

ある種の trigonometry の理論の可算モデル の個数について

東京大学数理科学研究科・玉江 伸成 (Tamae Nobuaki)
Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo

Sudoplatov によって詳しく研究されてきた poly(tri)gonometry という対象は、通常の数学で考えられる大抵の幾何（ユークリッド幾何、双曲幾何等）を内に含む概念である。一方で、以前から良く知られていたモデル理論の予想に関して、多くの反例を与えてきた、Hrushovski による、有限構造の貼り合せによってできる generic な構造の多くからは、擬平面と呼ばれる構造が解釈される。poly(tri)gonometry は、特殊な、しかし重要な擬平面をも内に含む概念であり、この概念の研究を generic な構成法の枠内で進めることにより、さらに重要な予想（特に、Lachlan 予想と呼ばれるもの）の反例が産み出されるのでは、と Sudoplatov は考えているように映る。

以下では、我々にとってまだ馴染みがあるとは言い難い、この対象の定義と、簡単な場合において、この理論の可算モデルの個数を数える。

1. 定義

Sudoplatov による trigonometry の定義については、例えば [2] に書いてあるが、以下の定義は、我々の目標のために、それらを少し簡約化してある。

定義 1 λ を基数とする（有限でもよい）。2-sorted な構造 $\mathcal{P} = (P, L, \in)$ が λ -擬平面であるとは、次の (1) から (3)（とその双対）を満たすときに言う。

- (1) $p \in l$ となるのは、 $p \in P, l \in L$ となるときに限る。
- (2) 任意の P の元（点と呼ぶ） p に対し、 $p \in l$ となる $l \in L$ がちょうど λ 本存在する。
- (2)' 任意の L の元（線と呼ぶ） l に対し、 $p \in l$ となる $p \in P$ がちょうど λ 個存在する。
- (3) 任意の $p_1, p_2 \in P$ に対し、 $p_1 \in l$ かつ $p_2 \in l$ となる $l \in L$ は高々 1 本しかない。
- (3)' 任意の $l_1, l_2 \in L$ に対し、 $p \in l_1$ かつ $p \in l_2$ となる $p \in P$ は高々 1 点しかない。

注意 通常、擬平面と言った場合、上の定義の (3)（及びその双対）における「高々 1 本」は、「高々有限本」とするのが普通である。ただ、ここでは、後に考える群の作用との兼ね合いもあり、このように定義しないと議論がうまく進

まない。実際のところ、Hrushovski が [1] で構成した、安定で ω -categorical な擬平面も、上の定義の (3) (及びその双対) の性質を持っているし、最終的な目標となる、Lachlan 予想の反例も、(タイプの個数が少ないという意味で) それほど複雑なものではないはずなので、この文脈の中では、上の定義はそれほど不自然なものではない。

定義 2 $P = (P, L, \epsilon)$ を λ -擬平面、 G を群、 $g_0 \in G$ を単位元でない勝手な元とする。このとき、三つ組 (G, P, g_0) が polygonometry であるとは、次の (1) から (4) を満たすときに言う。

(1) $|G| = \lambda$.

(2) G は、各線上忠実に作用している。すなわち、任意の $l \in L, p_1, p_2 \in l$ に対し、ある $g \in G$ が一意に存在して、 $p_2 = p_1 g$ となり、結合律やその他の法則を満たしている。

(2)' G は、各点のまわりに忠実に作用している。すなわち、任意の $p \in P, l_1, l_2 \ni p$ に対し、ある $g \in G$ が一意に存在して、 $l_2 = l_1 g$ となり、結合律やその他の法則を満たしている。

(3) 任意の $p_1 \in l_1, p_2 \in l_2$ に対して、次のような全単射 $f: P \rightarrow P$ が存在する。

(i) $f(p_1) = p_2, f(l_1) = (l_2)$ (setwise に)

(ii) $f(l) \in L$

(iii) $f(\{l | p \in l\}) = \{l | f(p) \in l\}$

(iv) 任意の $l \in L, p_1, p_2 \in l$ に対し、 l 上で $p_2 = p_1 g$ となれば、 $f(l)$ 上で $f(p_2) = f(p_1) g$ となる。

(iv)' 任意の $p \in P, l_1, l_2 \ni p$ に対し、点 p の周りで $l_2 = l_1 g$ となれば、 $f(p)$ の周りで $f(l_2) = f(l_1) g$ となる。

(4) 任意の $p \in P$ に対し、 $\{q \in P | \text{ある } l \in L \text{ 上で } q = p g_0\}$ ($= l_p$ と置く) は線をなす、すなわち $l_p \in L$ である。また、 $p \mapsto l_p$ という対応は、 P と L の 1 対 1 対応を与える。

注意 (1) polygonometry とは、擬平面上に群を「幾何的な情報」を持たせるように作用させたものと言える。ここで言う「幾何的な情報」とは、定義 2 (2) で言えば、一意に存在する g が、直線 l 上の 2 点間の「向き付きの距離」を表すことを意味し、また定義 2 (2)' で言えば、一意に存在する g が、点 p を通る 2 直線間の「向き付きの角度」を表すことを意味している。

