

Quasi-Gorenstein Fano 3-folds with isolated non-rational singularities

九大理 石井志保子 (Shihoko Ishii)

Quasi-Gorenstein Fano n -fold とは n 次元の normal projective variety X 上 $\mathcal{O}_X(-K_X)$ が ample Cartier divisor であるものを意味する。
 X 上の non-rational locus Σ_X と $\Sigma_X := \{x \in X \mid x \text{ is non-rational \& singular point i.e. } (Rf_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \not\cong \mathcal{O}_{X,x} \text{ for a resolution } f: \tilde{X} \rightarrow X\}$ と定義すると Σ_X は X の closed subset になる。ここで quasi-Gorenstein Fano n -fold X 上 $\Sigma_X \neq \emptyset$, $\dim \Sigma_X = 0$ となるものをすべて決定する という問題と考える。 例えは abelian surface 上の projective cone や normal K3-surface 上の projective cone は そのような X の例になっている。 逆に quasi-Gorenstein Fano 3-fold 上 $\Sigma_X \neq \emptyset$, $\dim \Sigma_X = 0$ となるものはすべて上の例で与えられる というのが 2 稿の主張である。

定理. X を quasi-Gorenstein Fano 3-fold with $\Sigma_X \neq \emptyset$ $\dim \Sigma_X = 0$ とすると、次が成立

- (i) 高々 rational singularities しかも Γ には normal surface S で $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たすものが存在し、さらに S 上 ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ が存在し、 X は S 上の projective cone w. r. to $\mathcal{L}$ に Γ である。
(i.e. X は $\mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L})$ の negative section の contraction)
- (ii) さらに $n \geq 0$ とする。

X : Gorenstein $\Leftrightarrow S$ は normal K3-surface.
($\Leftrightarrow S$ は normal surface で $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$
 $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, S a minimal resolution
of K3-surface)

X : non-Gorenstein $\Leftrightarrow S$ は Abelian surface.

定理は、次の基本的な命題から導かれる。

命題. X を quasi-Gorenstein Fano n -fold with $\Sigma_X \neq \emptyset$ $\dim \Sigma_X = 0$ とする。さらに X の resolution $f: \hat{X} \rightarrow X$ に対し、 $\bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_{\hat{X}}(mK_{\hat{X}})$ が有限生成 $\mathcal{O}_X$ -algebra に Γ すると仮定すると、高々 rational singularity しかも Γ には $(n-1)$ -fold S で $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たすものが存在し、さらに

S 上の ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ が存在して,

X は S 上の projective cone w.r.t. $\mathcal{L}$ になっている.

[定理の証明] 命題の条件は, minimal model conjecture が正しいければ, 必然的に成立する. $n=3$ の場合は, 森氏, 川又氏, Shokurov 氏 らによ, γ (最終的には森氏 [M] に γ, γ) minimal model conjecture が肯定的に解決されたので, 定理の (i) が従う.

(ii) については, $\mathcal{O}_S(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たす normal surfaces の分類が [U] で行われ, その中で高々 rational singularities を持つものは, Abelian surface が normal $K3$ -surface であることが示されている. $g: P(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}) \rightarrow X$ とし, $R^q_* \mathcal{O}_{P(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L})}$ を考えれば, S が Abelian の場合 $\neq 0$ となり, normal $K3$ の場合 $= 0$ になるので, それぞれ, not Gorenstein 又は Gorenstein になる.

命題の証明に入る前に, 証明に必要な Lemma を準備する.

Lemma の証明は, [M, §1] と同じなのでここでは省略する.

Lemma. Y : 高々 canonical singularities を持つ n -projective n -fold ($n \geq 2$)

$R \subset \overline{NE}(Y)$ extremal ray s.t. φ_R : birational

D : φ_R の exceptional set

$\varphi_R|_D : D \rightarrow \varphi_R(D)$ の任意の fiber の次元 ≥ 1 .

$D \not\subset (Y \text{ の non-quasi-Gorenstein locus})$

の仮定のもとに次が成立する.

(i) $\varphi_R|_D$ の各 fiber は $\mathbb{P}^1$ a tree

(ii) ℓ は general fiber a component と可なり $K_Y \cdot \ell \geq -1$

[命題の証明] 命題の仮定により. $Y = \text{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_X(mK_X)$ は projective variety になり. $g: Y \rightarrow X$ は canonical morphism と可なり. 次が成立する.

(1) Y は高々 canonical singularities しか持たない.

(2) $E := g^{-1}(\Sigma_X)_{\text{red}}$ と可なり. E は pure codimension 1 になり. $g|_{Y-E}: Y-E \xrightarrow{\sim} X-\Sigma_X$ isom.

