

形式的 KZ 方程式の表現と多重ゼータ値の関係式

早稲田大学大学院理工学研究科 大井 周 (Shu Oi)¹
Graduate School of Science and Engineering,
Waseda University

1 イントロダクション

形式的 KZ 方程式は $\mathbf{P}^1$ の n 点の配置のモジュライ空間上の形式的な微分方程式であり, 適当な変数変換によって $n-3$ 変数の Fuchs 型方程式と見なすことが出来る. 特に 1 変数の場合について, その解が 1 変数多重対数関数の形式的級数として, 接続係数が Drinfel'd associator と呼ばれる多重ゼータ値の自然な母関数で書かれることから数論幾何の分野で深く研究されている.

一方で 1 変数形式的 KZ 方程式は $\mathbf{P}^1$ 上 $0, 1, \infty$ に確定特異点を持つ Fuchs 型の最も普遍的な方程式と考えることが出来る. 従ってその表現を考えることにより個々の Fuchs 型方程式に関する解析的な性質が形式的 KZ 方程式の持つ代数構造と結びつき, Fuchs 型微分方程式の研究において整数論との関係などの新しい視点をもたらす.

本稿ではまず 1 変数形式的 KZ 方程式の持つ代数構造について解説する. その後 Gauss の超幾何微分方程式に対応する表現を求め, そこから導かれる多重ゼータ値の関係式, 多重対数関数の関数等式を紹介する. 本稿の内容は大井 ([O]) を元にしており, 定理の証明の詳細などはそちらを参照していただきたい.

2 1 変数形式的 KZ 方程式の代数構造

まず, 1 変数形式的 KZ 方程式とその解の満たす代数構造について説明する. これに関しては Reutenauer([R]), 奥田-上野 ([OkU1]), 井原-金子-Zagier([IKZ]) 等に詳しいが, ここでは特に奥田-上野の定式化に則って説明する.

¹2009 年 4 月より早稲田大学理工学術院 (Faculty of Science and Engineering, Waseda University) 所属

2.1 1変数形式的 KZ 方程式

$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(X_0, X_1) = \mathbf{C}\{X_0, X_1\}$ を非可換な形式元 X_0, X_1 で生成される $\mathbf{C}$ 上の自由 Lie 環, $\mathcal{U}(\mathfrak{X}) = \mathbf{C}\langle X_0, X_1 \rangle$ をその普遍展開環, すなわち X_0, X_1 を変数とする非可換多項式環とする. $\mathfrak{X}$ は次数付き Lie 環であり, $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ もその次数を継承して次数付き代数となる ($\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の次数は通常の話の長さに関するものである). また, $\mathfrak{h} = \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{X}) = \mathbf{C}\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ を $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の通常の数にに関する完備化, すなわち X_0, X_1 を変数とする非可換形式的べき級数環とする.

$\mathfrak{X}$ に値を持つ, $\mathbf{P}^1$ 上 $0, 1, \infty$ に確定特異点を持つ Fuchs 型微分方程式

$$\frac{dG}{dz} = \left(\frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{1-z} \right) G \quad (1)$$

を (1 変数) 形式的 KZ 方程式と呼ぶ.

この微分方程式の解は $\mathfrak{h}$ に値を持つ $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上の多価解析関数となる.

2.2 自由シャッフル代数

形式的 KZ 方程式の解を反復積分を用いて構成するため, $\mathfrak{h}$ の双対である微分形式のなす代数 $\mathfrak{h}$ を考える. $\mathfrak{h} = \mathbf{C}\langle x_0, x_1 \rangle$ を文字 x_0, x_1 で生成される非可換多項式環とする. $\mathfrak{h}$ の通常の数にに関する連結による積を $\circ$ で表す (場合によっては省略する) し, 単位元 (空語) を $\mathbf{1}$ とする. また, $\circ$ とは異なる $\mathfrak{h}$ 上のシャッフル積 $\sqcup$ を以下で定める.

$$\mathbf{1} \sqcup w = w \sqcup \mathbf{1} = w,$$

$$(a_1 \circ w_1) \sqcup (a_2 \circ w_2) = a_1 \circ (w_1 \sqcup (a_2 \circ w_2)) + a_2 \circ ((a_1 \circ w_1) \sqcup w_2).$$

このとき $(\mathfrak{h}, \sqcup)$ は可換結合的代数であることが示される. これを x_0, x_1 で生成される自由シャッフル代数と呼ぶ.

$\mathfrak{h}$ の $\circ$ に関する部分代数 $\mathfrak{h}^0 = \mathbf{C}\mathbf{1} + \mathfrak{h}x_1$, $\mathfrak{h}^{10} = \mathbf{C}\mathbf{1} + x_0\mathfrak{h}x_1$ を考える. すなわち $\mathfrak{h}^0$ は $\mathfrak{h}$ のうち x_0 で終わらない元全体, $\mathfrak{h}^{10}$ は x_1 で始まらず x_0 で終わらない元全体であるが, これらは共に $\mathfrak{h}$ の $\sqcup$ -部分代数になっている. この $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^0$, $\mathfrak{h}^{10}$ の間には次の構造定理が成立することが知られている.

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}^0 \sqcup x_0^{\sqcup n} (= \mathfrak{h}^0[x_0]), \quad (2)$$

$$= \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} \mathfrak{h}^{10} \sqcup x_0^{\sqcup m} \sqcup x_1^{\sqcup n} (= \mathfrak{h}^{10}[x_0, x_1]). \quad (3)$$

即ち $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}^0$ 係数の x_0 の $\sqcup$ -多項式環, $\mathfrak{h}^{10}$ 係数の x_0, x_1 の $\sqcup$ -多項式環と同型である. それぞれの同型に対し, 定数項を取り出す写像を正則化写像と呼び, $\text{reg}^0, \text{reg}^{10}$ で表す.

$$\text{reg}^*(w) = \text{分解 (2), (3) における定数項} \quad (* = 0, 10)$$

特に, reg^0 に対して次が成立することが知られている.

$$w \circ x_0^n = \sum_{j=0}^n \text{reg}^0(w \circ x_0^{n-j}) \sqcup x_0^j \quad w \in \mathfrak{h}^0, \quad (4)$$

$$\text{reg}^0(w \circ x_1 \circ x_0^n) = (-1)^n (w \sqcup x_0^n) \circ x_1 \quad n \geq 0, w \in \mathfrak{h}. \quad (5)$$

なお, このシャッフル代数 $\mathfrak{h}$ には Hopf 代数構造が入り, $\mathfrak{h}$ の次数付き双対 Hopf 代数となっている.

