

Wild ramification of moduli spaces for curves or for abelian varieties

中央大学理工学部 関口 力

以下, $M_{g,l}, A_{g,l}$ をそれぞれ level l -structure を持つ, genus g の curve あるいは次元 g の principally polarized abelian variety のなす moduli scheme とし, 特に, $l=1$ のとき, $M_g = M_{g,1}, A_g = A_{g,1}$ と書くことにする。ここでは, 点 $x \in M_g, y \in A_g$ がそれぞれ curve C と principally polarized abelian variety P に対応しているとき, 点 x, y における剰余体 $k(x), k(y)$ が各々 C, P の field of moduli k_C, k_P に一致するか, という問題を扱う。この問題は, 標数 0 の場合, 簡単に肯定的に成り立つことがわかるが, 正標数の場合, 幾つかの否定的な例が生じてくる。このような否定的な例について述べることが目的である。その為に, 先ず, field of moduli の話から始めることにする。

§ 1. Field of moduli

以下, field of moduli に ついては, 小泉 [3] の特徴づけに基づく.

定義 1.1. Ω を与えられた universal domain とし, その部分体を k, l とする. k, l 上定義された geometric object を S, S' としたとき, それ等の geometric isomorphism $S \sim S'$ を $S \otimes_k \Omega \cong S' \otimes_l \Omega$ で定義する. 更に, 与えられた S に対し,

$$k_S = \bigcap_{S/k \sim S} k$$

としたとき, これが条件

$$\text{For } \forall \sigma \in \text{Aut}(\Omega), \quad S \sim S \iff \sigma|_{k_S} = \text{id}_{k_S}$$

を満たす. k_S を S の field of moduli と"う. 即ち, field of moduli と"うのは, geometric isomorphism class の member の field of definition の下極限として与えられるものであり, 概念として自然なものである.

定理 1.2. S が, (complete non-singular) curve あるいは polarized abelian variety ならば, k_S は S

の field of moduli である。

注意 (志村 [6] 参照.) S を curve ある $''$ は polarized abelian variety としたとき, 一般には, k_S 上の S の model は存在しない。

しかしながら, k_S は次の性質を持っている。

命題 1.3. k_S が S の field of moduli とするとき, k_S の適当な separable extension K を取れば, S は K 上の model を持つ。

以下, curve C に対応する点 $x \in M_g$, principally polarized abelian variety $P = (X, \lambda)$ に対応する点 $y \in A_g$ とし, 剰余体 $K(x), K(y)$ の標数を共に $p (> 0)$ とする。このとき, 次のことは簡単な結果である。

命題 1.4. k_C, k_P は各々, $K(x), K(y)$ の拡大体であり, 高々 purely inseparable である。

更に, 次のことが成り立つ。

定理 1.5. $l \geq 3, p \nmid l$ とし, y 上にある $A_{g,l}$ の点 y' をとり, $S'' = S' \times_S S' \xrightarrow[\pi]{\pi} S' = \text{Spec } K(y') \longrightarrow S = \text{Spec } K(y)$ とおくとき, 次は同値である。

(i) $k_P = K(y)$.

(ii) $K(y)/K(u)$: separable.

(iii) P^*P と P_2^*P は S'' 上同型である.

(iv) $\text{Isom}_{S''}(P^*P, P_2^*P) \longrightarrow S''$: flat.

実際に、以下で使うのは (i) と (ii) の同値であるが、これは命題 1.3 と X の l 分点の scheme X_l が X の定義体上 étale であることから明白である。(iii), (iv) については、もう少し議論が必要であるが、ここでは証明を省略する。尚、定理 1.5 の内容は curve についても同様に成り立つことを注意しておく。

Galois covering $\begin{array}{ccc} M_{g,l} & \longrightarrow & M_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X}' & \longrightarrow & \tilde{X} \end{array} \quad (l \geq 3, p \nmid l, g \geq 3) \text{ あり}$