(3) K_Y は relatively ample with respect to g .

(4) $K_Y = g^*K_X - \Delta$ と可なり. $E = \sum_{i=1}^r E_i$ と既約分解 1 可なり. $\Delta = \sum_{i=1}^r a_i E_i$ ($a_i \in \mathbb{N}$) と表わされる.

以下 (3) は Δ を用いて次のように表わされる.

(3') 任意の irreducible curve $C \subset E$ に対し $\Delta \cdot C < 0$

Claim 1 $\overline{NE}(Y)$ の中には extremal ray R 2: $\Delta \cdot R > 0$ を満たすものが存在する。

(i) $\overline{NE}_{K_Y}(Y) := \{C \in \overline{NE}(Y) \mid K_Y \cdot C \geq 0\}$ とおくと、 $\mathbb{N}^1 X$ の cone theorem (cf. [K1]) により、

$$\overline{NE}(Y) = \sum R_i + \overline{NE}_{K_Y}(Y)$$

と表わされる。ここで R_i は extremal ray ($\neq 0$)。

Y 上の irreducible curve C と E と交わり E に含まれていないもの C とすると $\Delta \cdot C > 0$ を満たす。

一方 $\overline{NE}(Y)$ の中の C の class $[C]$ は $\sum l_i + a$ ($l_i \in R_i$, $a \in \overline{NE}_{K_Y}(Y)$) と表わされる。この表示を用いて、次の不等式を得る。

$$(5) \quad 0 < \Delta \cdot C = \sum (\Delta \cdot l_i) + \Delta \cdot a.$$

ここで a の定義により $0 \leq K_Y \cdot a = g^* K_X \cdot a - \Delta \cdot a$

だから $-K_X \cdot a \geq 0$ であることに用いて $\Delta \cdot a \leq 0$

(1) の不等式 (5) により、ある i が存在して $\Delta \cdot l_i > 0$

この l_i の属する ray R_i を R とおけば良い。

Claim 2 R は Claim 1 の extremal ray とする。

$\varphi_R: Y \rightarrow S$ を R -contraction とすると、次の成立。

$$(6) \quad \dim S = n-1$$

$$(7) \quad \Delta = E = E_1 \quad (\text{i.e. } \Delta \text{ is irreducibly reduced})$$

- $\varphi: \varphi_R|_E: E \xrightarrow{\sim} S$ isom
 (8) $\sum x = \{x\}$ one point set である. x を通る curve
 $| -K_x |$ a member H がある. $\varphi_R|_H: H \xrightarrow{\sim} S$ isom.
 (9) $\tilde{H} := g^*H$ とすると. $\varphi_R|_{\tilde{H}}: \tilde{H} \xrightarrow{\sim} S$ isom.

(i) (6) の証明: まず $\dim S \geq n-1$ を示そう.

E 上の任意の curve C をとると (3)' より. $\Delta \cdot C < 0$
 であり $[C] \notin R$ i.e. C は φ_R による $\frac{1}{2}$ に近づけること
 はない. したがって $\varphi_R|_E: E \rightarrow \varphi_R(E)$ は finite
 morphism である. $\dim S \geq \dim \varphi_R(E) = n-1$ より. 仮
 定より $\dim S = n$ と仮定して矛盾を導く. この場合 φ_R は
 birational になっている. D は exceptional set であると
 $\varphi_R|_D: D \rightarrow \varphi_R(D)$ の φ_R による fiber は 1 次元以下である.
 事実. 直前の議論より. 任意の $A \in \varphi_R(D)$ に対し.
 $\varphi_R^{-1}(A) \cap E$ は $\wedge$ finite points set になっている. もし $\varphi_R^{-1}(A)$
 の次元が ≥ 2 以上あるならば. これらの点を通る curve
 $C \subset \varphi_R^{-1}(A)$ があると. この C は φ_R による $-\frac{1}{2}$ の
 近づけに達しないから. $[C] \in R$ である. $\Delta \cdot C > 0$
 である. C の次元が ≥ 2 以上ある. C の次元が ≥ 2 以上ある
 とき $\Delta \cdot C = 0$ と仮定して矛盾. したがって $\varphi_R^{-1}(A)$ の次元は
 1 次元である. したがって Y は non-^{quasi-}Gorenstein locus である.