2.3 反復積分と多重対数関数

次に, $\mathfrak{h}$ の元に対して反復積分を定義する. $D = \{z = 0\} \cup \{z = 1\} \cup \{z = \infty\} \subset \mathbf{P}^1$ とする. 同一視

$$x_0 = \frac{dz}{z}, \quad x_1 = \frac{dz}{1-z}$$

によつて $x_0, x_1 \in \Omega_{\mathbf{P}^1}(\log D)$ ($= D$ に極を持つ対数 1 次微分形式全体) とみなす. この同一視のもと, $\mathfrak{h}$ の元 $w = \omega_0 \circ \cdots \circ \omega_s$, $\omega_i = x_0$ or x_1 に対して反復積分 $\int w$ を

$$\int_a^b \omega_0 \circ \cdots \circ \omega_s = \int_a^b \omega_0(t) \int_a^t \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_s \quad (6)$$

で定める. 但し $\omega_i(t)$ は ω_i における z を t に置き換えた t に関する 1 次微分形式であるとし, $\int 1 = 1$ (定数関数) とする. 反復積分の値は明らかに積分路のホモトピー類にのみ依存し, $\mathbf{P}^1 - D$ 上の多価解析関数を定める. 特に φ が $\mathfrak{h}^0$ に属する時は積分の始点を 0 にすることが出来る. また, 反復積分は $\sqcup$ 準同型, すなわち $\int w_1 \sqcup w_2 = (\int w_1)(\int w_2)$ を満たす.

$\mathfrak{h}^0$ の語 $w = x_0^{k_1-1} x_1 \cdots x_0^{k_r-1} x_1$ に対し, (1 変数) 多重対数関数 (multiple polylogarithm, MPL) $\text{Li}(w; z)$ を以下の反復積分で定義する.

$$\text{Li}(w; z) = \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z) = \int_0^z x_0^{k_1-1} \circ x_1 \circ \cdots \circ x_0^{k_r-1} \circ x_1. \quad (7)$$

一般の $\mathfrak{h}^0$ の元に対しては線型に拡張する. $\text{Li}(w; z)$ は $\mathbf{P}^1 - D$ 上の多価解析関であり, $z = 0$ で正則でその近傍で

$$\text{Li}(w; z) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_r > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \quad (8)$$

と級数展開される分枝を持つ. この展開の右辺の級数は $|z| < 1$ で絶対収束する. $w \in \mathfrak{h}^{10} \Leftrightarrow k_1 \geq 2$ のとき, $z \rightarrow 1-0$ で収束し, 多重ゼータ値 (multiple zeta value, MZV)

$$\begin{aligned} \zeta(w) = \zeta(k_1, \dots, k_r) &= \lim_{z \rightarrow 1-0} \text{Li}(w; z) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \\ &= \int_0^1 x_0^{k_1-1} \circ x_1 \circ \dots \circ x_0^{k_r-1} \circ x_1 \end{aligned} \quad (9)$$

を定める.

低次の場合の多重対数関数は次のような関数である.

$$\begin{aligned} \text{Li}(1; z) &= 1, \\ \text{Li}(x_1; z) &= \text{Li}_1(z) = \int_0^z \frac{dz}{1-z} = -\log(1-z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}, \\ \text{Li}(x_0 x_1; z) &= \text{Li}_2(z) = \int_0^z \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{dz}{1-z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^2}, \quad \text{Euler の dilogarithm} \\ \text{Li}(x_0^{n-1} x_1; z) &= \text{Li}_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^n}, \quad \text{polylogarithm} \\ \text{Li}(x_1 x_1; z) &= \text{Li}_{1,1}(z) = \int_0^z \frac{dz}{1-z} \text{Li}(x_1; z) = \frac{\log^2(1-z)}{2} = \sum_{m_1 > m_2 > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1 m_2}, \\ \text{Li}(x_1^n; z) &= \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_n}(z) = \frac{(-\log(1-z))^n}{n!} = \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1 \dots m_n}. \end{aligned}$$

一般の $\mathfrak{h}$ の語 $w x_0^n$, $w \in \mathfrak{h}^0$ に対して多重対数関数を

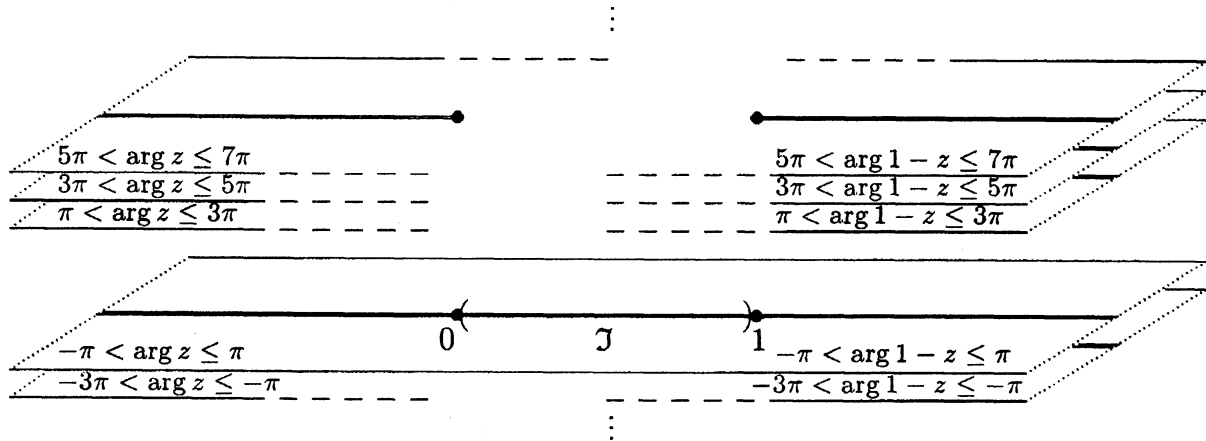
$$\text{Li}(w x_0^n; z) = \sum_{j=0}^n \text{Li}(\text{reg}^0(w x_0^{n-j}); z) \frac{\log^j z}{j!} \quad (10)$$

と定める. この定義は $\text{Li}(x_0; z) = \log z$ とし, $\sqcup$ -準同型 $\text{Li}(w \sqcup w'; z) = \text{Li}(w; z) \text{Li}(w'; z)$ で $\mathfrak{h}$ 全体に拡張することに等しい. このとき, 多重対数関数は語 $w \in \mathfrak{h}$ に対しても次の微分漸化式を満たす ($w \in \mathfrak{h}^0$ に対して満たすことは定義より明らか).

$$\frac{d \text{Li}(x_0 w; z)}{dz} = \frac{1}{z} \text{Li}(w; z), \quad (11)$$

$$\frac{d \text{Li}(x_1 w; z)}{dz} = \frac{1}{1-z} \text{Li}(w; z). \quad (12)$$

語 $w \in \mathfrak{h}$ に対して $\text{Li}(w; z)$ は $\mathbf{P}^1 - D$ 上の多価解析関数である. 以下のようにカットを入れると単連結領域で一価正則で, 分枝が $\text{Li}(w; z) = \sum \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$, $\log z = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$ の展開を持つ区間 $\mathcal{J}$ を含む領域が存在する. そこでの値を主値と考える.



