

多項式係数を持つ非斉次線形常微分方程式の形式解 の係数に関する評価

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科複合領域科学専攻
中村 弥生 (Yayoi Nakamura)

1 Introduction

多項式係数をもつ 2 階の線形常微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - p(x)y = 0, p(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

は, 無限遠点を不確定度 $m+2$ の不確定特異点としてもち, その他の特異点をもたない. これは, 次の 4 つの場合, 積分の形で表される解を持つことが分かる.

- (i) $p(x) = x + a_1$
- (ii) $p(x) = x^2 + a_1 x + a_2$
- (iii) $p(x) = x^m$
- (iv) $p(x) = x^{2p} + cx^{p-1}$

これらの場合, 方程式は, 一般合流型超幾何微分方程式に帰着する. 特に, (i) の解は Airy 関数として, (ii) の解は parabolic cylinder 関数として, 良く知られたものである.

一方, 与えられた微分作用素 P に関し, Deligne の同型定理により

$$H^1(S^1, \text{Ker}(P; \mathcal{A}_0)) \cong \text{Ker}(P; \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$$

が成り立ち, $\text{Ker}(P; \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底を取ることができる. また, これに注目して, 「漸近級数の係数の漸近評価を伴った漸近解析における消滅定理」を用いることにより, 作用素 P に関するある非斉次方程式の形式解の係数, 及び, 形式解の係数の漸近評価を求めることができる.

ここでは, (iii), (iv) の場合の作用素 $P = \frac{d^2}{dx^2} - p(x)$ に関する非斉次方程式の形式解について計算をする. 特に, (iii) に関して, $\text{Ker}(P; \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底の取り方を詳しく見て行く. この手法は Majima による「漸近級数の係数の漸近評価を伴った漸近解析における消滅定理」の証明に沿っている. 定理とその証明に関しては文献を参照されたい.

2 $P = \frac{d^2}{dx^2} - x^m$ の場合

任意の実数 $R > 0$ に対して, U_k, S_k を $k = 0, 1, \dots, m+1$ に対して次で決まる開扇形領域とする.

$$\begin{aligned} U_k &= \left\{ x \in \mathbb{C}; |x| > R, \frac{2k-3}{m+2}\pi < \arg x < \frac{2k+1}{m+2}\pi \right\}, \\ S_k &= U_k \cap U_{k+1} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{C}; |x| > R, \frac{2k-1}{m+2}\pi < \arg x < \frac{2k+1}{m+2}\pi \right\}. \end{aligned}$$

但し, $U_{m+2} = U_0$ とおく. このとき, $\{U_k, k = 0, 1, \dots, m+1\}$ は, $x = \infty$ で開扇形被覆をなす.

2.1 斉次方程式の解

方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^m\right)y = 0$$

は, 次の性質を満たす解 y_k を持つ. つまり, y_k は x の整関数であり, 扇型領域 $S_{k-1} \cup \bar{S}_k \cup S_{k+1}$ 上で x が無限遠点に近づくとき, 次の漸近表示を持つ.

$$y_k \sim \omega^{\frac{m}{4}k} x^{-\frac{m}{4}} \left(1 + \sum_{N=1}^{\infty} B_N \omega^{\frac{k}{2}N} x^{-\frac{N}{2}}\right) \exp\left\{(-1)^{k+1} \frac{2}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}\right\}$$

但し, $\omega = e^{\frac{2}{m+2}\pi i}$ であって, B_N は $N = 0, 1, \dots$ に対して, 次で決まる.

$$B_{(m+2)(N+1)} = \prod_{\ell=0}^N \frac{-1}{(m+2)(\ell+1)} \left\{ \frac{m}{4} \left(\frac{m}{4} + 1 \right) + \frac{\ell m(m+2)}{4} + \frac{\ell(m+2)}{2} \left(\frac{\ell(m+2)}{2} + 1 \right) \right\},$$

$$B_j = 0, j \neq (m+2)(N+1).$$

一方, $x^{\frac{m+2}{2}} = z$ とおくことにより, 作用素 $x^2 \frac{d^2}{dx^2} - x^{m+2}$ は次のように変換される.

