

Stationary phase method with estimate of remainder term over a space of large dimension

藤原大輔 (D. Fujiwara)

学習院大学理

1993 年 10 月 5 日

1 鞍部点法.

鞍部点法とは、次のような大きなパラメター ν を含む振動型の積分の値を $\nu \rightarrow \infty$ のときに漸近的に知る方法である:

$$I(S, a, \nu) = \int_{R^d} e^{-i\nu S(x)} a(x) dx.$$

ここで $S(x)$ は実数値の C^∞ 関数で位相関数とよばれ、 $a(x)$ は振幅関数と呼ばれる C^∞ 関数であり、 ν は、大きな正数パラメターである。最も簡単な場合、 $a(x) \in C_0^\infty(R^d)$ で $S(x)$ の特異点はただ1点 x^* だけで、そこではMorse型の特異点であるすなわち $Hess S(x^*)$ は非退化とする。この時次の漸近式が成立することとは、良く知られている。

$$I(S, a, \nu) = \left(\frac{2\pi}{i\nu} \right)^{d/2} [\det\{Hess S(x^*)\}]^{-1/2} (e^{-i\nu S(x^*)} a(x^*) + r_d(\nu)). \quad (1)$$

鞍部点法は、ファインマン経路積分との関係がふかいので (cf. [1], [3], [2] and [4]) 我々は、 $d \rightarrow \infty$ のとき $\nu^{d/2+1} r_d(\nu)$ を評価する事を問題とする。この問題は[5]に詳しく論じられ、応用は、たとえば、[1], [3]と[4]にある。

2 主結果.

我々が扱う振動型積分は、次の形をしている。

$$I(\{t_j\}, S, a, \nu)(x_L, x_0) = \prod_{j=1}^L \left(\frac{\nu i}{2\pi t_j} \right)^{1/2} \int_{R^{L-1}} e^{-i\nu S(x_L, \dots, x_0)} a(x_L, \dots, x_0) \prod_{j=1}^{L-1} dx_j. \quad (2)$$

ここで ν は大きな正パラメターで $\{t_j\}$ は小さい正のパラメターである。

我々の仮定は、位相関数に関するものと振幅関数に関するものと2つがある。まず位相関数に関する仮定は、つぎのとうり。

Assumption 2.1 $S(x_L, \dots, x_0)$ は

$$S(x_L, \dots, x_0) = \sum_{j=1}^L S_j(t_j, x_j, x_{j-1}) \quad (3)$$

のかたちをしている。ここで

$$S_j(t_j, x_j, x_{j-1}) = \frac{|x_j - x_{j-1}|^2}{2t_j} + t_j \omega_j(t_j, x_j, x_{j-1}) \quad (4)$$

であり任意の $m \geq 2$ にたいして正数 κ_m が存在し $2 \leq \alpha + \beta \leq m$ であるなら

$$\sup_{x_j, x_{j-1}} |\partial_{x_j}^\alpha \partial_{x_{j-1}}^\beta \omega_j(t_j, x_j, x_{j-1})| \leq \kappa_m \quad (5)$$

という評価がなりたつものとする。

この仮定のもとでは、 $T_L = \sum_{j=1}^L t_j$ が十分に小さければ関数 $(x_{L-1}, \dots, x_1) \rightarrow S(x_L, x_{L-1}, \dots, x_1, x_0)$ の特異点はただ1つである。それを $(x_{L-1}^*, \dots, x_1^*)$ と書く。また $S(x_L, x_{L-1}^*, \dots, x_1^*, x_0)$ を省略して $S(\overline{x_L}, x_0)$ と書く。また、特異点での Hessian を $H + W$ と書く、ただし、

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} & -\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{t_2} & \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} & -\frac{1}{t_3} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{t_3} & \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} & -\frac{1}{t_4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

であり、

$$W = \begin{pmatrix} t_1 \partial_{x_1}^2 \omega_1 + t_2 \partial_{x_1}^2 \omega_2 & t_2 \partial_{x_1} \partial_{x_2} \omega_2 & 0 & \dots \\ t_2 \partial_{x_1} \partial_{x_2} \omega_2 & t_2 \partial_{x_2}^2 \omega_2 + t_3 \partial_{x_2}^2 \omega_3 & t_3 \partial_{x_2} \partial_{x_3} \omega_3 & \dots \\ 0 & t_3 \partial_{x_2} \partial_{x_3} \omega_3 & t_3 \partial_{x_3}^2 \omega_3 + t_4 \partial_{x_3}^2 \omega_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

である。 H の行列式については、

$$\det H = \frac{T_L}{t_1 t_2 \dots t_L} \neq 0.$$

が成り立つ。

我々の第一の結果は、 $a(x) = 1$ の場合に関するものである。

Theorem 2.1 仮定 *Assumption 2.1* が成り立つとする。正数 δ_1 が存在して $T_L = t_1 + \dots + t_L \leq \delta_1$ のときには、

$$I(\{t_j\}, S, 1, \nu)(x_L, x_0) = \left(\frac{\nu i}{2\pi T_L} \right)^{1/2} e^{-i\nu S(\overline{x_L}, x_0)} [\det(I + WH^{-1})]^{-1/2} (1 + r(\nu, x_L, x_0)). \quad (6)$$