で、その Galois group は $G = Sp_g(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ で与えられ、 $\tilde{X}'$ におけるその inertia group $G^I(\tilde{X}')$ は自然に $\text{Aut}(C)$ と同型である。Abelian variety については、 $A_{g,l} \longrightarrow A_g$ において、Galois group は $G = Sp_g(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ で与えられ、inertia group $G^I(\tilde{Y}')$ は自然に $\text{Aut}(E) / \{\pm 1\}$ と同型となる。ここで、 C または E の自己同型については、次のことが知られている。

命題 1.6. l を素数とする。

$$(i) \quad g \mid \# \text{Aut}(E) \implies g \leq 2g+1.$$

$$(ii) \quad g \mid \# \text{Aut}(E), E: \text{indecomposable} \implies g = 2g+1 \text{ 又は } g \leq g+1.$$

$$(iii) \quad g \mid \# \text{Aut}(C) \implies g = 2g+1 \text{ 又は } g \leq g+1.$$

尚, (iii) は本間の結果であることを注意しておく。この結果より次の系を得る。

系 1.7.

$$(i) \quad p > 2g+1, \text{ 又は } p+2g+1, p > g+1, E: \text{indecomposable} \implies R_E = K(g).$$

$$(ii) \quad p \neq 2g+1, p > g+1 \implies R_C = K(x).$$

この系より, 与えられた g に対し, 我々の問題が否定的な例を生ずる場合と云うのは, $p \leq 2g+1$ なる有限個の標数に限られることがわかる。

§ 2. P' の巡回拡大.

§ 1 の議論により, 我々の目的の爲には, 計算可能な位数 p の自己同型をもつ curve あるいは *principally polarized abelian variety* を捜さなければならぬ。そのようなもので一番単純なものは P' の p 次巡回拡大として与えられる curve であり, そのような curve について, Hasse [2] の結果から引用したいと思う。

以下, 考えるものはすべて標数 $p (> 0)$ の代
数閉体 k の上で考える。

$\tilde{C}$ を $\mathbb{P}^1$ の p 次の巡回拡大で与えられる (com-
plete non-singular) curve とすれば, これは次の方
程式 (2.1) で定義される plane curve C の normali-
zation で与えられる。

$$(2.1) \quad C: Y^p - B(X)Y = A(X),$$

$$\text{但し,} \quad B(X) = (X - \alpha_1)^{n_1(p-1)} (X - \alpha_2)^{n_2(p-1)} \cdots (X - \alpha_r)^{n_r(p-1)},$$

$$A(X) = (X - \alpha_1)^{e_1} (X - \alpha_2)^{e_2} \cdots (X - \alpha_r)^{e_r} \cdot G(X),$$

$$\deg G = Np - E, \quad X - \alpha_i \nmid G(X), \quad 1 \leq e_i \leq p-1, \quad 1 \leq n_i,$$

$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j).$$

ここで, $N = \sum_{i=1}^r n_i$, $E = \sum_{i=1}^r e_i$ である。この curve

$\tilde{C}$ の位数 p の自己同型 σ は

$$\sigma: Y \longmapsto Y + (X - \alpha_1)^{n_1} (X - \alpha_2)^{n_2} \cdots (X - \alpha_r)^{n_r}$$

で与えられる。

命題 2.1. $\tilde{C}$ を (2.1) で定義される curve とする。

(i) genus $g(\tilde{C})$ は

$$g(\tilde{C}) = \frac{p-1}{2} (Np - E + r - 2).$$

(ii) $H^0(\tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}}')$ の base は, 次で与えられる。

$$\prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{e_i} x^m y^n (dx/B),$$

但し, $m = 0, 1, \dots, p-1$, $e_i = e_i - 1 - \left\lfloor \frac{(m+1)e_i}{p} \right\rfloor$, $m = 0, 1, \dots$,
 $N(p-r-1) + r - E - 2 + \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{(m+1)e_i}{p} \right\rfloor$.