(2) 本来の polygonometry の定義では、「向き付きの距離」を表す群と「向き付きの角度」を表す群とをさらに区別する。例えば通常のユークリッド平面では、それぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とする。しかし、ここで関心となるのは個々の構造ではなく、非同型なモデルの個数についてなので、特に必要がない限り簡単のために、距離と角度を表す群を同じものとしておく。なお、区別さ

れた場合にも、以下の定義はほぼ同様に進む。

(3) 言語をまだ定義していないので意味が薄いですが、定義 2 (3) は、polygonometry では、各点の周りは局所的には同型であるということを意味している。(ii),(iii) は、 p の周りの直線たちと、 $f(p)$ の周りの直線たちの間には 1 対 1 の対応が付いていることを意味し、(iv) では、群の作用が f で保存されることを表している。

(4) 定義 2 (4) は、 g_0 という固定された長さの半径の円が直線であることを表している。直感的には、球面上の幾何を想像してもらえればよい。一点から、経線の半分の距離にある点の軌跡は直線になっている。(正確に言えば、これは polygonometry にはなっていない。2 直線の交点が必ず 2 点あるからである。しかし、これを変形して polygonometry にすることは容易である。)

定義 3 $\text{pm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を polygonometry とする。 $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ ($g_i, h_j \in G, i, j = 1, \dots, n, n \geq 3$) が pm での n 角形であるとは、ある $p_1, \dots, p_n \in P, l_1, \dots, l_n \in L$ が存在して、 $p_{i+1} = p_i g_i, l_{i+1} = l_i h_i$ ($i = 1, \dots, n \pmod{n}$) となるときに言う。

定義 4 $\text{pm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を polygonometry とする。以下の行列内に現れる元は、すべて G の元とする。

(1) pm での n 角形 $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ ($n \leq 3$) の回転 (permutation) とは、 $\begin{pmatrix} g_{k+1} & \cdots & g_n & g_1 & \cdots & g_k \\ h_{k+1} & \cdots & h_n & h_1 & \cdots & h_k \end{pmatrix}$ ($k = 0, \dots, n-1$) と表される n 角形のことを言う。

(2) pm での n 角形 $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ ($n \leq 3$) の逆順 (turn) とは、 $\begin{pmatrix} g_n^{-1} & g_{n-1}^{-1} & \cdots & g_1^{-1} \\ h_n^{-1} & h_{n-1}^{-1} & \cdots & h_1^{-1} \end{pmatrix}$ と表される n 角形のことを言う。

(3) pm での 2 つの多角形 $S_1 = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_{k-1} & g_k & \cdots & g_m \\ h_1 & \cdots & h_{k-1} & h_k & \cdots & h_m \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} g_m^{-1} & \cdots & g_{k+1}^{-1} & g_k^{-1} & g'_1 & \cdots & g'_n \\ h_m^{-1} & \cdots & h_{k+1}^{-1} & h'_0 & h'_1 & \cdots & h'_n \end{pmatrix}$ に対し、 S_1 と S_2 の $(g_k, \dots, g_m)$ での結合 (join) とは、 $\begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_{k-1} & g'_1 & \cdots & g'_n \\ h_1 & \cdots & h_{k-1} \cdot h'_0 & h'_1 & \cdots & h'_n \cdot h_m \end{pmatrix}$ のことを指す。

定義 5 pm を polygonometry とする。 pm における任意の多角形が、 pm における 3 角形から、回転、逆順、結合の操作を用いて作られるとき、 pm が trigonometry であるという。

次に、言語を入れる。これによって、「可算モデルの個数」等の概念がはっきりする。

定義 6 $\text{trm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を trigonometry とする。trm に対する言語 L を

$$L = L(\text{trm}) = \{Q_g(\cdot, \cdot) | g \in G\} \cup \{R_g(\cdot, \cdot, \cdot) | g \in G\}$$

(Q_g, R_g はいずれも関係記号) で定義する。 L -構造 $M = M(\text{trm})$ を以下の解釈で定義する:

$$M = P,$$

$$Q_g^M = \{(p_1, p_2) | \text{ある } l \in L \text{ 上で } p_2 = p_1 g\},$$

$$R_g^M = \{(p_0, p_1, p_2) | p_0, p_1 \in l_1, p_0, p_2 \in l_2 \text{ なる } l_1, l_2 \in L \text{ があつて } l_2 = l_1 g\}.$$

$T(\text{trm}) = \text{Th}(M(\text{trm}))$ と置き、これを trm の理論と呼ぶ。

注意 polygonometry の定義を用いれば、 R_g は Q_g たちから定義可能であることがわかる (Sudoplatov [3])。

また、polygonometry の定義 (とその後の注意) より、 $M(\text{trm})$ の任意の 2 点のまわりは局所的に同型なので、 $T(\text{trm})$ において、空集合上の 1 変数タイプは 1 つしか存在しない。

G が有限の時は、 $T(\text{trm})$ のモデルは、簡単な構造をしているので、例を兼ねて、この時の $I(\lambda, T(\text{trm}))$ ($T(\text{trm})$ の濃度 λ の非同型なモデルの個数) を決定してみる。そのために必要な定義をする。

