

Some Properties of Reproducing Kernels on an Infinite Network

広島工大 村上 温 (Atsushi Murakami)
島根大理 山崎 稀嗣 (Maretsugu Yamasaki)

1. 準備

$N = \{X, Y, K, r\}$ を局所有限でセルフループを持たない (高々可算) 無限連結グラフとする。ただし, X は点の高々可算集合, Y は弧の高々可算集合, K は点と弧の結合関数, r は Y 上の正の実数値関数 (抵抗) とする. X 上の実数値関数の全体を $L(X)$, 有限集合の外で 0 となる X 上の実数値関数の全体を $L_0(X)$ で表す. 関数 $u \in L(X)$ の離散微分 (差分) du とディリクレ和 $D(u)$ を

$$du(y) := -r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x, y)u(x)$$

$$D(u) := \sum_{y \in Y} r(y)[du(y)]^2$$

と定義する. ディリクレ和が有限な X 上の関数の全体を $D(N)$ で表す. 関数 $u, v \in D(N)$ の相互ディリクレ和を

$$D(u, v) := \sum_{y \in Y} r(y)[du(y)][dv(y)]$$

と定義する. $D(N)$ は内積:

$$\langle u, v \rangle := D(u, v) + u(x_0)v(x_0)$$

($x_0 \in X$ は固定) に関してヒルベルト空間となる. この空間内での $L_0(X)$ の閉包を $D_0(N)$ で表し, その要素をディリクレポテンシャルと呼ぶ.

任意に固定された $x_0 \in X$ に対して,

$$D(N; x_0) := \{u \in D(N); u(x_0) = 0\}$$

は内積: $D(u, v)$ に関してヒルベルト空間となる.

本稿では, $D(N; x_0)$ に対する再生核 k_a の性質を利用して, ネットワークの極値的長さに関する三角不等式を証明し, さらにネットワーク上の流れ (フロー) に関する極値問題の研究への $D_0(N)$ の再生核 g_a の応用について報告する. 5 節の定理 8 を除けば, 本稿の結果は近刊の論文 [4] と同じであるので, 証明を省略する.

2. $D(N; x_0)$ の再生核 k_a

点 $a \in X_0 := X - \{x_0\}$ を任意に固定するとき, 対応: $u \in D(N; x_0) \longrightarrow u(a)$ は連続線形汎関数となることから, リースの定理により

$$u(a) = D(u, k_a) \quad \forall u \in D(N; x_0)$$

となる関数（再生核） $k_a \in D(N; x_0)$ が存在する。

補助定理 1. 全ての $x \in X$ に対して、 $0 \leq k_a(x) \leq k_a(a)$ が成り立つ ([3] 参照)。また $k_a/k_a(a)$ は次の極値問題の最適解である：

$$d(x_0, a) := \inf\{D(u); u \in L(X), u(x_0) = 0, u(a) = 1\}$$

更に、 $d(x_0, a) = 1/k_a(a)$ が成り立つ。

異なる 2 点 a, b 間の極値的長さ $\lambda(a, b)$ は、 Y 上の非負実数値関数 W のうち容量 rW に関する a, b 間の最小仕事問題（最短経路問題）の値が 1 以上となるもの、すなわち、 a と b を結ぶすべての道 P に対し

$$\sum_{y \in P} r(y)W(y) \geq 1$$

を満たす W についてのエネルギー

$$H(W) := \sum_{y \in Y} r(y)W(y)^2$$

の下限の逆数として定義される。 $\lambda(a, b) = d(a, b)^{-1}$ が成り立つ ([6] 参照)。

定理 1. 異なる 2 点 $a, b \in X_0$ について、 $u_{ab} := k_b - k_a$ とおく。関数

$$v_{ab} := [u_{ab} - u_{ab}(a)]/D(u_{ab})$$

は極値問題 $d(a, b)$ に対する最適解であり、次の関係式が成り立つ：

$$\lambda(a, b) = k_a(a) - 2k_a(b) + k_b(b)$$

定理 2. 異なる 3 点 x_0, a, b について

$$\lambda(a, b) = \lambda(x_0, a) + \lambda(x_0, b) - 2k_a(b)$$

定理 3. 極値的長さは三角不等式を満たす。

有限ネットワークの場合には、文献[1]でこのことが証明されている。

3. $D_0(N)$ に対する再生核 g_a

無限ネットワーク N が双曲型であると仮定すると、任意の点 $a \in X$ に対して条件

$$D(v, g_a) = v(a) \quad \forall v \in D_0(N)$$

を満たす関数 (再生核) $g_a \in D_0(N)$ が存在して一意的である. g_a は a を極とする N のグリーン関数と呼ばれる ([7] 参照).