特に,

$$(*) \quad n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1 \quad \text{かつ} \quad e_1 = e_2 = \dots = e_r = p-1, \quad (r \geq 2)$$

のとき, $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_r)$ とおけば,

(iii) $H^0(\tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}}^j)$ の base は

$$x^j y^m (dx/B); \quad j = 0, 1, \dots, r-2, \quad m+n = p-2$$

($m, n \geq 0$) で与えられる.

この命題の条件(*)の下に, $\tilde{C}$ の Hasse-Witt 行列は簡単に計算され, 次の定理を得る.

定理 2.2. 条件(*) を満たす curve $\tilde{C}$ について, 形式的に $P(X)^{p-1} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} t_i X^i$ とおき,

$$D = \begin{vmatrix} t_{p-1} & t_{p-2} & \dots & t_{p-r+1} \\ t_{2p-1} & t_{2p-2} & \dots & t_{2p-r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{(r-1)p-1} & t_{(r-1)p-2} & \dots & t_{(r-1)p-r+1} \end{vmatrix}$$

とおくとき, $D \neq 0$ であり, $D \neq 0 \iff \tilde{C}$ の Jacobian variety $J(\tilde{C})$ が ordinary が成り立つ.

§ 3. Group action に関する簡単な注意.

簡単な計算により次の補題を得る.

補題 3.1. K を標数 p (>0) の体, V を K -vector space, σ を V の位数 p の自己同型とする。 V の $x_1, x_2, \dots, x_n$ に對し, 次は同値である。

(i) $x_1, x_1^\sigma, \dots, x_1^{\sigma^{p-1}}; \dots; x_n, x_n^\sigma, \dots, x_n^{\sigma^{p-1}}$: 1次独立。

(ii) $\sum_{i=0}^{p-1} x_1^{\sigma^i}, \sum_{i=0}^{p-1} x_2^{\sigma^i}, \dots, \sum_{i=0}^{p-1} x_n^{\sigma^i}$: 1次独立。

補題 3.2. K を標数 p (>0) の体, V を有限次元 K -vector space, σ を V の位数 p の自己同型とする。このとき, $K[[V]]$ の σ -不変素イデアル $\mathfrak{p}$ で, $K[[V]]/\mathfrak{p}$ の商体 $Q(K[[V]]/\mathfrak{p})$ が $K[[V]]^\sigma/\mathfrak{p} \cap K[[V]]^\sigma$ の商体 $Q(K[[V]]^\sigma/\mathfrak{p} \cap K[[V]]^\sigma)$ 上 inseparable extension となるものが存在する。但し, $K[[V]]^\sigma$ は $K[[V]]$ の σ -不変元全体からなる部分環を意味する。

実際, $V = \langle x, y \rangle$ とし, σ の作用が, $y \mapsto y+x, x \mapsto x$ であるとするれば, $K[[V]]^\sigma = K[[x, y^p - x^{p-1}y]]$ となり, $\mathfrak{p} = (x)$ とおけば, $K[[V]]/\mathfrak{p} \cong K[[y]], K[[V]]^\sigma/\mathfrak{p} \cap K[[V]]^\sigma = K[[y^p]]$ となつて, $Q(K[[V]]/\mathfrak{p}) / Q(K[[V]]^\sigma/\mathfrak{p} \cap K[[V]]^\sigma)$ が inseparable extension であることがわかる。一般の場合は, 容易にこの特別な場合に帰着するこゝが出来る。

更に, 後で使う為には次の定理を準備しておく

く,

定理 3.3. p を素数, n を与えられた自然数とし,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \in GL_{p+1}(\mathbb{Z}_p), \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in GL_p(\mathbb{Z}_p)$$

とおく, このとき, $A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ が $A^p = E$ を満たせば,

$$A \sim \begin{pmatrix} A_0 & & 0 \\ & A_0 & \\ 0 & & A_1 & \\ & & & A_1 & \\ & & & & E \end{pmatrix}$$

となる. ([1], Theorem 74.3 参照...)

