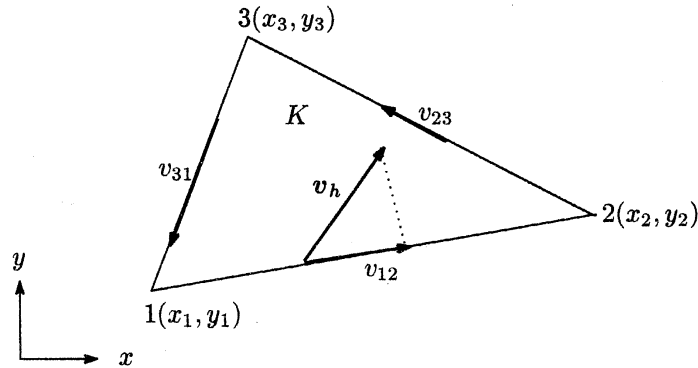


図 2: 辺要素

は, 面積が Δ の三角形要素 K において (図 2), 次式で与えられる:

$$\mathbf{H}|_K = \frac{1}{2\Delta} \sum_{(i,j,k)} h_{ij} l_{ij} \begin{pmatrix} y_k - y \\ x - x_k \end{pmatrix}.$$

ここに, 総和記号の添字は $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ をすべてとる. また, 節点 i の座標を (x_i, y_i) , 長さ l_{ij} の辺 ij での $\mathbf{H}$ の辺方向成分を h_{ij} で表す.

Step 2 の外部 Dirichlet 問題と Step 2' の外部 Neumann 問題を, 境界要素法を用いて解く [2], [6]. 内部問題の領域 Ω_0 の有限要素分割と整合するように, 境界 Γ_1 を線形境界要素を用いて分割する.

静磁場 D-N 法において, $\partial A_1^{(k)} / \partial \tau_1$ を, 境界要素解 $A_1^{(k)}(x_i)$ の差分で近似する. すなわち, 2 節点 x_i, x_{i+1} を端点とする長さ l_i の边上の点 x において,

$$\frac{\partial A_1^{(k)}(x)}{\partial \tau_1} \simeq \frac{A_1^{(k)}(x_{i+1}) - A_1^{(k)}(x_i)}{l_i}$$

とする.

接線成分 $\mathbf{H}_0^{(k)} \cdot \boldsymbol{\tau}_0$ は, (符号の違いを除いて) 辺方向成分 h_{ij} そのものに他ならない.

4 数値計算例

本節では、数値実験を通じて、Poisson 方程式や静磁場方程式に対する D-N 法の有用性を確認する。有用性の確認のためには、斉次方程式を扱ってよいので、簡単のため $f=0, J=0$ とする。

数値例題として、原点を中心とする半径 1 の円 Γ_0 の外部領域 Ω における以下の Laplace 方程式と静磁場方程式の境界値問題を考える：

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u &= \cos \theta & \text{on } \Gamma_0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} &= -\cos \theta & \text{on } \Gamma_0.\end{aligned}$$

ここに、 $\mu=1$ とし、 (r, θ) は $\mathbf{R}^2$ の極座標を表す。

原点を中心とする半径 3 の人工境界 Γ_1 を用いて、領域 Ω を内部領域 $\Omega_0 = \{(r, \theta); 1 < r < 3, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ と外部領域 $\Omega_1 = \{(r, \theta); r > 3, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ とに分割する (図 3 参照)。

図 4 に示されるように、領域 Ω_0 と境界 Γ_1 を、それぞれ三角形有限要素と境界要素とに分割する。

パラメータを $\alpha_k = 0.5$ ($k=0, 1, 2, \dots$) とし、初期推定値として、円 Γ_1 に沿って $\lambda^{(0)} = 0$ とする。

真の解は、それぞれ $u(r, \theta) = \cos \theta / r$, $\mathbf{H}(r, \theta) = (-\sin 2\theta / r^2, \cos 2\theta / r^2)$ である。真の解 u の等値線と真の解 $\mathbf{H}$ のベクトルを図 5, 6 に、数値解を図 7, 8 にそれぞれ示す。真の解と数値解を比較することで、良い数値結果が得られていることがわかる。