E に含まれていない。 $D \nsubseteq (Y \text{ a non-quasi-Gorenstein locus})$ とする。 (Lemmas 1 により irreducible curve $l \subset \varphi^{-1}(D)$ に対して $K_Y \cdot l \geq -1$ 。
 $-1 \leq l \nsubseteq E$ により $-K_X$ の ampleness により $g^*K_X \cdot l < 0$ 。
 g^*K_X は Cartier divisor であるから、その intersection number は整数でなければならない。 $\therefore g^*K_X \cdot l \leq -1$ 。
 すると、 $\Delta \cdot l > 0$ とおくと $K_Y \cdot l = g^*K_X \cdot l - \Delta \cdot l$
 と評価してみると $K_Y \cdot l < -1$ となり、上記に矛盾する。 (Lemmas: $\dim S = n$ は示さなければならない。

(7) の証明: (6) により、 φ_R の relative dimension 1 の fiber 構造と等価であることを示す。 一般に、 φ_R の fiber 構造と等価とす。 general fiber は weak log-terminal で $-K$ が ample であることを示す。 (Lemmas: 我々の場合、general fiber l は、 $\mathbb{P}^1$ の型と等しい。 $\therefore -2 = K_Y \cdot l = g^*K_X \cdot l - \Delta \cdot l$ 。
 すると、 l は Δ の Cartier の部分で交わっているとすると、 $\Delta \cdot l \geq 1$ ならば $g^*K_X \cdot l \leq -1$ となり、上記の等式は 2つの等式:

$$(10) \quad \Delta \cdot l = 1, \quad g^*K_X \cdot l = -1$$

を induce する。 $\varphi_R: E \rightarrow S$ は finite surjection

だから. E a q_1 -2 a component と l は交わりを 持つから.

$$1 = \Delta \cdot \ell = \sum a_i \varepsilon_i \cdot \ell \geq \sum_{i=1}^r a_i \quad (a_i \in \mathbb{N}) \quad (1.21)$$

$$r=1, a_1=1 \text{ 且 } 2. \text{ 对任意 } n, \Delta = E = E_1.$$

(8)の証明:

Ex: irreducible $\rightarrow T \in \mathcal{H}$ の image Σ_X も irreducible $\nabla T \in \mathcal{H}$. — Ex: $T \in \mathcal{H}$ にと $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

$\Sigma_X = \{x\}$ と $\# \geq 3$. 求める H^0 存在する k には.

$$\Gamma(X, \omega_X \otimes (-K_X)) \subset P(X, \mathcal{O}(-K_X)) \quad n! - \frac{3}{2}n! \tau_{div}$$

ことを示せば十分. $\therefore m_x$ は R の定数 ideal

shuf. 2. 2. $K_Y = g^* K_X - E$, 3. 移項して shuf.

また、 $\mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-K_X) = \mathcal{O}(-E_1)$ である。

ch 3. $k[x]$ is reduced ideal $7x^2$ $m_2 \subset \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$

これに注意して、 f の direct image を

$$g_* \mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-K_X) = g_* \mathcal{O}(-E_1) = \mathcal{M}_X$$

$$\text{证得 } \exists \text{ } \rho > 0, \exists m_x \mathcal{O}(-K_x) = g_x \mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}_X(-2K_x).$$

2.2.2 Leray spectral sequence :

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \mathcal{O}(K_Y - 2qK_X)) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \mathcal{O}(K_Y - 2qK_X))$$

2.3.2. trivial edge sequence $\hookrightarrow$ 2.4 injection

$$H^1(X, \mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-2K_X)) \hookrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}(K_Y - 2g^*K_X))$$

Ergebnis: $-2g^*K_X$ ist nef. Zu lang ist nicht 11/2-Vielweg

vanishing theorem v. 54. 右側が消滅. $(\mathbb{R}P^3)$ 左側

chronology 時間

(1) の次に、次の exact sequence を：

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}_X(\mathcal{O}(-K_X))) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{O}(-K_X)) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}(-K_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{M}_X(\mathcal{O}(-K_X)))$$

$\parallel$
 $\mathbb{C}$

$$H^1(X, \mathcal{I}_*(\mathcal{O}_{K_X}) \otimes \mathcal{O}(-2K_X))$$

右端 = 0 とする。すなわち β は surjective にとする。

α は (2) の型に属する。このことを示す。

(9) の証明： $H \in |K_X|$ と $H \cap \tilde{H} = \emptyset$ とする。

φ_R の general fiber ℓ に対して $\tilde{H} \cdot \ell = -g^* K_X \cdot \ell = 1$

(by (10)) したがって $\varphi|_{\tilde{H}} : \tilde{H} \rightarrow S$ は birational である。

△. irreducible curve $C \subset \tilde{H}$ に対して $\varphi_R(C) = \text{one point}$