§ 4. 標数 2 の体上の curve.

以下, $g \geq 3$ とし, すべて標数 2 の代数体 K 上で議論する. C を genus g の hyperelliptic curve, C の involution を σ とする. このとき, § 2 の議論を用いることにより, $H^1(C, \tilde{\Omega}_C^1)$ の base $\{a_1, a_2, \dots, a_{2g-1}; b_1, b_2, \dots, b_{g-1}\}$ で,

$$\sigma^* a_i = a_i \quad (i=1, \dots, 2g-1)$$

$$\sigma^* b_j = b_j + a_j \quad (j=1, \dots, g-2)$$

を満たすものが存在すること加わめる. g を 3 以上の奇数とし,

$$\begin{array}{ccc} M_{g,l} & \longrightarrow & M_g \\ \tilde{x}' & \longmapsto & \tilde{x} \end{array}$$

で、 x は C に対応する点とすれば、上の $=$ より

$\hat{\mathcal{O}}_{x'} = \hat{\mathcal{O}}_{x', M_{g,l}}$ の regular system of parameters

$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{g+1}; u_1, u_2, \dots, u_{g-2}; v_1, v_2, \dots, v_{g-2}\}$ で

$$\sigma^* v_i = u_i \quad (i=1, 2, \dots, g-2)$$

$$\sigma^* \omega_j \equiv \omega_j \pmod{m_{x'}^2} \quad (j=1, 2, \dots, g+1)$$

を満たすものの存在することがわかる。一方、

standard, $\mathbb{A}^1$ -cyclic により、level l -structure を持つ hyper-elliptic curve は $M_{g,l}$ 内で irreducible な non-singular subvariety をなすことがわかってゐる。従つて、

$\hat{\mathcal{O}}_{x'}$ において、hyperelliptic locus と定める prime ideal を $\mathfrak{f}$ とすれば、 $\mathfrak{f} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_{g-2} + v_{g-2})$ と

なることがわかる。ここで、 $\mathbb{Q}(\hat{\mathcal{O}}_{x'}/\mathfrak{f}) = \mathbb{Q}(\hat{\mathcal{O}}_{x'}^{\sigma^*}/\mathfrak{f}^{\sigma^*})$ とすれば、 $\hat{\mathcal{O}}_{x'}/\hat{\mathcal{O}}_{x'}^{\sigma^*}$ は $\mathfrak{f}$ において

unramified な拡大となり、 $(\hat{\mathcal{O}}_{x'})_{\mathfrak{f}} = (\hat{\mathcal{O}}_{x'}^{\sigma^*})_{\mathfrak{f}^{\sigma^*}}$ となる。

ところで、我々は $g \geq 3$ としてゐるので $=$ は有り得ない。従つて、 $\mathbb{Q}(\hat{\mathcal{O}}_{x'}/\mathfrak{f}) \supsetneq \mathbb{Q}(\hat{\mathcal{O}}_{x'}^{\sigma^*}/\mathfrak{f}^{\sigma^*})$ となり、pure inseparability の存在することがわかり次の定理を得る。

定理 4.1. $g \geq 3$ とし, 点 $z \in M_g$ を generic hyperelliptic curve D に対応する点, $P(D) = (J(D), \lambda(D))$ を D の principally polarized Jacobian variety とする。このとき, 次のことが成り立つ。

$$(i) \quad k_D \supsetneq K(z). \quad (ii) \quad k_D \supsetneq k_{P(D)}.$$

この系として容易に次を得る。

系 4.2.