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2}{dx^2} - x^{m+2} &= \left(x \frac{d}{dx}\right) \left(x \frac{d}{dx} - 1\right) - x^{m+2} \\ &= \left(\frac{m+2}{2} z \frac{d}{dz}\right) \left(\frac{m+2}{2} z \frac{d}{dz} - 1\right) - z^2 \\ &= \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 z \left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + \left(1 - \frac{2}{m+2}\right) \frac{d}{dz} - \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 z \right\}. \end{aligned}$$

このとき, 微分方程式

$$\left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + \left(1 - \frac{2}{m+2}\right) \frac{d}{dz} - \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 z \right\} u(z) = 0$$

は $z = 0, \infty$ を特異点に持つ一般合流型超幾何微分方程式であり, $z = \infty$ を頂点とする角領域で定義された解は, 一般化された Laplace 変換の形を用いて, 次の $u_-(z), u_+(z)$ で与えられる.

$$\begin{aligned} u_-(z) &= \frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right) (e^{2\pi i(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2})} - 1)} \int_{L_-} e^{z\zeta} \left(\zeta - \frac{2}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{2}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta \\ &= \frac{\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-z(\zeta + \frac{2}{m+2})} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta \end{aligned}$$

但し, L_- は $-\infty$ から出発し, $\zeta = -\frac{2}{m+2}$ のまわりを正の向きに一周し, 再び $-\infty$ に戻る道である. $u_-(z)$ は $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ なる扇形領域で正則な解を与える.

$$\begin{aligned} u_+(z) &= \frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right) (e^{2\pi i(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2})} - 1)} \int_{L_+} e^{z\zeta} \left(\zeta - \frac{2}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{2}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta \\ &= \frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{z(\zeta + \frac{2}{m+2})} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta \end{aligned}$$

但し, L_+ は $+\infty$ から出発し, $\zeta = +\frac{2}{m+2}$ のまわりを正の向きに一周し, 再び $+\infty$ に戻る道である. $u_+(z)$ は $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ なる扇形領域で正則な解を与える.

これより微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^m\right)y = 0$$

の解で上に述べた性質を持つものは次のように与えられる.

$$\begin{aligned} y_{2k} &= \frac{\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta + \frac{2}{m+2})} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta \\ y_{2k+1} &= \frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta + \frac{2}{m+2})} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta \end{aligned}$$

各 y_k は, 扇型領域 S_k における subdominant solution を与える.

2.2 $\text{Ker}\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^m; \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}\right)$ の基底

$\{U_0, U_1, \dots, U_{m+1}\}$ に対する 1-cocycle を $k = 0, 1, \dots, m+1$ に対して

$$\{u_{j,j+1}^{(k)}, j = 0, 1, \dots, m+1\}, \text{ 但し } u_{m+1,m+2}^{(k)} = u_{m+1,0}^{(k)},$$

$$u_{j,j+1}^{(k)} = \begin{cases} y_j & x \in S_j \quad j = k \\ 0 & x \in S_j \quad i \neq k \end{cases}$$

とおく. すると, $\{u_{j,j+1}^{(0)}\}, \{u_{j,j+1}^{(1)}\}, \dots, \{u_{j,j+1}^{(m+1)}\}$ のコホモロジー類が $H^1(S^1, \text{Ker}(P; \mathcal{A}_0))$ の基底をなす.