多重対数関数の解析接続について、以下の命題が成立する。

命題 1. K を $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の普遍被覆空間のコンパクト部分集合とする。このとき K にのみ依存する定数 M_K が存在し、任意の語 $w \in \mathfrak{h}$ に対し

$$|\mathrm{Li}(w; z)| < M_K \quad \forall z \in K \quad (13)$$

となる。

2.4 語の重み, 深さ, 高さ

$\mathfrak{h}$ の語 w の重み $|w|$, 深さ $d(w)$, 高さ $h(w)$ を次で定める。

$$|w| = w \text{ の文字数}, \quad (14)$$

$$d(w) = w \text{ 中の } x_1 \text{ の数}, \quad (15)$$

$$h(w) = (w \text{ 中の } x_1 x_0 \text{ の数}) + 1. \quad (16)$$

重み, 深さ, 高さを固定した $\mathfrak{h}^*$ ($*$ = 0, 10) の語全体の和を g_* , 対応する多重対数関数を G_* で表すことにする。すなわち

$$g_*(k, n, s) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{h}^* \text{ 語}, |w|=k, \\ d(w)=n, h(w)=s}} w, \quad (17)$$

$$G_*(k, n, s; z) = \mathrm{Li}(g_*(k, n, s); z) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{h}^* \text{ 語}, |w|=k, \\ d(w)=n, h(w)=s}} \mathrm{Li}(w; z). \quad (18)$$

このとき、容易に分かるとおり

$$z \frac{d}{dz} G_{10}(k, n, s; z) = G_0(k-1, n, s; z) \quad (19)$$

が成立する.

語の高さは大野-Zagier([OZ]) によって導入された概念で, 本来の定義は $w = x_0^{k_1-1} x_1 \cdots x_0^{k_r-1} x_1 \in \mathfrak{h}^{10}$ に対して $h(w) = \#\{i | k_i \geq 2\}$ と定める. 上記の定義は $w \in \mathfrak{h}^{10}$ においてはこの定義と一致する. また, $h(w) = (w \text{ 中の } x_0 x_1 \text{ の数})$ と定めても計算上の手間が増えるだけで上記の定義との間に本質的な差はない.

2.5 形式的 KZ 方程式の基本解

以上の準備のもと, 形式的 KZ 方程式

$$\frac{dG}{dz} = \left(\frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{1-z} \right) G$$

の基本解を構成する. $\mathfrak{h}$ 値解析関数 $H_0(z)$ を

$$H_0(z) = \sum_w \text{Li}(w; z) W \quad (20)$$

で定める. ここで和は $\mathfrak{h}$ の語全てに渡って取り, W は w の x_0, x_1 を X_0, X_1 で置き換えた $\mathfrak{h}$ の語とする. このとき $H_0(z)$ は形式的 KZ 方程式の漸近挙動 $H_0(z) z^{-X_0} \rightarrow \mathbf{I}$ ($z \rightarrow 0$ in $\mathfrak{J}$) を満たす唯一の解であり, 反復積分解とみなすことが出来る (形式的 KZ 方程式は Fuchs 型なので, 確定特異点の近傍での漸近挙動を指定すれば解は一意的に定まる). さらに

$$H_0(z)^{-1} = \sum_w \text{Li}(S(w); z) W \quad (21)$$

が成立する. ここで S は $\mathfrak{h}$ の $\circ$ -反自己同型 $S(x_0) = -x_0, S(x_1) = -x_1$ であり, $\mathfrak{h}$ の Hopf 代数としての対合射に相当する.

さらに, $H_1(z)$ を形式的 KZ 方程式の漸近挙動 $H_1(z)(1-z)^{X_1} \rightarrow \mathbf{I}$ ($z \rightarrow 1$ in $\mathfrak{J}$) を満たす唯一の解とする. このとき $\tau: \mathfrak{h}$ の $\circ$ -自己同型を $\tau(x_0) = x_1, \tau(x_1) = x_0$ で定めると,

$$H_1(z) = \sum_w \text{Li}(\tau(w); z) W$$

と書くことが出来る. $H_0(z)$ と $H_1(z)$ の間の接続係数を Drinfel'd associator と呼び, $\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1)$ と表記する. 即ち

$$\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1) = H_1^{-1}(z) H_0(z) \quad (22)$$

である. この Drinfel'd associator $\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1)$ は次のように正則化写像を用いて多重ゼータ値の形式的な級数として表示される事が知られている.

$$\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1) = \sum_w \zeta(\text{reg}^{10}(w)) W. \quad (23)$$

2.6 正規化された基本解, 多点の場合

1 変数形式的 KZ 方程式の一般論に関して, 最後に多変数化を睨んで正規化された基本解という概念と, 特異点を $0, 1, \infty$ より増やした多点の場合について紹介する. 2 変数形式的 KZ 方程式については本講究録収録の大井-上野 [OiU] "2 変数 KZ 方程式の接続問題と 2 変数多重対数関数の調和積" にて詳しく扱っている.

2.6.1 形式的 KZ 方程式の正規化された基本解

1 変数形式的 KZ 方程式の場合, 値を持つ Lie 環は自由 Lie 環であり, その双対である微分形式のなす代数も自由シャッフル代数であった. そのため自由シャッフル代数の構造定理と正則化写像を用いて形式的 KZ 方程式の基本解を簡単に構成することが出来たが, 一般に多変数になると Lie 環も微分形式のなす代数も自由ではなくなり, 構造定理を使用することが出来ない. そこで, 自由シャッフル代数の構造定理を用いずに形式的 KZ 方程式の解を構成する方法として, 原点で正規化された基本解という概念を紹介する.

形式的 KZ 方程式 (1) が

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(z) &= \hat{\mathcal{L}}(z)z^{X_0}, \\ \hat{\mathcal{L}}(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_s(z), \quad \hat{\mathcal{L}}_0(z) = \mathbf{I},\end{aligned}$$

$s > 0$ に対し $\hat{\mathcal{L}}_s(z)$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の斉 s 次パートに値を持つ多価解析関数で, $z = 0$ で正則で $\hat{\mathcal{L}}_s(0) = 0$ を満たす, という形の解が存在するとする. このとき $\hat{\mathcal{L}}(z)$ は方程式

$$\frac{d}{dz} \hat{\mathcal{L}}(z) = \frac{[X_0, \hat{\mathcal{L}}(z)]}{z} + \frac{X_1 \hat{\mathcal{L}}(z)}{1-z}$$

を満たす (ブラケット $[,]$ は $\hat{\mathcal{L}}(z)$ の s のパートに関して取るものとする). 従って, $z = 0$ での特異性に注意して $\hat{\mathcal{L}}_0(z) = \mathbf{I}$ から順に

$$\hat{\mathcal{L}}_{s+1}(z) = \int_0^z \left(\frac{dz}{z} [X_0, \hat{\mathcal{L}}_s(z)] + \frac{dz}{1-z} X_1 \hat{\mathcal{L}}_s(z) \right)$$

によって順次 $\hat{\mathcal{L}}_{s+1}(z)$ を定めていくことにより, $\hat{\mathcal{L}}(z)$ を一意に定める事が出来る. この $\mathcal{L}(z)$ を形式的 KZ 方程式の原点で正規化された基本解と呼ぶ. この正規化された基本解は 2 変数以上の形式的 KZ 方程式に対しても同様に求めることが出来る.