(i) (A, m) を discrete valuation ring, $Q(A) = K$, $A/m = k$, C を K 上の curve, $P = (C, \lambda)$ を $S = \text{Spec } A$ 上の principally polarized abelian scheme とする。更に同型 $P(C) \simeq P_{\mathbb{A}^1} K$ が与えられておけるとする。この条件の下に, S 上の curve C' で $P(C') \simeq P$ となるものか, 一般には存在しない。

(ii) S を標数 2 の artin local ring の spectrum とし, C, C' を S 上の hyperelliptic curve とする。このとき, 一般に, 自然な morphism $\text{Isom}_S(C, C') \longrightarrow \text{Isom}_S(P(C'), P(C))$ は同型にならない。

§ 5. 標数 3 の体上の curve.

以下, k を標数 3 の体とし, $\tilde{C}$ を

$$Y^3 - B(X)Y = A(X),$$

但し, $B(x) = P(x)^2$, $A(x) = P(x)^2 G(x)$, $\deg G = 2$,

$$P(x) = (x-d_1)(x-d_2)\cdots(x-d_r), \quad (r \geq 3)$$

で定義される curve とする。このとき, 命題

2.1, (iii) により, $H^0(\tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}}^{\otimes 2})$ の base は

$$(5.1) \quad x^l P^m y^n \left(\frac{dx}{B} \right)^2, \quad l=0,1,\dots,2r-4, \quad m+n=2 \quad (m,n \geq 0)$$

で与えられる。σ を $\tilde{C}$ の位数 3 の自己同型で,

$Y \mapsto Y + P(x)$ で与えられるものとするとき,

$$(5.2) \quad \sum_{i=0}^2 \left(x^l y^2 \left(\frac{dx}{B} \right)^2 \right)^{(\sigma^i)^*} = 2 x^l P^2 \left(\frac{dx}{B} \right)^2 \quad (l=0,1,\dots,2r-4)$$

となる。一方, l を $l \geq 3$, $3 \nmid l$ となるようにとり,

$$\begin{array}{ccc} M_{g,l} & \longrightarrow & M_g \\ \downarrow \tilde{x}' & \longrightarrow & \downarrow \tilde{x} \end{array}$$

にありて, $\tilde{x}$ をこの curve $\tilde{C}$ に対応する点とする。但し, $g = 2(r-1)$ とする。このとき, (5.2)

が容易に $2r-3$ 個の 1 次独立な $H^0(\tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}}^{\otimes 2})$ の元

であることがわかるから, 補題 3.1 により,

σ の $\hat{\theta}_x = \hat{\theta}_{x, M_{g,l}}$ の作用が線型化されること

がわかる。従って, 補題 3.2 により次の結果が得られる。

定理 5.1. r を偶数とすれば, 標数 3 の体

上の genus g の curve C で, C に対応する M_g 上の点を x としたとき, $k_C \cong k(x)$ となるものが存在する。

§ 6. Ordinary abelian variety について

この節では, ordinary abelian variety に対し, Serre-Tate の定理を用いて我々の議論を展開する。その為にしばらく, Messing [4] の議論を引用する。

以下, p を与えられた素数とし, S を p を locally nilpotent として持つ scheme, S_0 を nilpotent quasi-coherent ideal $I \subset \mathcal{O}_S$ で定義される S の closed subscheme とする, (X_0, λ_0) を S_0 上の relative dimension g の principally polarized abelian scheme, $\bar{X}_0$ を X_0 に対応する Barsotti-Tate group とする。このとき,

$$\mathcal{L}(X_0, S_0 \hookrightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow S : \text{abelian scheme, } i: X \times_S S_0 \xrightarrow{\sim} S_0 \text{ なる} \\ \text{pair } (X, i) \text{ の同型類} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{L}((X_0, \lambda_0); S_0 \hookrightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow S : \text{abelian scheme, } \lambda: X \rightarrow \hat{X} : \text{polarization,} \\ i: X \times_S S_0 \xrightarrow{\sim} X_0, \lambda \times_S S_0 = \hat{i} \circ \lambda_0 \circ i \text{ なる triplet} \\ (X, \lambda, i) \text{ の同型類} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{L}(\bar{X}_0; S_0 \hookrightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow S, \text{ Barroetti-Tate group, } \iota: B_{\lambda_S S_0} \xrightarrow{\sim} \bar{X}_0 \\ \text{なる pair } (B, \iota) \text{ の同型類} \end{array} \right\}$$