初期推定値 $\lambda^{(0)}$ を 0 と $\sin \theta$ としたときの $\lambda^{(k)}(\theta)$ を、中心角 θ に対して、 u に対する真の $\lambda(\theta) = u(3, \theta) = \cos \theta / 3$ や、 $\mathbf{H}$ に対する真の $\lambda(\theta) = \mathbf{H}(3, \theta) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = \cos \theta / 9$ と共に図示する (図 9-12)。これらの図から、初期推定値の取り方によらず、 $\lambda^{(k)}$ は真の λ に収束することがわかる。また、パラメータ α_k が 0.5 付近のとき、収束は速いことがわかる。なお、最適なパラメータは図 13, 14 より $\alpha_{\text{opt}} = 0.6$ である。これは系 1, 系 2 の α_{opt} の選び方と一致する。

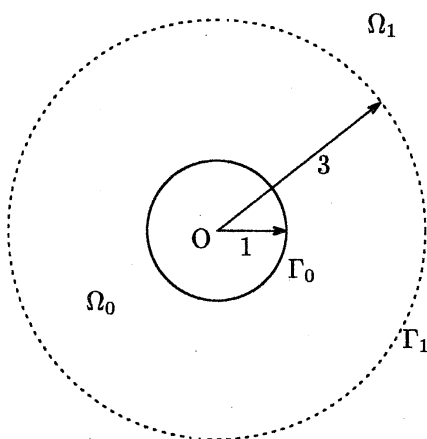


図 3: 領域分割

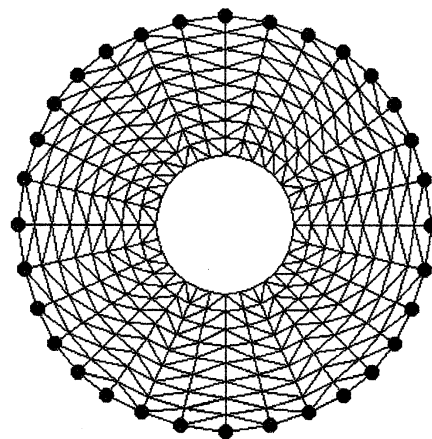
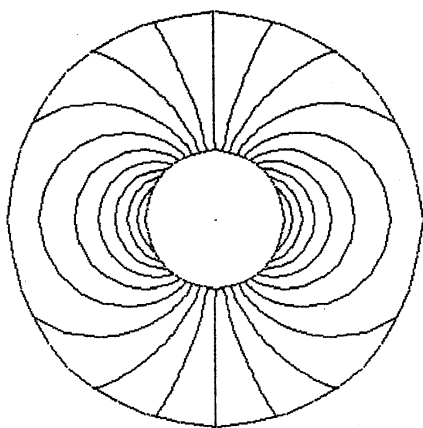
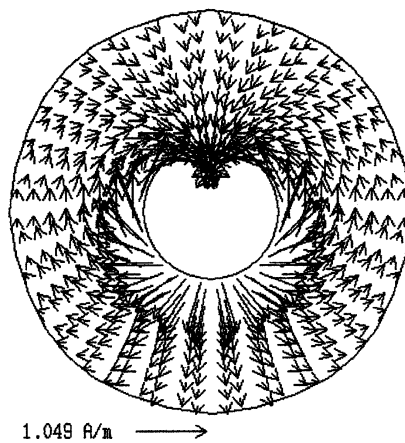
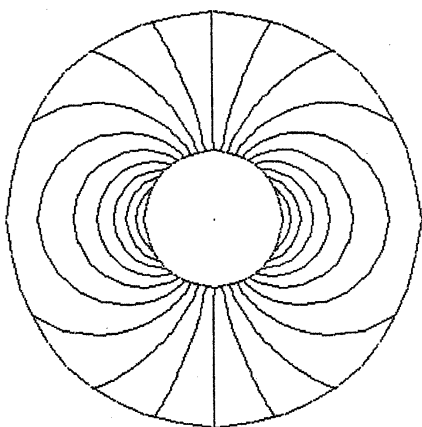
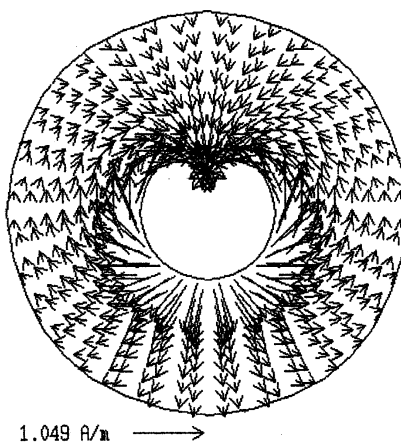
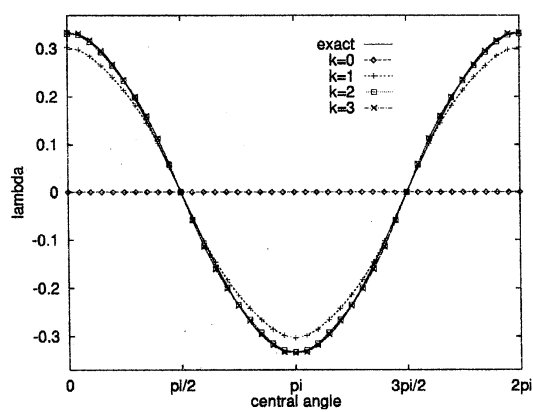
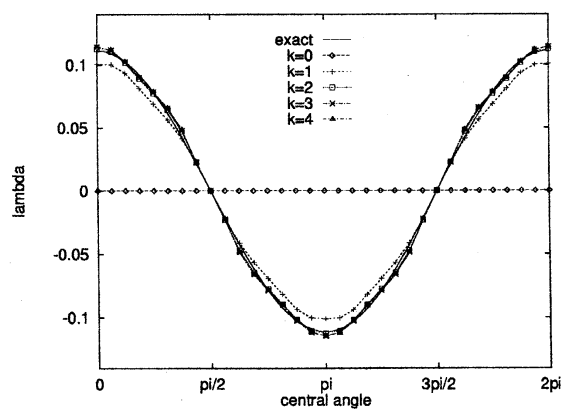
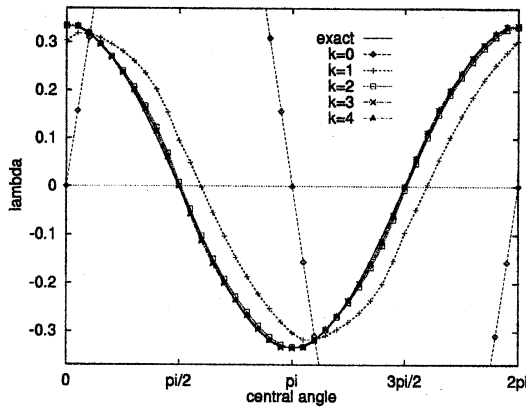
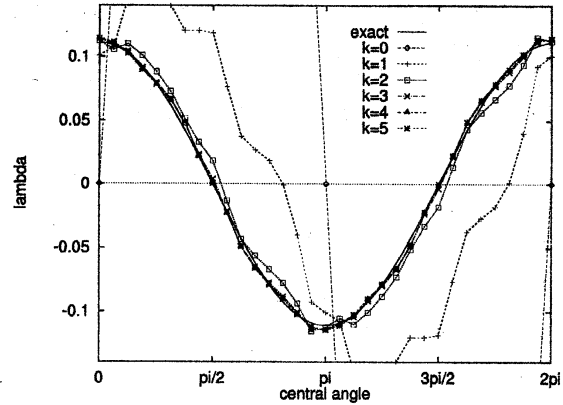
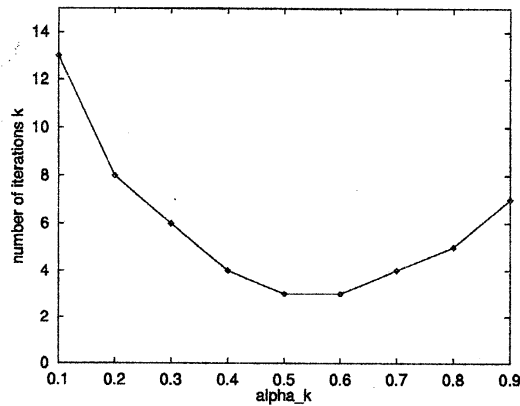
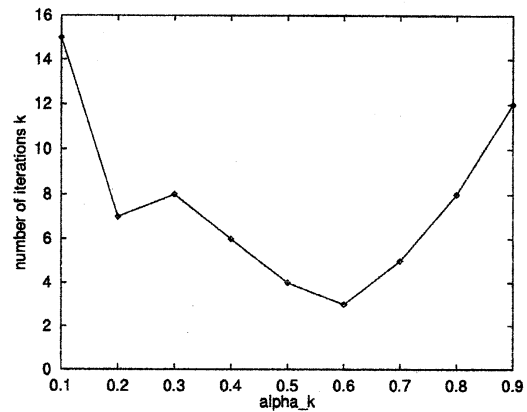