とすると $[C] \in R$ として $\Delta \cdot C > 0$ となる。

したがって $\tilde{H} \cap E = \emptyset$ である。 $\tilde{H}$ は a curve C

と $C \cap E = \emptyset$ として $\Delta \cdot C = 0$ (矛盾) したがって $\tilde{H} \cap E \neq \emptyset$

である。したがって $\tilde{H}$ は a curve である。これは明らか。

$\varphi|_{\tilde{H}}$ は finite morphism である。 S は normal

である。Z.M.T により finite と birational morphism

$\varphi_R|_{\tilde{H}}$ は isomorphism である。これは Claim 2 である。

証明しおくれ。

したがって $\varphi_R : Y \rightarrow S$ は実は S 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle である。

と示す。以後簡単のため φ_R を単に φ と書く

ことにする。 $L := \mathcal{O}_Y(\tilde{H})$ とすると、これは relatively ample

w.r.to φ 1-1. 実際 $C \in \varphi$ は fiber の irreducible comp. と可及. $[C] \in R$ 1-1 から $\Delta \cdot C > 0$ 故に $C \notin E$. $1T=0$ 故に $\tilde{H} \cdot C = -g^* K_X \cdot C > 0$ 故に L は φ の fiber 上 ample である. C は φ の fiber 上の relatively ample w.r.to φ である. φ の exact sequence: $0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H \rightarrow 0$ の φ による direct images をとる.

$$(11) \quad 0 \rightarrow \underbrace{\varphi_* \mathcal{O}_Y}_{\mathcal{O}_S} \rightarrow \varphi_* \mathcal{L} \rightarrow \varphi_* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H) \rightarrow R^1 \underbrace{\varphi_* \mathcal{O}_Y}_0$$

を得る. この右端が 0 であるのは φ が extremal ray の contraction 1-1 からである. ([K2] Th 1.2).

$\tilde{H}$ に制限すると φ は同型であるから $\varphi_* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H)$ は S 上の invertible sheaf 1-1. 故に $\varphi_* \mathcal{L}$ は rank 2 の locally free sheaf 1-1.

可換図式: $0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow \gamma & & \uparrow & \\ & & & \varphi^* \varphi_* \mathcal{O}_Y & \rightarrow & \varphi^* \varphi_* \mathcal{L} & \rightarrow \varphi^* \varphi_* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H) \rightarrow 0 \end{array}$$

により $\gamma: \varphi^* \varphi_* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ は surjective 1-1. 故に $\mathcal{L}$ は φ の fiber 上 ample である. S 上の morphism $\pi_{|\mathcal{L}|}: Y \rightarrow P(\varphi_* \mathcal{L})$ が定義できる. $\mathcal{L}$ は relatively ample 1-1 故に $\pi_{|\mathcal{L}|}$ は finite morphism である. 1-1 一般 fiber $\pi^{-1}(s) = \varphi^{-1}(s)$ 1-1. 故に $\deg \mathcal{L}|_C = \tilde{H} \cdot C = 1$ 1-1 故に $\pi_{|\mathcal{L}|}$ は birational

$\pi^* P(\varphi_* \mathcal{L})$ は, normal $(n-1)$ -fold S 上の locally trivial P' -bundle $\pi^* P'$ は, normal である. $\pi^* P' \subset Z.M.T$ を使
 $\tilde{L}$ かつ $\tilde{L}|_H$ は, isomorphism になる. $\pi^* \tilde{L} \cong P(\varphi_* \mathcal{L})$
 $\pi^* \tilde{L}$ と disjoint な section E が存在する (by (7), (8))
 $\pi^* \tilde{L}$ の exact sequence (11) は, split する. $\pi^* \tilde{L}$
 $\pi^* \tilde{L} = P(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}_S)$ となる. $\mathcal{L}_S = \varphi_* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H)$. X は,
 Y の negative section E をつづいて得られるものである.
 $\pi^* \tilde{L}$ は S の singularity に non-rational である. $\pi^* \tilde{L}$ である.
 $\Sigma \times$ の次元が 1 以上 $\pi^* \tilde{L}$ である. $\pi^* \tilde{L}$ の次元が 1 以上
 $\pi^* \tilde{L}$ の次元が 1 以上 $\pi^* \tilde{L}$ である.

References.

- [K1] Kawamata, Y.: The cone of curves of algebraic varieties,
 Ann. of Math. 119 (1984) 603-633.
 [K2] ———: Crepant blowings up of 3-dimensional canonical
 singularities and its application to degenerations of surfaces.
 [M] Mori, S.: Flip theorem and the existence of minimal models
 for 3-folds. J. of AMS, 1 (1988) 117-253.
 [U] Umezu, Y.: On normal projective surface with trivial
 dualizing sheaf. Tokyo J. of Math. 4 (1981) 343-354