

超越数を2つの超越数の和で表現する

学習院大・理 豊田雅孝 (MASANORI TOYODA)

§1. Introduction

実数の部分集合 $E, F \subset \mathbb{R}$ に対し

$$E + F := \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$$

とおく。この記法を用いて表現できる有名な定理をいくつか思いつくままにあげてみれば、

Lagrange の定理 (1772):

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2.$$

Goldbach 予想 (1742):

$$(2\mathbb{N})^{\geq 6} = P + P.$$

Vinogradov の 3 素数定理 (1937):

$$\#\{(2\mathbb{N} + 1) \setminus (P + P + P)\} < \infty.$$

Erdős の定理 (1962):

$$R = L + L.$$

以上において、 P は 奇素数全体の集合を、 L は Liouville 数全体の集合を表わす。さらにまた、Mahler による実数の分類

$$R = A \cup S \cup T \cup U \text{ (disjoint union)}$$

に関して、

$$(S+T) \cap L \neq \phi$$

が成り立つ ([T])。この結果を拡張して、超越数の世界の様子をもっとくわしく知りたい。これが私の希望 (の 1つ) である。

MAIN THEOREM. $S \cup T \subset T+L.$

すなわち、 U 数でない超越数は 1つの T 数と 1つの Liouville 数との和で表わせる。

したがってたとえば e^α ($\alpha \in A, \neq 0$) や π は T 数と Liouville 数との和に分解できる ($e^\alpha \in S$, $\pi \in S \cup T$ であるから)。[T] の結果は

$$S \cap (T+L) \neq \phi$$

と表現することもできる ($\tau \in T \Rightarrow -\tau \in T$ であるから)。
 それゆえ 今回の主定理は $[T]$ の結果の拡張になっている。

§2. 主定理の証明 (アウトライン)

その最大のポイントは、次の命題を示すことにある。

PROPOSITION. ζ 数でない任意の超越数 θ に対して、以下の性質 (a), (b) をみたす 1 つの実数 ξ が存在する:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \exists \left\{ \frac{a_{nt}}{b_{nt}} \right\}_{t=1}^{\infty}$: 異なる有理数から成る列 ;

$$\left| (\xi - \theta) - \frac{a_{nt}}{b_{nt}} \right| < e^{-b_{nt}} \quad (t=1, 2, \dots),$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } \left| \xi - \gamma_{nt} \right| \asymp H(\gamma_{nt})^{-\chi_n} \quad (t=1, 2, \dots).$$

ただしここで

$$\gamma_{nt} := 2^{\frac{1}{n-1}} + \frac{a_{nt}}{b_{nt}},$$

$$\chi_n := (n^2 + n + 1) \cdot K(n) + n + 2,$$

$$K(n) := \max \{ k_n(\theta), n+1 \}.$$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N} \exists \lambda_n > 0 \forall \beta \in A_n \setminus \{\gamma_{it}\}_{i \geq 2, t \geq 1}; \\ |\xi - \beta| \geq \lambda_n \cdot H(\beta)^{-\lambda_n}.$$

この命題の証明は長い。が、[T]の Prop. 1 のそれと同じようにしてできる。

Main Theorem は、この命題から容易に出る:

(a) の第1の不等式から $(\xi - \theta) \in L$, したがって $(\theta - \xi) \in L$.

(a) の第2の評価式と (b) とを組み合わせると

$$\chi_n(\xi) = \chi_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

χ_{n+1} は n について単調増加ゆえ $\kappa_n(\xi) = \chi_n(\xi) = \chi_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$. それゆえ

$$\xi \in T$$

である!! (ここで T 数の存在が示されることに注意。) ゆえに

$$\theta = \xi + (\theta - \xi) \in T + L.$$

Remark. [T]の結果 " $(S+T) \cap L \neq \emptyset$ " は 形の
上では W.M. Schmidt による T 数の存在定理 " $T \neq \emptyset$ "
を含んでいるが、その証明において T 数の存在を

本質的に使っている。しかし、今回の主定理では上で見たようにその証明の中で“ $T \neq \phi$ ”も示されており、それは本当の意味で T 数の存在定理を含んでいるといえる。

§3. $\mathbb{R} = E + F$ であるための条件

$E, F \subset \mathbb{R}$ とする。次の補題は、任意の実数が E に属する数と F に属する数との和に分解できるための必要十分条件を与える。

実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$F_t := \{t - y \mid y \in F\}$$

とおけば、

LEMMA.

$$\mathbb{R} = E + F \iff \forall t \in \mathbb{R}; E \cap F_t \neq \phi.$$

この補題はほとんど自明であるが、しかし大変有用である。この条件をみたす E, F の組の例をいくつか示そう：

- (1) $E \cdots \cdots E^c = \mathbb{R} \setminus E$ が可算となる集合,
 $F \cdots \cdots$ 非可算集合.

(2) E E^c が 零集合 となる集合,
 F 正の測度をもつ集合, または
 非可測集合.

(3) E, F とともに 残留集合 (residual set),
 すなわち、第1類集合の補集合.

(2) の E (したがって F) の具体的な おもしろい例
 としては、 $E = \{ \text{タイプ } 1 \text{ の } S \text{ 数} \},$

$$E = \{ \text{非有理度 } 2 \text{ の 実数} \}$$

などがあげられる (注. 無理数 ξ の非有理度 $= \lambda_1(\xi) = \kappa_1(\xi)$).

(3) の具体的な例としては、

$$E = F = \mathbb{L}$$

があげられる。これが Erdős の定理である。

(1), (2), (3) の E, F の組は、それぞれ集合論的,
 測度論的, 位相的な意味で「大きい」集合の組で
 ある。「大きい」から $E + F = \mathbb{R}$ となるのであろう。

Mahler の定理 “異なるクラスに属する2つの超越数
 は代数的独立である” によつて

$$T + L \subset \mathbb{R} \setminus A$$

であるが、ここで等号が成立するかどうか？ すなわち主定理の条件「 U 数でない」を除けるかどうか？今のところ技術的な困難があってこの条件を除くことはできないけれども、おそらく " $T+L = \mathbb{R} \setminus A$ " であらうと思われる。さらにまた、 $S+T$, $S+L$ はどのような集合なのか？ 位相的に「小さい」 S, T からつくられる $S+T$ が位相的に「大きい」 L を含むことができるかどうか？ これらの問題は今後の研究課題である。

Remark. 主定理から特に " $S \subset T+L$ " が成り立つ。すなわち、測度論的に「小さい」 T, L からつくられる $T+L$ が測度論的に「大きい」 S を含むという現象が起きている。

REFERENCE

- [T] M. Toyoda, Mahler の S 数, T 数, U 数の代数的独立性について, 数理研講究録 657 (1988), 85-91.