図 4: 有限要素と境界要素
(512 有限要素, 32 境界要素)

図 5: 真の解 u 図 6: 真の解 H 図 7: 数値解 $u_0^{(3)}$ 図 8: 数値解 $H_0^{(4)}$ 図 9: $\lambda^{(k)}$ と $\lambda (\lambda^{(0)} = 0)$ 図 10: $\lambda^{(k)}$ と $\lambda (\lambda^{(0)} = 0)$

図 11: $\lambda^{(k)}$ と $\lambda(\lambda^{(0)} = \sin \theta)$ 図 12: $\lambda^{(k)}$ と $\lambda(\lambda^{(0)} = \sin \theta)$ 図 13: 各 α_k に対する反復回数 $k(u_0^{(k)})$ 図 14: 各 α_k に対する反復回数 $k(H_0^{(k)})$

5 結論

Poisson 方程式の外部境界値問題の数値解法に基づき、静磁場方程式の外部問題の数値解法をも考えた。人工境界を用いて、外部領域を 2 つの領域に分割し、人工境界上の真の境界条件を反復法で求める手法を採用した。2 つの領域における問題を、それぞれ境界要素法と、節点要素や辺要素を用いた有限要素法で解いた。境界要素法は Laplace 方程式の外部問題の数値解法に向いている。また、辺要素は磁場の近似に適した要素である。このように各々の問題に適した既存の数値解法を流用していることが、本手法の利点である。また、数値計算を通じて、理論と数値結果は一致し、本手法は少ない反復回数で真の解に収束し、無限領域問題の数値計算法として有用であると考えられる。

今後の課題は、Steklov-Poincaré 作用素 [7] を用いた議論を基に、境界 Γ_0 と Γ_1 が共に円でない場合における収束性の証明と、最適なパラメータの理論的な選び方を決定することである。

参考文献

- [1] Girault, V. and Raviart, P.-A.: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag (1986).
- [2] 神谷紀生, 大西和榮: 境界要素法による計算力学, 森北出版株式会社 (1985).

- [3] Kikuchi, F.: Mixed formulations for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems, Japan J. Appl. Math., **6**, 209 (1989), pp. 209–221.
- [4] 菊地文雄: 有限要素法の数理, 培風館 (1994).
- [5] Nedelec, J. C.: Mixed finite elements in $\mathbf{R}^3$, Numer. Math., **35** (1980), pp. 315–341.
- [6] 登坂宣好, 中山司: 境界要素法の基礎, 日科技連 (1987).
- [7] Yu, D.: On relationship between Steklov-Poincare operators and natural integral operators and Green functions (*in Chinese*), Math. Numer. Sinica, **18**, 4 (1995), pp. 331–341.
- [8] Yu, D., Xue, W., and Huang, H.: A Dirichlet-Neumann alternating method in infinite domain: algorithm and convergence analysis, Research Report ICM-95-31, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences (1995).
- [9] Yu, D.: Discretization of non-overlapping domain decomposition method for unbounded domains and its convergence, Chinese J. Num. Math. & Appl., **18**, 4 (1996), pp. 93–102.