ここで、次の記号を導入する.

$$\begin{aligned}
\varepsilon' &:= \frac{\pi}{2(m+2)}, \\
0 &< \varepsilon < \min\{\varepsilon', R\}, \\
R' &:= R + \varepsilon, \\
a'_\ell &:= \frac{2\ell-3}{m+2}\pi + \varepsilon, \\
b'_\ell &:= \frac{2\ell+1}{m+2}\pi - \varepsilon, \\
U'_\ell &:= \{x \in \mathbb{C}; |x| > R', a'_\ell < \arg x < b'_\ell\}, \\
S'_\ell &:= \{x \in \mathbb{C}; |x| > R', a'_{\ell+1} < \arg x < b'_\ell\}, \\
L(\ell, -') &:= (tR' \exp(ia'_{\ell+1}))_{t \in [1, +\infty)}, \\
L(\ell, +') &:= (tR' \exp(ib'_\ell))_{t \in [1, +\infty)}, \\
\tau_\ell &:= \frac{a_{\ell+1} + b_\ell}{2} \\
&= \frac{2\ell}{m+2}\pi, \\
c(\ell, -') &:= (R' \exp(i((1-t)a'_{\ell+1} + t\tau_\ell)))_{t \in [0, 1]}, \\
c(\ell, +') &:= (R' \exp(i((1-t)b'_\ell + t\tau_\ell)))_{t \in [0, 1]}, \\
\gamma_{\ell, -'} &:= c(\ell, -') \cup L(\ell, -'), \\
\gamma_{\ell, +'} &:= c(\ell, +') \cup L(\ell, +'), \\
\gamma'_\ell &:= (tR' \exp(i\tau_\ell))_{t \in [1, +\infty)}, \\
R'' &:= R + 2\varepsilon, \\
a''_\ell &:= \frac{2\ell-3}{m+2}\pi + 2\varepsilon, \\
b''_{\ell-1} &:= \frac{2\ell+1}{m+2}\pi - 2\varepsilon, \\
U''_\ell &:= \{x \in \mathbb{C}; |x| > R'', a''_\ell < \arg x < b''_\ell\}, \\
S''_\ell &:= \{x \in \mathbb{C}; |x| > R'', a''_{\ell+1} < \arg x < b''_\ell\}, \\
L(\ell, -'') &:= (tR'' \exp(ia''_{\ell+1}))_{t \in [1, +\infty)}, \\
L(\ell, +'') &:= (tR'' \exp(ib''_\ell))_{t \in [1, +\infty)}, \\
c(\ell, -'') &:= (R'' \exp(i((1-t)a''_{\ell+1} + t\tau_\ell)))_{t \in [0, 1]}, \\
c(\ell, +'') &:= (R'' \exp(i((1-t)b''_\ell + t\tau_\ell)))_{t \in [0, 1]}, \\
\gamma_{\ell, -''} &:= c(\ell, -'') \cup L(\ell, -''), \\
\gamma_{\ell, +''} &:= c(\ell, +'') \cup L(\ell, +'').
\end{aligned}$$

ここで、 S_k で定義される関数族 $(F_k)_{k=0,1,\dots,m+1}$ に対して、次を定義する.

$$\text{Integ}(\ell; (F_k)_{k=0,1,\dots,m+1})(x)$$

$$:= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{j \neq \ell-1, \ell} \int_{\gamma_j'} F_j(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_{\ell-1, -'}} F_{\ell-1}(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_{\ell, +'}} F_{\ell}(\zeta) d\zeta \right\}, \ell = 0, 1, \dots, m+1.$$

今,

$$\partial S_{\ell}' = \gamma_{\ell, -'} \cup \gamma_{\ell, +'},$$

$$\partial S_{\ell}'' = \gamma_{\ell, -''} \cup \gamma_{\ell, +''}$$

であり,

$$S_{\ell}'' \subset S_{\ell}'$$

であるから $x \in S_{\ell}'$, $\zeta \in \partial S_{\ell}'$ に対して, $|x - \zeta| > \varepsilon$ が成り立つ. すると $x \in S_{\ell}''$ に対して,

$$v_{\ell}^{(k)}(x) := \text{Integ}(\ell; ((\zeta - x)^{-1} u_{j, j+1}^{(k)})_{j=0,1,\dots,m+1}),$$