2.6.2 多点の場合

次に、形式的 KZ 方程式を普遍的な Fuchs 型微分方程式と見て、特異点を増やす形で拡張を考える。この場合も特異点が $0, 1, \infty$ の場合とほぼ同様に解を構成することが出来、超対数関数 (hyperlogarithm) を用いて記述される。この場合も特異点を 1 の原始 n 乗根にとれば Dirichlet の L 関数と対応して整数論との関係があり (多重 L 値), また特に $0, 1, \frac{1}{w}, \infty$ に特異点を持つ場合 (w はパラメータ) が 2 変数形式的 KZ 方程式を考える場合に本質的である。ここでは正規化された基本解の形での記述を与えるが、この場合も考える Lie 環や微分形式のなす代数は自由 Lie 環、自由シャッフル代数であり、構造定理を用いた解の構成も可能である。

$a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C} - \{0\}$ を相異なる複素数, $\mathfrak{h}(X_0, X_1, \dots, X_n)$ を $X_0, X_1, \dots, X_n$ で生成される自由 Lie 環の普遍展開環 (の完備化) とし, $\mathfrak{h}(X_0, X_1, \dots, X_n)$ 上の方程式

$$\frac{dG}{dz} = \left(\frac{X_0}{z} + \frac{a_1 X_1}{1 - a_1 z} + \dots + \frac{a_n X_n}{1 - a_n z} \right) G \quad (24)$$

を考える。この方程式の原点で正規化された基本解は

$$\mathcal{L}(z) = \hat{\mathcal{L}}(z) z^{X_0}, \quad \hat{\mathcal{L}}(z) \text{ は原点で正則, } \hat{\mathcal{L}}(0) = \mathbf{I},$$

$$\hat{\mathcal{L}}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_s(z), \quad \hat{\mathcal{L}}_0(z) = \mathbf{I},$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{s+1}(z) = \int_0^z \left(\frac{dz}{z} [X_0, \hat{\mathcal{L}}_s(z)] + \sum_{i=1}^n \frac{a_i dz}{1 - a_i z} X_i \hat{\mathcal{L}}_s(z) \right)$$

により与えられる。 $X \in \{X_0, \dots, X_n\}$, $W \in \mathfrak{h}$ に対し, $\text{ad}(X)(W) = [X, W]$, $\mu(X)(W) = XW$ とすると, $\hat{\mathcal{L}}_s(z)$ は

$$\hat{\mathcal{L}}_s(z) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = s \\ i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}}} L(k_1 a_{i_1} \dots k_r a_{i_r}; z) \text{ad}(X_0)^{k_1-1} \mu(X_{i_1}) \dots \text{ad}(X_0)^{k_r-1} \mu(X_{i_r})(\mathbf{I}) \quad (25)$$

と表示でき, 関数 $L(k_1 a_{i_1} \dots k_r a_{i_r}; z)$ は超対数関数

$$L(k_1 a_{i_1} \dots k_r a_{i_r}; z) = \int_0^z \left(\frac{dz}{z} \right)^{k_1-1} \circ \frac{a_{i_1} dz}{1 - a_{i_1} z} \circ \left(\frac{dz}{z} \right)^{k_2-1} \circ \frac{a_{i_2} dz}{1 - a_{i_2} z} \dots \circ \left(\frac{dz}{z} \right)^{k_r-1} \circ \frac{a_{i_r} dz}{1 - a_{i_r} z} \quad (26)$$

である。これは $\mathbf{P}^1 - \{0, \frac{1}{a_{i_1}}, \dots, \frac{1}{a_{i_r}}, \infty\}$ 上の多価解析関数で, $|z| < \min\{\frac{1}{|a_{i_1}|}, \dots, \frac{1}{|a_{i_r}|}\}$ では

$$L(k_1 a_{i_1} \dots k_r a_{i_r}; z) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r > 0} \frac{a_{i_1}^{n_1-n_2} a_{i_2}^{n_2-n_3} \dots a_{i_r}^{n_r}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} z^{n_1} \quad (27)$$

と級数展開される。

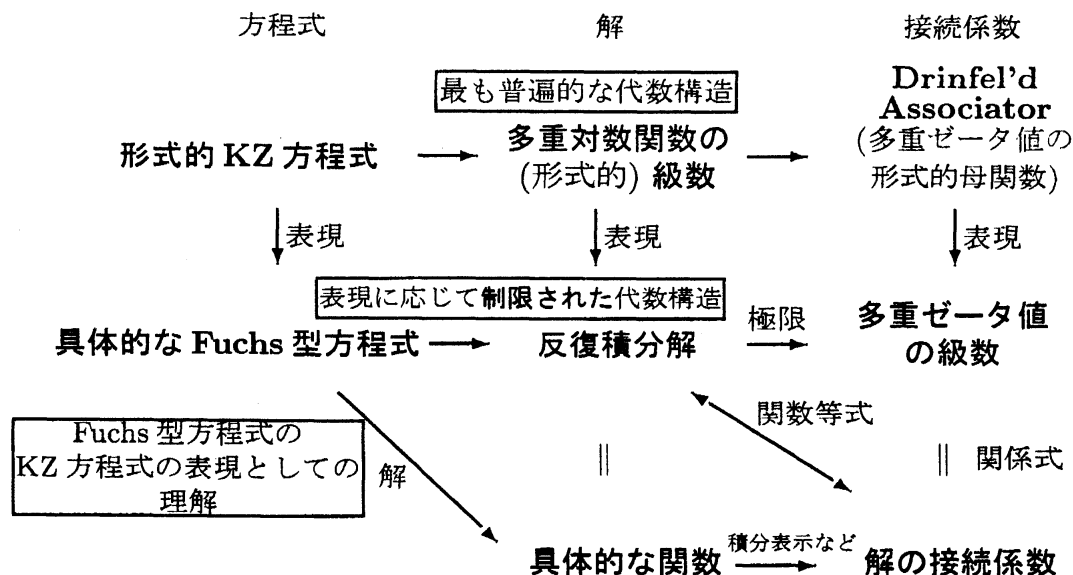
3 形式的 KZ 方程式の表現

ここからは形式的 KZ 方程式の表現について考察する. これまで述べたように形式的 KZ 方程式とその基本解, 解の接続係数である Drinfel'd associator には自由 Lie 環の普遍展開環, 自由シャッフル代数に起因する様々な代数構造があり, 多重ゼータ値の性質と深く関連している. この形式的 KZ 方程式に対し, 形式元 X_0, X_1 を具体的な行列で置き換える, すなわち表現を取ることににより具体的な Fuchs 型微分方程式が得られるが, そこには形式的 KZ 方程式の持つ代数構造が表現に応じて制限された形で継承されている.