定理 4. 異なる 2 点 a, b に対し, $u_{ab}^* := g_b - g_a$ とおく. 関数 $v_{ab}^* := u_{ab}^*/D(u_{ab}^*)$ は次の極値問題の最適解である:

$$\rho(a, b) := \inf\{D(u); u \in D_0(N), u(b) - u(a) = 1\}.$$

4. 流れに関する極値問題

条件

$$\sum_{y \in Y} K(x, y)w(y) = 0 \quad \forall x \in X - \{a, b\}$$

$$I(w) := -\sum_{y \in Y} K(a, y)w(y) = \sum_{y \in Y} K(b, y)w(y)$$

を満たす関数 $w \in L(Y)$ を点 a から点 b への流れ (フロー) といい, その集合を $F(a, b)$ で表す. ヒルベルト空間 $L_2(Y; r) := \{w \in L(Y); H(w) < \infty\}$ における集合 $F(a, b) \cap L_0(Y)$ の閉包を $F_2(a, b)$ として, 次の極値問題を考える:

$$d^*(a, b) := \inf\{H(w); w \in F(a, b), I(w) = 1\}$$

$$d_0^*(a, b) := \inf\{H(w); w \in F_2(a, b), I(w) = 1\}$$

関係式 $d(a, b)d_0^*(a, b) = 1$ は既知である ([6] 参照).

定理 5. $\rho(a, b)d^*(a, b) = 1$ が成り立つ. 更に, $\tilde{w} := -d(g_b - g_a)$ は $d^*(a, b)$ に対する最適解である.

定理 6. $d^*(a, b) = d_0^*(a, b)$ が成り立つための必要十分条件は $d(g_b - g_a) \in F_2(a, b)$ である.

5. 関数としての $\lambda(x_0, x)$

関数 $f(x) := k_x(x) = \lambda(x_0, x)$ ($x \in X - \{x_0\}$), $f(x_0) := 0$ の性質を調べるために, 離散ラプラシアンを計算する.

$$\Delta f(a) := -t(a)f(a) + \sum_{x \in X} t(x, a)f(x)$$

$$t(x, a) := \sum_{y \in Y} r(y)^{-1} |K(x, y)K(a, y)| \quad (x \neq a), \quad t(a, a) := 0$$

$$t(a) := \sum_{y \in Y} r(y)^{-1} |K(a, y)|$$

定理 2 から

$$f(x) = \lambda(a, x) - k_a(a) + 2k_a(x) \quad (x \neq a)$$

であるから,

定理 7. 次の公式が成り立つ :

$$\Delta f(x_0) = \sum_{x \in X} t(x, x_0) \lambda(x, x_0)$$

$$\Delta f(a) = \sum_{x \in X} t(x, a) \lambda(x, a) - 2$$

特に, N が 2 次元格子状領域で $r = 1$ の場合には, $t(x, a) = 1$, $\lambda(x, a) = 1/2$ であるから,

$$\Delta f(x_0) = 2, \quad \Delta f(a) = 0 \quad (x \neq a)$$

が成り立つ。

また特に, N が有限ネットワークの場合には

$$\sum_{x \in X} \Delta u(x) = 0 \quad \forall u \in L(X)$$

であることに注意すると, 定理 7 により

定理 8. N が有限ネットワークならば次の関係が成り立つ :

$$\sum_{a \in X} \sum_{x \in X} t(x, a) \lambda(x, a) = 2 |X| - 2$$

ただし, $|X|$ は集合 X の要素の個数を表す。

この結果は Foster の平均公式 ([5], 定理 2.11 参照) である。

参考文献

- [1] R.J. Duffin, Distributed and lumped networks, J. Math. Mech. 8(1959), 793-826.
- [2] R.J. Duffin, The extremal length of a network, J. Math. Anal. Appl. 5(1962), 200-215.
- [3] A. Murakami, Kuramochi boundaries of infinite network and extremal problems, Hiroshima Math. J. 24(1994), 234-256.
- [4] A. Murakami, M. Yamasaki and Y. Yone-e, Some properties of reproducing kernels on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. 28(1994), to appear.
- [5] P. Soardi, Potential theory on infinite networks, Lecture Notes in Mathematics 1590, Springer-Verlag, 1994.
- [6] M. Yamasaki, Extremum problems on an infinite network, Hiroshima Math. J. 5(1975), 223-250.
- [7] M. Yamasaki, Discrete potentials on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. 13(1979), 31-44.