とおく、このとき次を得る。

定理 6.1. (Serre-Tate) 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_0, S_0 \hookrightarrow S) &\longrightarrow \mathcal{L}(\bar{X}_0; S_0 \hookrightarrow S) \\ (X, \iota) &\longmapsto (\bar{X}, \bar{\iota}) \end{aligned}$$

は, bijection を与える。

以下, $(R, \mathfrak{m})$ を標数 p の Artin local ring, $k = R/\mathfrak{m}$: 代数閉体, $S_0 = \text{Spec } k \hookrightarrow S = \text{Spec } R$ とおく, $(X_0, \lambda_0) \in S_0$ 上の次元 g の principally polarized ordinary abelian variety とする。更に, $\bar{X}_0$ の étale part, toroidal part をそれぞれ G'_0, G''_0 とおく。このとき, λ_0 は次の同型 λ_1, λ_2 を定める:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_0 & \xrightarrow{\sim} & G'_0 \times G''_0 \\ \lambda_0 \downarrow & & \downarrow \lambda_1 \times \lambda_2 \\ \hat{\bar{X}}_0 & \xrightarrow{\sim} & \hat{G}''_0 \times \hat{G}'_0 \end{array}$$

λ_0 は symmetric であるから, $\lambda_1 = \hat{\lambda}_2, \lambda_2 = \hat{\lambda}_1$ が成り立つ。今, 同型 $\gamma_0: G'_0 \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^3$ を定めれば, $\rho_0 = \hat{\gamma}_0^{-1} \circ \lambda_2: G''_0 \xrightarrow{\sim} \mu^3$ が決まる。但し, $\mu = \varprojlim \mu_{p^n}$ である。これ等の同型により我々は次

の可換な図式：

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mu^3 & \longrightarrow & \bar{X}_0 & \longrightarrow & (\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \bar{\lambda}_0 & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mu^3 & \longrightarrow & \hat{X}_0 & \longrightarrow & (\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る。ここで、 σ_0 と (x_0, λ_0) の自己同型とすれば、 σ_0 は次の同型を導く：

$$(6.2) \quad \begin{array}{ccccc} \bar{X}_0 & \longrightarrow & G'_0 \times G''_0 & \xrightarrow{\gamma_0 \times \lambda_0} & (\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3 \times \mu^3 \\ \sigma_0 \downarrow & & \downarrow \sigma_1 \times \sigma_2 & & \downarrow \sigma_1' \times \sigma_2' \\ \bar{X}_0 & \longrightarrow & G'_0 \times G''_0 & \xrightarrow{\gamma_0 \times \lambda_0} & (\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3 \times \mu^3. \end{array}$$

尚、 σ_1', σ_2' は $GL_3(\mathbb{Z}_r)$ の元とせられる。又、 $\lambda_0 = \hat{\sigma}_0 \lambda_0 \sigma_0$ より、 $\tau_{\sigma_2'} = \sigma_1'^{-1}$ となる。 G'_0, G''_0 は各々一意的に S 上に拡張され、それ等を G', G'' とおくことにする。このとき、 γ_0, λ_0 も一意的に拡張され、 $\gamma_0: G' \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3$, $\lambda_0: G'' \xrightarrow{\sim} \mu^3$ を得る。従って、我々は次の自然な同型を得る。

$$(6.3) \quad \mathcal{L}(\bar{\lambda}_0; s_0 \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}((\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3 \times \mu^3; s_0 \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}'_R((\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3, \mu^3).$$

一方、 S 上の sheaf による帰納系 $\mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{f} \dots$ より、自然に完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_r^3 \longrightarrow \varinjlim \mathbb{Z}_r^3 \longrightarrow (\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3 \longrightarrow 0$$