とおくと $\partial S_{\ell}'$ 上で $u_{\ell, \ell+1}^{(k)}$ が指数的に減少または 0 であるから, 積分は意味をもつ. また $x \in S_{\ell}''$ に対して,

$$\begin{aligned} -v_{\ell}^{(k)} + v_{\ell+1}^{(k)} &= \frac{-1}{2\pi i} \left\{ \sum_{j \neq \ell-1, \ell} \int_{\gamma_j'} \frac{u_{j, j+1}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta + \int_{\gamma_{\ell-1, -'}} \frac{u_{\ell-1, \ell}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta + \int_{\gamma_{\ell, +'}} \frac{u_{\ell, \ell+1}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{j \neq \ell, \ell+1} \int_{\gamma_j'} \frac{u_{j, j+1}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta + \int_{\gamma_{\ell, -'}} \frac{u_{\ell, \ell+1}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta + \int_{\gamma_{\ell+1, +'}} \frac{u_{\ell+1, \ell+2}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ - \int_{\gamma_{\ell+1}'} \frac{u_{\ell+1, \ell+2}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta - \int_{\gamma_{\ell-1, -'}} \frac{u_{\ell-1, \ell}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta - \int_{\gamma_{\ell, +'}} \frac{u_{\ell, \ell+1}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma_{\ell-1}'} \frac{u_{\ell-1, \ell}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta + \int_{\gamma_{\ell, -'}} \frac{u_{\ell, \ell+1}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta + \int_{\gamma_{\ell+1, +'}} \frac{u_{\ell+1, \ell+2}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma_{\ell-1}' - \gamma_{\ell-1, -'}} \frac{u_{\ell-1, \ell}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta + \int_{\gamma_{\ell, -'} - \gamma_{\ell, +'}} \frac{u_{\ell, \ell+1}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta + \int_{\gamma_{\ell+1, +'} - \gamma_{\ell+1}'} \frac{u_{\ell+1, \ell+2}^{(k)}}{\zeta - x} d\zeta \right\} \\ &= 0 + u_{\ell, \ell+1}^{(k)} + 0 \end{aligned}$$

つまり, $x \in S_{\ell}''$ に対して

$$u_{\ell, \ell+1}^{(k)}(x) = -v_{\ell}^{(k)}(x) + v_{\ell+1}^{(k)}(x)$$

が成り立つ. これより,

$$v_{\ell}^{(k)}(x) = \begin{cases} v_{\ell-1}^{(k)}(x) + u_{\ell-1, \ell}^{(k)}(x), & x \in \{x \in \mathbb{C} \mid |x| > R'', a_{\ell} < \arg x < a_{\ell}''\} \\ v_{\ell+1}^{(k)}(x) - u_{\ell, \ell+1}^{(k)}(x) & x \in \{x \in \mathbb{C} \mid |x| > R'', b_{\ell}'' < \arg x < b_{\ell}\} \end{cases}$$

によって $v_{\ell}^{(k)}(x)$ は $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > R'', a_{\ell} < \arg x < b_{\ell}\}$ に解析接続される. これより,

$$u_{\ell, \ell+1}^{(k)} = -v_{\ell}^{(k)} + v_{\ell+1}^{(k)}$$

を満たす 0-cochain $\{v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \dots, v_{m+1}^{(k)}\}, k = 0, 1, \dots, m+1$ を得る.