さらに, 表現である具体的な Fuchs 型微分方程式の解析的な性質がよく知られている場合, 例えば解が具体的な関数で書かれている, 解の積分表示が分かっている, 解の接続係数がよく知られているといったときには, それらの性質と形式的 KZ 方程式に由来する代数的な性質を比較することにより Fuchs 型方程式の理論に整数論との関係などの新たな視点での理解を与えることが出来る. また, 逆に多重ゼータ値の研究においても Fuchs 型方程式の立場からのアプローチを与えることになる.

例えば, 解が具体的な関数として書かれることが分かっている場合にはその関数の反復積分表示が与えられたことになり, 接続公式が具体的に書かれている場合は多重対数関数の非自明な関数等式, 多重ゼータ値の非自明な関係式が導かれることが期待される.

この形式的 KZ 方程式の表現と Fuchs 型微分方程式をめぐる枠組みを簡便に図示すると次のようになる.



そのような形式的 KZ 方程式の表現の顕著な例として, Gauss の超幾何微分方程式に対応する表現について紹介する. Gauss の超幾何微分方程式とその解である超幾何関数の性質は詳しく研究されており, 特に接続係数がガンマ関数の比で書かれることか

ら, 具体的に多重対数関数の満たす関数等式, 多重ゼータ値の関係式を求めることが出来る. 一方, この表現に対応する代数構造の制限は, 重さ, 深さ, 高さが一定のところ
で和を取った形で現れる. 従って, 特にこの表現から導かれる多重ゼータ値の関係式は
大野-Zagier の関係式と呼ばれる関係式 ([OZ]) そのものであり, 大野-Zagier の関係式に
Fuchs 型方程式の接続問題としての解釈を与えることになる.

3.1 形式的 KZ 方程式の表現

$\mathcal{U}(\mathfrak{X}) = \mathbf{C}\langle X_0, X_1 \rangle$ の n 次元表現 $\rho: \mathcal{U}(\mathfrak{X}) \rightarrow M(n, \mathbf{C})$ が与えられたとき, 方程式

$$\frac{dG}{dz} = \left(\frac{\rho(X_0)}{z} + \frac{\rho(X_1)}{1-z} \right) G \quad (28)$$

を形式的 KZ 方程式の (ρ による) 表現と呼ぶ. また, 形式和

$$\rho(H_0(z)) := \sum_w \text{Li}(w; z) \rho(W) \quad (29)$$

を基本解 $H_0(z)$ の (ρ による) 表現と呼ぶ. $\rho(H_0(z))$ はあくまで形式和であり, 絶対収束
するとは限らないが, もし収束して $M(n, \mathbf{C})$ 値関数を定めるならば方程式 (28) の基本
解行列の反復積分表示である.

3.2 Gauss の超幾何微分方程式とその解, 接続係数

α, β, γ を複素パラメータとし, 表現 $\rho_0: \mathcal{U}(\mathfrak{X}) \rightarrow M(2, \mathbf{C})$,

$$\rho_0(X_0) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 - \gamma \end{pmatrix}, \quad \rho_0(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha + \beta + 1 - \gamma \end{pmatrix} \quad (30)$$

を考える. このとき形式的 KZ 方程式の ρ_0 による表現

$$\frac{d}{dz} G = \left(\frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 - \gamma \end{pmatrix} + \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha + \beta + 1 - \gamma \end{pmatrix} \right) G \quad (31)$$

は Gauss の超幾何微分方程式

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z) \frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0 \quad (32)$$

に他ならない.

以下 $\alpha, \beta, \gamma, \gamma - \alpha - \beta$ は整数ではないとする.

このとき, Gauss の超幾何微分方程式 (31) の $z = i$ ($i = 0, 1, \infty$) の近傍における基本解行列 Φ_i は以下で与えられる.

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(i)} & \varphi_1^{(i)} \\ \frac{1}{\beta} z \frac{d}{dz} \varphi_0^{(i)} & \frac{1}{\beta} z \frac{d}{dz} \varphi_1^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$\begin{cases} \varphi_0^{(0)}(z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n, & \text{超幾何関数} \\ \varphi_1^{(0)}(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; z), \\ \varphi_0^{(1)}(z) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - z), \\ \varphi_1^{(1)}(z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z), \\ \varphi_0^{(\infty)}(z) = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha - \beta + 1; 1/z), \\ \varphi_1^{(\infty)}(z) = z^{-\beta} F(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta - \alpha + 1; 1/z). \end{cases}$$

基本解 Φ_i 達は以下の接続公式を満たす.

$$\Phi_1^{-1} \Phi_0 = C^{01}, \quad C^{01} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} & \frac{\Gamma(2 - \gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(1 - \beta)} \\ \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} & \frac{\Gamma(2 - \gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma) \Gamma(\beta + 1 - \gamma)} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\Phi_{\infty}^{-1} \Phi_0 = C^{0\infty}, \quad C^{0\infty} = \begin{pmatrix} e^{-\pi i \alpha} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)} & e^{\pi i (\gamma - \alpha - 1)} \frac{\Gamma(2 - \gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta + 1 - \gamma) \Gamma(1 - \alpha)} \\ e^{-\pi i \beta} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} & e^{\pi i (\gamma - \beta - 1)} \frac{\Gamma(2 - \gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma) \Gamma(1 - \beta)} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

3.3 超幾何関数の反復積分表示

以上の枠組みより, 超幾何関数の解の反復積分表示を求めることは形式的 KZ 方程式の基本解 $H_0(z)$ の ρ_0 による表現を計算することに他ならない. 実際, $\rho_0(H_0(z))$ が絶対収束していればそれは超幾何微分方程式の原点で漸近挙動 $\rho_0(H_0(z)) z^{\rho_0(X_0)} \rightarrow 1$ を満たす基本解行列なので, Φ_0 との間には線型関係が存在する. その線型関係を漸近挙動を比較することにより求めればよい.

$\rho_0(H_0(z))$ を求めるためには任意の $\mathfrak{g}$ の語 W に対して $\rho_0(W)$ を求めればよいが, 直接計算により次のように求めることが出来る.

補題 2. 任意の空でない語 $W \in \mathfrak{H}$ に対し,

$$\rho_0(W) = p^{|W|-d(W)-h(W)} q^{d(W)-h(W)} (\alpha\beta + pq)^{h(W)-1} M \quad (36)$$

$$M = \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha\beta & \beta q \\ \alpha p & pq \end{pmatrix} & (W \in X\mathfrak{H}Y), & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha p & pq \end{pmatrix} & (W \in Y\mathfrak{H}Y \text{ or } W = Y), \\ \begin{pmatrix} 0 & \beta q \\ 0 & pq \end{pmatrix} & (W \in X\mathfrak{H}X \text{ or } W = X), & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & pq \end{pmatrix} & (W \in Y\mathfrak{H}X). \end{cases} \quad (37)$$

但し $p = 1 - \gamma$, $q = \alpha + \beta + 1 - \gamma$, $\mathfrak{H}$ の語に対しても重み, 深さ, 高さを h と同様に定めるものとする.