を得る。これより同型

$$(6.4) \quad \delta_R: \text{Hom}(\mathbb{Z}_r^3, \mu^3) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}'((\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r)^3, \mu^3)$$

が得られる。尚, $\text{Hom}(\mathbb{Z}_p^g, \mu^g) \xrightarrow{\sim} \bigoplus^{g^2} \mu(R) = M_g(1+\pi)$.
従って, 定理 6.1 と (6.3), (6.4) を結びつける
ことにより同型

$$(6.5) \quad \mathcal{A}(X_0; S, \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} M_g(1+\pi)$$

を得る。この対応で, dual unity をとる操作は
丁度, 転置行列をとる操作に対応し, (6.1) より,
polarization λ_0 かつ上に伸びる為の必要十分
条件は, この (6.5) の対応で対称行列に対応す
ることであることがわかる。以上の議論をま
とめて次を得る。

定理 6.2. 自然な同型

$$\mathcal{A}((X_0, \lambda_0); S, \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} SM_g(1+\pi)$$

が存在する。更に, σ を (X_0, λ_0) の自己同型と
し, $\sigma_1', \sigma_2' \in GL_g(\mathbb{Z}_p)$ を (6.2) で定まる行列と
する。このとき, この対応で, σ の $SM_g(1+\pi)$ 上
への作用は,

$$A \longmapsto {}^{t\sigma_2'} A {}^{\sigma_1'} = {}^{\sigma_1'^{-1}} A {}^{t\sigma_1'} \quad (A \in SM_g(1+\pi))$$

で与えられる。但し, $U=(u_{ij}), V=(v_{ij}), A=(a_{ij}) \in M_g(\mathbb{Z}_p)$
に対し, ${}^U A, A^V$ を, ${}^U A$ の (i,j) -成分 $= \prod_{\ell=1}^g a_{\ell j}^{\mu_{i\ell}}$, A^V
の (i,j) -成分 $= \prod_{\ell=1}^g a_{i\ell}^{v_{\ell j}}$ で定義する。

この定理と定理 3.3 を結びつけることにより次を得る。

定理 6.3. p を素数, l を $l \geq 3$, $p \nmid l$ なる自然数とし, $(X_0, \lambda_0, \alpha_0)$ を level l -structure α_0 を持つ, 標数 p の体上の次元 g の principally polarized ordinary abelian variety とし, これに対応する $A_{g,l}$ 上の点を x とする。このとき, 位数 p の (X_0, λ_0) の自己同型 σ_0 の $\hat{C}_{x, A_{g,l}} = \hat{C}_x$ 上への作用は 11 で Γ 線型化される。

証明. 定理 3.3 と定理 6.2 より, $\sigma_0^{-1} = A_0$ または A_1 として証明すればよい。 $\sigma_0^{-1} = A_1$ の場合は $\sigma_0^{-1} = A_0$ の場合より容易なので, $\sigma_0^{-1} = A_0$ として議論することにする。上の議論において, $R = k[t]/(t^2)$, $S_0 = \text{Spec } k \hookrightarrow S = \text{Spec } R$ とおけば, $\hat{C}_x$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_x$ とおくと, 定理 6.2 より,

$$(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}((X_0, \lambda_0); S_0 \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} SM_g(1+t \in k)$$

となる。更に, $SM_g(1+t \in k)$ の元 $M = (m_i)$ に対し, σ_0 の作用は

$$\sigma_1^{-1} M^{\tau \sigma_1^{-1}} = A_0 M^{\tau A_0} = \begin{pmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,p-1} & (\prod_j m_{2,j})^{-1} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & \cdots & m_{3,p-1} & (\prod_j m_{3,j})^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{p-1,2} & m_{p-1,3} & \cdots & m_{p-1,p-1} & (\prod_j m_{p-1,j})^{-1} \\ (\prod_j m_{2,j})^{-1} & (\prod_j m_{3,j})^{-1} & \cdots & (\prod_j m_{p-1,j})^{-1} & \prod_j m_{i,j} \end{pmatrix}$$