ここで剰余項 $r(\nu, x_L, x_0)$ は、次の評価をみたす。任意の $K \geq 0$ にたいして正定数 C_K が存在して $|\alpha_0|, |\alpha_L| \leq K$ であるかぎり

$$|\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_L}^{\alpha_L} r(\nu, x_L, x_0)| \leq C_K T_L^3 \nu^{-1}. \quad (7)$$

Remark 2.1 ここで δ_1 と C_K は L と無関係にとれる。したがって $T_L \leq \delta_1$ である限り $L \rightarrow \infty$ のときも $r(\nu, x_L, x_0)$ は有界にとどまる。

一般の振幅関数 $a(x)$ をもつ場合の結果を述べるにはもっと準備が必要である。

$1 \leq k \leq l \leq L$ となる番号 k, l をとる。すると $t_{k+1} + \dots + t_l$ が十分小さいならば、関数 $(x_{l-1}, \dots, x_{k+1}) \rightarrow \sum_{j=k+1}^l S_j(t_j, x_j, x_{j-1})$ の特異点はただ一つであるからこれを $(x_{l-1}^*, \dots, x_{k+1}^*)$ と書く。これは、 x_l と x_k の関数である。 $a(x_L, \dots, x_l, x_{l-1}^*, \dots, x_{k+1}^*, x_k, \dots, x_0)$ を $a(x_L, \dots, x_{l+1}, \overline{x_l}, \overline{x_k}, x_{k-1}, \dots, x_0)$ と書く。

つぎに振幅関数に関する仮定を記すことにする。

Assumption 2.2 $K \geq 0$ の任意の K にたいして定数 A_K が存在して次のことが成り立つ: (i) $|\alpha_j| \leq K$ for $j = 0, 1, \dots, L$, ならば

$$|\prod_{j=0}^L \partial_{x_j}^{\alpha_j} a(x_L, \dots, x_0)| \leq A_K. \quad (8)$$

(ii) 数列 $\{j_1, \dots, j_s\}$ を

$$0 = j_0 < j_1 - 1 < j_1 < j_2 - 1 < \dots < j_s - 1 < j_s < L$$

となるようなものとすれば、 $j = 0, j_1 - 1, j_1, \dots, j_s - 1, j_s, L$ にたいして $|\alpha_j| \leq K$ であるかぎり、

$$|\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_L}^{\alpha_L} \prod_{k=1}^s \partial_{x_{j_k-1}}^{\alpha_{j_k-1}} \partial_{x_{j_k}}^{\alpha_{j_k}} a(\overline{x_L, x_{j_s}, x_{j_s-1}, x_{j_s-1}, \dots, x_{j_1-1}, x_{j_0}})| \leq A_K. \quad (9)$$

次の結果を得る。

Theorem 2.2 仮定 *Assumption (2.1)* と *Assumption (2.2)* が成り立つものとする。ある $0 < T_L \leq \delta_1$ を満たす δ_1 があって

$$\begin{aligned} I(\{t_j\}, S, a, \nu)(x_L, x_0) \\ = \left(\frac{\nu i}{2\pi T_L} \right)^{1/2} e^{-i\nu S(\overline{x_L, x_0})} [\det(I + H^{-1}W)]^{-1/2} (a(\overline{x_L, x_0}) + r(\nu, x_L, x_0)), \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $r(\nu, x_L, x_0)$ は、次の評価を満たす: $K \geq 0$ を任意の正整数とすると正定数 C_K と $M(K)$ をとって $|\alpha_0|, |\alpha_L| \leq K$ である限り

$$|\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_L}^{\alpha_L} r(\nu, x_L, x_0)| \leq C_K T_L \nu^{-1} A_{M(K)} \quad (10)$$

が成立するようにできる。

Remark 2.2 δ_1 , C_K や $M(K)$ は L に無関係にとれる。従って $T_L = t_1 + \dots + t_L \leq \delta_1$ である限りたとえ $L \rightarrow \infty$ でも $r(\nu, x_L, x_0)$ は有界にとどまる。

詳しい議論は、[5] にある。

参考文献

- [1] D. Fujiwara. The feynman path integrals as improper integrals over the sobolev space. In *Proceedings of Journées d'équations aux dérivées partielles, St. Jean de Monts 1990 Société Mathématiques de France*, 1990.
- [2] D. Fujiwara. Remarks on convergence of the feynman path integrals. *Duke Math. J.*, 47:559–600, 1980.
- [3] D. Fujiwara. Some feynman path integrals as oscillatory integrals over a sobolev manifold. In *Proc. International conference on Functional Analysis in memory of Professor Kôzaku Yosida.*, 1992.
- [4] D. Fujiwara. Some feynman path integrals as oscillatory integrals over a sobolev manifold. 1992. Preprint.
- [5] D. Fujiwara. The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension. *Nagoya Math. J.*, 61–97, 1991.