命題 1, 補題 2, 重みが k の h の語は高々 2^k 個しかないので, $\rho_0(H_0(z))$ は $|1 - \gamma|, |\alpha + 1 - \gamma|, |\beta + 1 - \gamma|, |\alpha + \beta + 1 - \gamma| < \frac{1}{2}$ のとき $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の普遍被覆空間上広義一様絶対収束する. また, $\rho_0(H_0(z))$ と Φ_0 の間の線型関係は次で与えられる.

補題 3.

$$\Phi_0(z) = \rho_0(H_0(z)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1-\gamma}{\beta} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

以上をまとめて, 次の定理を得る. なお, $z = 0$ におけるもうひとつの解も同様に計算することが出来る.

定理 4. $|1 - \gamma|, |\alpha + 1 - \gamma|, |\beta + 1 - \gamma|, |\alpha + \beta + 1 - \gamma| < \frac{1}{2}$ とする. このとき超幾何関数 $\varphi_0^{(0)}(z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ は

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \alpha\beta \sum_{\substack{k, n, s > 0 \\ k \geq n+s \\ n \geq s}} G_0(k, n, s; z) \\ \times (1 - \gamma)^{k-n-s} (\alpha + \beta + 1 - \gamma)^{n-s} ((\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma))^{s-1} \quad (39)$$

と表示される. 右辺の級数は $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の普遍被覆空間上広義一様絶対収束する.

同様の方法で $z = 1$ の近傍での解を求めることも出来る. ここでは ${}^t\Phi_1^{-1}$ の反復積分表示を構成する. $t = 1 - z$ とし, 表現 $\rho_1: \mathcal{U}(\mathfrak{X}) \rightarrow M(2, \mathbf{C})$ を

$$\rho_1(X_0) = {}^t\rho_0(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad \rho_1(X_1) = {}^t\rho_0(X_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & p \end{pmatrix} \quad (40)$$

で定める. このとき ${}^t\Phi_1^{-1}$ は形式的 KZ 方程式の ρ_1 による表現

$$\frac{d}{dt}G = \left(\frac{\rho_1(X_0)}{t} + \frac{\rho_1(X_1)}{1-t} \right) G \quad (41)$$

の $t=0$ における基本解行列である. 従って $\rho_1(H_0(t))$ と線型関係にある. 実際に計算することで以下の命題を得る. なお, 方程式 (41), 基本解 $\rho_1(H_0(t))$ は元の超幾何方程式に対し変数を $z \rightarrow t$, パラメータを $(\alpha, \beta, p, q) \rightarrow (\beta, \alpha, q, p)$ と置き換えたものに等しいことに注意する.

命題 5. $|1-\gamma|, |\alpha+1-\gamma|, |\beta+1-\gamma|, |\alpha+\beta+1-\gamma| < \frac{1}{2}$ に対し, Φ_1^{-1} の $(1,1), (1,2)$ 成分は次で与えられる.

$$(\Phi_1^{-1})_{11} = 1 + \alpha\beta \sum_{\substack{k,n,s>0 \\ k \geq n+s \\ n \geq s}} G_{10}(k, k-n, s; 1-z) \quad (42)$$

$$\times (1-\gamma)^{k-n-s} (\alpha+\beta+1-\gamma)^{n-s} ((\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma))^{s-1}$$

$$(\Phi_1^{-1})_{12} = \beta \sum_{\substack{k,n,s>0 \\ k \geq n+s \\ n \geq s}} G_0(k-1, k-n, s; 1-z) \quad (43)$$

$$\times (1-\gamma)^{k-n-s} (\alpha+\beta+1-\gamma)^{n-s} ((\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma))^{s-1}$$

右辺の級数は $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の普遍被覆空間上広義一様絶対収束する.

なお, Φ_1^{-1} の $(2,1), (2,2)$ 成分も求めることが出来るが, 漸近挙動の関係で綺麗な式にならないため省略する.

以上の結果を超幾何方程式の解の $z=0,1$ の間の接続公式 (34) の $(1,1)$ 成分

$$(\Phi_1^{-1})_{11}(\Phi_0)_{11} + (\Phi_1^{-1})_{12}(\Phi_0)_{21} = (C^{01})_{11} \quad (44)$$

に代入して関数等式を求める ($(\Phi_0)_{11} = F(\alpha, \beta, \gamma; z)$, $(\Phi_0)_{21} = \frac{1}{\beta} z \frac{d}{dz}(\Phi_0)_{11}$ であつた).

3.4 ガンマ関数のゼータ値による展開

以上より $(\Phi_1^{-1})_{11}, (\Phi_0)_{11}, (\Phi_1^{-1})_{12}, (\Phi_0)_{21}$ が全て $p = 1-\gamma, q = \alpha+\beta+1-\gamma, r = (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)$ の級数として表示されているため, 右辺の接続係数に現れるガンマ関数の部分も多重ゼータ値を係数とする p, q, r の級数として表示したい. そのためには次のガンマ関数の無限積表示による展開を用いる.

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \exp(-cz - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} z^n), \quad (45)$$

ただし, c は Euler 定数 ($c = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)$) である. また, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ に対し, Schur 多項式 $P_n(\mathbf{a})$ を

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbf{a}) z^n \quad \text{で定める. すなわち } P_0(\mathbf{a}) = 1, \quad (46)$$

$$P_n(\mathbf{a}) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots=n} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3}}{k_1! k_2! k_3!} \dots \quad (n \geq 1). \quad (47)$$

整数 $N_{i,j}$ を巾和多項式の展開係数とする. すなわち $N_{i,j} = 0$ ($i, j < 0$), $N_{0,0} = 1$,

$$a^n + b^n = \sum_{i,j} N_{i,j} (a+b)^i (ab)^j \quad (\text{その他 } i+2j=n). \quad (48)$$

以上の記号のもと, (44) の右辺は次のように展開される.

命題 6. $\zeta = (0, \frac{\zeta(2)}{2}, \frac{\zeta(3)}{3}, \frac{\zeta(4)}{4}, \dots)$, $p = 1-\gamma$, $q = \alpha+\beta+1-\gamma$, $r = (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)$ に対し,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} = \\ \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\mu=0}^m \binom{i+j}{i} P_{k-i}(\zeta) P_{l-j}(\zeta) P_{\mu}(-\zeta) P_{i+j+2m-\mu}(-\zeta) N_{i+j,m-\mu} \right) \\ \times p^k q^l r^m. \quad (49) \end{aligned}$$

3.5 $z = 0, 1$ の間の接続公式の $(1, 1)$ 成分から導かれる関数等式

以上の結果を超幾何微分方程式の解の接続公式 (34) の $(1, 1)$ 成分 (44) に適用し, $p^k q^l r^m$ の係数を比較することにより次の関数等式の族を得る.