となり, $m_{i,j} = 1 + \epsilon \hat{x}_{i,j}$ ($\hat{x}_{i,j} \in \mathbb{R}$) とおくとき, σ_0 の $(\hat{x}_{i,j})$ の作用は

$$\bar{\sigma}_0^* (\hat{x}_{i,j}) = \begin{cases} \hat{x}_{i+1,j+1} & (i \leq p-2, j \leq p-2) \\ -\sum_{l=1}^{p-1} \hat{x}_{i+1,l} & (i \leq p-2, j = p-1) \\ \sum_{k,l} \hat{x}_{k,l} & (i=j=p-1) \end{cases}$$

となる。従って,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \bar{\sigma}_0^{*k} (\hat{x}_{i,1}) = 2 \sum_{i \leq j} \hat{x}_{i,j},$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} \bar{\sigma}_0^{*k} (\hat{x}_{i,2}) = \hat{x}_{i,2} + \hat{x}_{2,3} + \cdots + \hat{x}_{p-2,p-1} - \sum_{i=1}^{p-1} \hat{x}_{i,p-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \hat{x}_{i,p-1},$$

$3 \leq n \leq \frac{p-1}{2}$ に対し,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \bar{\sigma}_0^{*k} (\bar{x}_{i,n}) &= \hat{x}_{i,n} + \hat{x}_{2,n+1} + \cdots + \hat{x}_{p-n,p-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{p-n+1} \hat{x}_{i,p-n+1} - \sum_{j=p-n+2}^{p-1} \hat{x}_{p-n+1,j} \\ &\quad + \hat{x}_{1,p-n+2} + \hat{x}_{2,p-n+3} + \cdots + \hat{x}_{n-2,p-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \hat{x}_{i,p-1} - \sum_{j=n}^{p-1} \hat{x}_{n-1,j}. \end{aligned}$$

これから, $\{\hat{x}_{i,j}\}_{i=1,\dots,p-1}$ の係数を比較することにより, $\sum_{k=0}^{p-1} \bar{\sigma}_0^{*k} (\hat{x}_{i,j})$ ($j=1,2,\dots,\frac{p-1}{2}$) が 1 次独立であることがわかる。 $x_{i,j} \in \mathbb{M}_n / \mathbb{M}_n^2$ を $\hat{x}_{i,j}$ の dual

base とすれば, 従, σ , 補題 3.1 により,

$$\sigma^k(x_j) \quad (j=1, \dots, \frac{p-1}{2}; k=0, 1, \dots, p-1)$$

が local ring $\hat{U}_x$ の regular system of parameters とな
て 11 ること かわかり, σ の作用 が線型化 出
来る こと かわかる.

定理 6.3 と補題 3.2 により, 我々は次の定
理を得る.

定理 6.4. p を素数, m と $m \equiv p-1$ なる整数
とするとき, 標数 p の体上定義された次元 m
の principally polarized ordinary abelian variety $P=(X, \lambda)$ で,
 $R_P \not\cong K(\zeta)$ となるものが存在する, 但し, ζ は
 P に対応する A_ζ 上の点である.

文献

- [1] Curtis C.W, Reiner I, Representation theory of finite groups and associative algebras, New York, Interscience Publishers 1962.
- [2] Hasse H., Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionen-Körper, insbesondere bei endlichen Konstanten-Körpern. Journ reine angew. Math. (Crelle) 172, 37-54 (1935).

- [3] Keizer S., The fields of moduli for polarized abelian varieties and for curves. Nagoya Math. J. 48, 37-55 (1972).
- [4] Messing W., The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes. Lecture notes in Math. Vol. 264. Berlin-Heidelberg-New York. Springer 1972.
- [5] Sekiguchi T., On the fields of rationality for curves and for their jacobian varieties, to appear.
- [6] Shimura G., On the field of rationality for an abelian variety. Nagoya Math. J., 45. 167-178 (1972).