定義 7 $\mathcal{P} = (P, L, \in)$ を擬平面とする。

(1) $p_1 \neq p_2 \in P$ に対し、 $p_1 \in l_1, l_2, l_3, \dots, l_n \ni p_2$ かつ $l_i \cap l_{i+1} \neq \emptyset$ ($i = 1, \dots, n-1$) となる $l_1, \dots, l_n$ が存在するとき、このような n の最小値を $d(p_1, p_2)$ で表す。そのような $l_1, \dots, l_n$ が存在しないとき、 $d(p_1, p_2) = \infty$ と置く。 $p_1 = p_2$ の時は、 $d(p_1, p_2) = 0$ と定義する。

(2) $p \in P$ に対し、 $\{q \in P | d(p, q) < \infty\}$ のことを、 p の連結成分という。

$$(3) d(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max(\{d(p, q) < \infty | p, q \in P\}) & (\text{最大値がある時}) \\ \infty & (\text{最大値がない時}) \end{cases}$$

と置き、擬平面の直径と呼ぶ。

定理 8 G を有限群、 $\text{trm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を trigonometry とする。 $d(\mathcal{P}) < \infty$ の時、 $T(\text{trm})$ は totally categorical, つまり任意の無限濃度に対して、その濃度のモデルの数は同型を除いてただ 1 つである。

(証明) G が有限で、 $d(\mathcal{P}) < \infty$ であることから、 $M(\text{trm})$ の連結成分の濃度は有限。polygonometry が局所的に一様であることから、各連結成分は同型である。任意の $M \models T(\text{trm})$ に対し、各点 $a \in M$ の連結成分は一意に定まる (G が有限だから、 a との距離が n であるということを論理式で書けて

しまうから) ので、 $T(\text{trm})$ のモデルは、連結成分の個数によって定まる。したがって、濃度を無限の λ に持つようなモデルは同型を除いて1つだけに定まる。 ■

定理9 G を有限群、 $\text{trm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を trigonometry とする。 $d(\mathcal{P}) = \infty$ の時、 $T(\text{trm})$ の非同型な可算モデルの数は $\aleph_0$ 個。任意の非可算な無限濃度に対しては、その濃度のモデルの数は同型を除いてただ1つである。

(証明) G が無限で、 $d(\mathcal{P}) = \infty$ より、 $M(\text{trm})$ の連結成分の濃度は $\aleph_0$ である。定理8の証明と同じ理由により、各点 $a \in M$ の連結成分は一意に定まり、しかもみな同型である。従って $T(\text{trm})$ のモデルは、これも連結成分の個数によって定まる。可算モデルの種類は、連結成分が1個、2個、 $\dots$ 、 $\aleph_0$ 個の、 $\aleph_0$ 種類あり、濃度が非可算なモデルは、その濃度と同じ数の連結成分を持っているので、みな同型となる。 ■

群 G が無限の時には、有限の時のような簡単な構造にはなっていない。例えば、 $M \models T(\text{trm})$ と $a \in M$ にたいして、 a の M での連結成分という概念が曖昧になる。

$$\{Q_{g_0}(x, a) \wedge Q_{g_0}(a, b)\} \cup \{\neg R_g(a, b, x) | g \in G\}$$

$(a, b \in M)$ という部分タイプが、コンパクト性定理より解 c をもつので、 a, c を通る直線、 a, b を通る直線は存在するのに、その2直線の角度を表す G の元が存在しないということがある。つまり、 a を含んだ「連結成分」(もとの擬平面と同型な構造) が無限個あるようなモデルも存在する。

このようなときは、同一直線上にある2点 a, b で、その距離も G の元で表せるようなものをとってくると、 $\text{dcl}(a, b)$ が素モデルになるので、それを基準にモデルの構造を考えていくことになる。

有限群の trigonometry の理論の次に簡単な理論は、2つの素モデルの交わりを高々1点にするような trigonometry の理論である。これについては、例えば、各 n について n 角形が有限種類しかないような trigonometry (everywhere finitely defined trigonometry という。[3] 参照) や、h.p. polygon を持たないような trigonometry (いかなる射影平面上の trigonometry にも埋め込まないような trigonometry。[4] 参照) などが Sudoplatov によって調べられている。

参考文献

- [1] Ehud Hrushovski, "A stable $\aleph_0$ -categorical pseudoplane," Unpublished notes, 1988.
- [2] S. V. Sudoplatov, "Group polygonometries and related algebraic systems (an informative survey)," Contributions to general algebra, 11 (Olo-

mouc/Velké AčceNi Kārovice, 1998), 191-210, Heyn, Klagenfurt, 1999.

[3] S. V. Sudoplatov, "The number of models of theories of everywhere finitely determined polygonometries," *Sibirsk. Mat. Zh.* 40 (1999), no. 3, 689-694, iv (Russian); translation in *Siberian Math. J.* 40 (1999), no. 3, 590-594.

[4] S. V. Sudoplatov, " ω -stable trigonometries on a projective plane," *Mat. Tr.* 5 (2002), no. 1, 135-166 (Russian).