定理 7. $\bar{G}_*(k, n, s; z) = G_*(k, n, s; z) - G_*(k, n, s+1; z)$ ($* = 0, 10$) とする.

$$\begin{aligned} & \bar{G}_{10}(k+l+2m, l+m, m; z) + \bar{G}_{10}(k+l+2m, k+m, m; 1-z) \\ & + \sum_{\substack{k'+k''=k \\ l'+l''=l \\ m'+m''=m}} \left(\bar{G}_{10}(k'+l'+2m', l'+m', m'; z) \bar{G}_{10}(k''+l''+2m'', k''+m'', m''; 1-z) \right. \\ & \quad \left. + \bar{G}_0(k'+l'+2m'-1, l'+m', m'; z) G_0(k''+l''+2m''+1, k''+m''+1, m''+1; 1-z) \right) \\ & = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\mu=0}^m \binom{i+j}{i} P_{k-i}(\zeta) P_{l-j}(\zeta) P_{\mu}(-\zeta) P_{i+j+2m-\mu}(-\zeta) N_{i+j,m-\mu}. \quad (50) \end{aligned}$$

定理7において, $z \rightarrow 1$ の極限を取ることにより多重ゼータ値の関係式を得ることが出来る.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1} G_{10}(k, n, s; z) &= G_{10}(k, n, s; 1), \\ \lim_{z \rightarrow 1} G_{10}(k, n, s; 1 - z) &= 0, \\ \lim_{z \rightarrow 1} G_0(k, n, s; z) G_0(k', n', s'; 1 - z) &= 0\end{aligned}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}\bar{G}_{10}(k + l + 2m, l + m, m; 1) &= \bar{G}_{10}(k + l + 2m, k + m, m; 1) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\mu=0}^m \binom{i+j}{i} P_{k-i}(\zeta) P_{l-j}(\zeta) P_{\mu}(-\zeta) P_{i+j+2m-\mu}(-\zeta) N_{i+j, m-\mu}\end{aligned}\quad (51)$$

を得る (この式は大野-Zagier の関係式と同値). この式は Drinfel'd associator $\Phi_{KZ}(X_0, X_1)$ の ρ_0 による表現と C^{01} (この両者には線型関係がある) の $(1, 1)$ 成分との比較と解釈することも出来る.

この定理より直接, 間接的に導くことが出来る多重対数関数の関数等式, 多重ゼータ値の関係式をいくつか紹介する.

$m = 0, l = 1$ のとき

$$((50) \text{ の左辺})|_{m=0, l=1} = -\text{Li}_{k+1}(z) - \text{Li}_{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1 \text{ 個}}}(1-z) - \sum_{i=1}^k \text{Li}_i(z) \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_{k-i+1 \text{ 個}}}(1-z) \quad (52)$$

$$\begin{aligned}((50) \text{ の右辺})|_{m=0, l=1} \\ = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} z^n\right) \frac{d}{dz} \exp\left(-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} z^n\right) \text{ の } z^k \text{ の係数} = -\zeta(k+1)\end{aligned}\quad (53)$$

従って, この場合は polylogarithm に関する Euler の反転公式

$$\text{Li}_{k+1}(z) + \text{Li}_{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1 \text{ 個}}}(1-z) + \sum_{i=1}^k \text{Li}_i(z) \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_{k-i+1 \text{ 個}}}(1-z) = \zeta(k+1) \quad (54)$$

となっている.

$m = 0, l = 2$ のとき この場合, (50) は次のようになる.

$$\begin{aligned}\text{Li}_{k+1,1}(z) + \text{Li}_{3, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1 \text{ 個}}}(1-z) + \text{Li}_1(z) \text{Li}_{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1 \text{ 個}}}(1-z) + \sum_{i=1}^k \text{Li}_{i,1}(z) \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_{k-i+1 \text{ 個}}}(1-z) \\ = \frac{k+1}{2} \zeta(k+2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(i+1) \zeta(k-i+1).\end{aligned}\quad (55)$$

特に, $z \rightarrow 1$ の極限を取ると Euler による $\zeta(k, 1)$ に関する有名な関係式が得られる.

$$\zeta(k+1, 1) - \frac{k+1}{2} \zeta(k+2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(i+1) \zeta(k-i+1) = 0. \quad (56)$$

多重対数関数の和公式 接続公式 (44) の両辺の α^1 の係数において, $p = 1 - \gamma$, $q' = \beta + 1 - \gamma$ の係数を比較することにより次の関係式を得る.

命題 8. 任意の整数 $k > n > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} \sum_s G_{10}(k, n, s; z) + \sum_s G_{10}(k, k-n, s; 1-z) \\ + \sum_{\substack{k'+k''=k \\ n'+n''=n}} \sum_{s'} G_0(k', n', s'; z) \sum_{s''} G_0(k'', k''-n'', s''; 1-z) = \zeta(k) \end{aligned} \quad (57)$$

特に $z \rightarrow 1$ の極限を取ると Graville-Zagier の和公式

$$\sum_s G_{10}(k, n, s; 1) = \zeta(k) \quad (58)$$

を得る. 従って, この命題は多重ゼータ値の和公式の多重対数関数版である.

3.6 $z = \infty$ における基本解行列

最後に $z = 0$ と $z = \infty$ の間の接続公式より導かれる関係式の一部を示す. $u = \frac{1}{z}$ とし, 表現 $\rho_\infty : \mathcal{U}(\mathfrak{X}) \rightarrow M(2, \mathbb{C})$ を

$$\rho_\infty(X_0) = \rho_0(X_1) - \rho_0(X_0) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & \alpha + \beta \end{pmatrix}, \quad \rho_\infty(X_1) = \rho_0(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & q \end{pmatrix}$$

で定めると, 超幾何微分方程式は

$$\frac{d}{du} G = \left(\frac{\rho_\infty(X_0)}{u} + \frac{\rho_\infty(X_1)}{1-u} \right) G \quad (59)$$

と書き換えることが出来, その基本解は $\rho_\infty(H_0(u))$ で与えられる. 漸近挙動を考えると

$$\Phi_\infty = \rho_\infty(H_0(u)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha}{\beta} & -1 \end{pmatrix}$$

であるので, Φ_∞^{-1} は次のように求めることができる.

$$\begin{aligned}\Phi_\infty^{-1} &= \frac{\beta}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\alpha}{\beta} & -1 \end{pmatrix} \rho_\infty(H_0(u))^{-1}, \\ \rho_\infty(H_0(u))^{-1} &= \sum_w \text{Li}(S(w); u) \rho_\infty(W).\end{aligned}\quad (60)$$

一般に $\rho_\infty(H_0(u))^{-1}$ を計算するのは大変複雑なので, ここでは $\beta \rightarrow 0$ の極限として計算する. $\beta \rightarrow 0$ の極限では

$$\rho_\infty(X_0) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \rho_\infty(X_1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha + p \end{pmatrix}\quad (61)$$

なので, この場合 $z = \infty$ における基本解行列は次のようになる.

命題 9.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_\infty(H_0(u))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}\quad (62)$$

$$\begin{aligned}H_{21} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\log^k u}{k!} \alpha^k + \sum_{k \geq n \geq 1} \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_n}(u) \frac{\log^{k-n} u}{(k-n)!} \alpha^{k-n} (\alpha + p)^n \\ &\quad + p \sum_{k > n \geq 1} (-1)^k \sum_{i=0}^{k-n-1} (-1)^{k-n-1-i} \text{Li}_{k-n-i+1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}}(u) \frac{\log^i(u)}{i!} \alpha^{k-n} (\alpha + p)^n\end{aligned}\quad (63)$$

$$H_{22} = \sum_{k \geq n \geq 0} (-1)^k \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_n}(u) \frac{\log^{k-n} u}{(k-n)!} \alpha^{k-n} (\alpha + p)^n\quad (64)$$

この式を $z = 0, z = \infty$ の間の解の接続公式に代入して $\alpha^m (\alpha + 1 - \gamma)^n$ の係数を計算すると, 以下の多重対数関数の関数等式を得る.

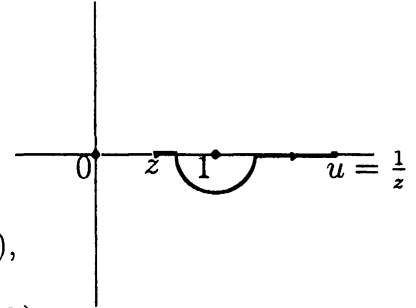
命題 10. 任意の正整数 m, n , $z \in \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の普遍被覆空間に対し,

$$\frac{\log^m \frac{1}{z}}{m!} - \sum_{i=0}^{m-1} \left(\text{Li}_{m-i}(z) + (-1)^{m-i} \text{Li}_{m-i}\left(\frac{1}{z}\right) \right) \frac{\log^i \frac{1}{z}}{i!} = (-1)^m B_m \frac{(2\pi i)^m}{m!},\quad (65)$$

$$\begin{aligned}& \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{n+i+1} \text{Li}_{m-i, \underbrace{1, \dots, 1}_n}\left(\frac{1}{z}\right) \frac{\log^i \frac{1}{z}}{i!} + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{n+i+1} \text{Li}_{m-i+1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}}\left(\frac{1}{z}\right) \frac{\log^i \frac{1}{z}}{i!} \\ & + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{m+n-j-1} \text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_{n-j}}\left(\frac{1}{z}\right) \sum_{k=0}^j \binom{m-i-1+j-k}{m-i-1} \sum_s G_0(m-i+j, k+1, s; z) \frac{\log^i \frac{1}{z}}{i!} \\ & = \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2=n}} \binom{m_1+n_1}{m_1} (-1)^{m_1} P_{m_1+n_1}(\zeta) P_{m_2}(\zeta) \frac{(-\pi i)^{m_3}}{m_3!} P_{n_2}(-\zeta).\end{aligned}\quad (66)$$

ここで B_m はベルヌーイ数.

次に, $z \rightarrow 1$ の極限を考える. $z \in \mathfrak{J}$ のとき $\arg \frac{1}{z} = 0$,
 $\arg(1 - \frac{1}{z}) = \pi$ に注意すると,



$$\text{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right) = \text{Li}_1(z) + \log z + \pi i \quad (z \in \mathfrak{J}),$$

$$\text{Li}_{\underbrace{1, \dots, 1}_n}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{n!}(\text{Li}_1(z) + \log z + \pi i)^n \quad (z \in \mathfrak{J}),$$

$$\lim_{z \rightarrow 1 \in \mathfrak{J}} \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 1 \in \mathfrak{J}} \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z) = \zeta(k_1, \dots, k_r) \quad (k_1 \geq 2)$$

であるので, $z \in \mathfrak{J}$ にて $z \rightarrow 1$ の極限を取ることににより, (65) から

$$-2\zeta(m) = B_m \frac{(2\pi i)^m}{m!} \quad (m : \text{偶数}) \quad (67)$$

が得られる. 同様に (66) の $n = 1, 2$ からは次の命題が得られる.

命題 11.

$$(m+2)\zeta(m+1) = 2 \sum_{\substack{i+2k=m, \\ i, k \geq 1}} \zeta(i+1)\zeta(2k) \quad (m : \text{奇数}) \quad (68)$$

$$2\zeta(m, 1) = m\zeta(m+1) - 2 \sum_{\substack{i+2k=m, \\ i, k \geq 1}} \zeta(i+1)\zeta(2k) \quad (m : \text{偶数}) \quad (69)$$

$$\begin{aligned} (m+2)\zeta(m+1, 1) &= -\frac{\pi^2}{2}\zeta(m) + \frac{(m+2)(m+1)}{2}\zeta(m+2) \\ &\quad - \sum_{\substack{i+2k=m, \\ i, k \geq 1}} (i+1)\zeta(i+2)\zeta(2k) - \sum_{\substack{i+j+2k=m, \\ i, j, k \geq 1}} (i+1)\zeta(i+1)\zeta(j+1)\zeta(2k) \quad (m : \text{奇数}) \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} 2\zeta(m, 1, 1) &= -m\zeta(m+1, 1) + \frac{\pi^2}{2}\zeta(m) - \frac{(m+2)(m+1)}{2}\zeta(m+2) \\ &\quad + \sum_{\substack{i+2k=m, \\ i, k \geq 1}} (i+1)\zeta(i+2)\zeta(2k) + \sum_{\substack{i+j+2k=m, \\ i, j, k \geq 1}} (i+1)\zeta(i+1)\zeta(j+1)\zeta(2k) \quad (m : \text{偶数}) \end{aligned} \quad (71)$$

参考文献

- [IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compos. Math.* **142** (2006), no. 2, 307–338.
- [LD] J.A. Lappo-Danilevsky, *Mémoires sur la Théorie des Systèmes des Équations Différentielles Linéaires*, Chelsea, 1953.
- [Le] L. Lewin (editor), *Structural properties of Polylogarithms*, Math. Surveys and Monographs, 37, Amer.Math.Soc., 1991.
- [O] S. Oi, Representation of solutions of the Gauss hypergeometric equation by the multiple polylogarithms, functional relations of the multiple polylogarithms and relations of the multiple zeta values, arXiv:math.QA/0810.1829
- [OiU] S. Oi and K. Ueno, 2 変数 KZ 方程式の接続問題と 2 変数多重対数関数の調和積, 本講究録 (2009).
- [OkU1] J. Okuda and K. Ueno, The sum formula for multiple zeta values and connection problem of the formal Knizhnik-Zamolodchikov equation, *Zeta functions, topology and quantum physics*, 145–170, Dev. Math., 14, Springer, New York, 2005.
- [OkU2] J. Okuda and K. Ueno, Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 40 (2004), no. 2, 537–564.
- [OZ] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height *Indag. Math. (N.S.)* **12** (2001), no. 4, 483–487.
- [R] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications, 1993.
- [Z] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, *First European Congress of Mathematics*, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, *Progr. Math.*, 120, Birkhäuser, Basel, 1994.