今,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - x} &= -\frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta}{x}} \right) \\ &= -\frac{1}{x} \left(1 + \frac{\zeta}{x} + \left(\frac{\zeta}{x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\zeta}{x} \right)^{L-1} \right) + \frac{1}{\zeta - x} \left(\frac{\zeta}{x} \right)^L \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{\zeta}{x^2} - \dots - \frac{\zeta^{L-1}}{x^L} + \frac{1}{\zeta - x} \left(\frac{\zeta}{x} \right)^L \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} v_\ell^{(k)} &= \text{Integ}(\ell; (-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\zeta^{r-1} u_{j,j+1}^{(k)}}{x^r})_{j=0,1,\dots,m+1}) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} (\text{Integ}(\ell; (-\zeta^{r-1} u_{j,j+1}^{(k)})_{j=0,1,\dots,m+1})) x^{-r}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} T_{\ell,r}^{(k)} &= \text{Integ}(\ell; (-\zeta^{r-1} u_{j,j+1}^{(k)})_{j=0,1,\dots,m+1}), \\ E_{\ell,L}^{(k)}(x) &= \text{Integ}(\ell; (\frac{\zeta^L u_{j,j+1}^{(k)}}{\zeta - x})_{j=0,1,\dots,m+1}) \end{aligned}$$

とおけば,

$$v_\ell^{(k)} = \sum_{r=1}^{L-1} T_{\ell,r}^{(k)} x^{-r} + E_{\ell,L}^{(k)}(x) x^{-L}$$

が成り立つ.

$\partial S'_\ell$ で $u_{\ell,\ell+1}^{(k)}$ は指数減少または 0 であるから, $v_\ell^{(k)}$ は $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > R'', a_\ell < \arg x < b_\ell\}$ 上で形式巾級数

$$\hat{v}_\ell^{(k)}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} T_{\ell,r}^{(k)} x^{-r}$$

に漸近展開可能である.

いま, $u_{\ell,\ell+1}^{(k)} = -v_\ell^{(k)} + v_{\ell+1}^{(k)}$ は $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > R'', a_{\ell+1} < \arg x < b_\ell\}$ で subdominant であるから,

$$\sum_{r=1}^{\infty} T_{\ell,r}^{(k)} x^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} T_{\ell+1,r}^{(k)} x^{-r}.$$

よって,

$$\sum_{r=1}^{\infty} v_{(r)}^{(k)} x^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} T_{\ell,r}^{(k)} x^{-r}$$

とおけば,

$$v_{(r)}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{\ell=0}^{m+1} \int_{\gamma'_\ell} -\zeta^{r-1} u_{\ell,\ell+1}^{(k)} d\zeta \right\}$$

となるが, $u_{\ell, \ell+1}^{(k)}$ の定義より

$$v_{(r)}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_k} -\zeta^{r-1} y_k d\zeta \quad (1)$$

を得る.

さて, $Pu_{j,j+1}^{(k)} = -Pv_j^{(k)} + Pv_{j+1}^{(k)}$ より, $x \in S_j$ に対して,

$$Pv_j^{(k)} = Pv_{j+1}^{(k)}.$$

これより

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} Pv_j^{(k)} & x \in U_j \\ Pv_j^{(k)} + 1 & x \in U_j + 1 \end{cases}$$

とおき, 更に,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & x \in \mathbb{C} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) & x = \infty \end{cases}$$

とおけば,

$$\hat{v}^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} v_{(r)}^{(k)} x^{-r}$$

は, 非斉次微分方程式

$$P\hat{v}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

の形式解となる. このとき, $\langle [\hat{v}^{(0)}], [\hat{v}^{(1)}], \dots, [\hat{v}^{(m+1)}] \rangle$ が $\text{Ker}(\frac{d^2}{dx^2} - x^m; \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底をなす.

2.2.1 $v_{(r)}^{(k)}$ の計算

実際に $v_{(r)}^{(k)}$ を計算する.

(1) により, $k = 0, 1, \dots, m+1$ に対して, 非斉次微分方程式

$$P\hat{v}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

の形式解の係数は

$$v_{(r)}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k}{m+2}\pi} \infty} -x^{r-1} y_k dx$$

によって求められる.

$v_{(r)}^{(k)}$ の漸近表示

k が偶数, 奇数にかかわらず, $v_{(r)}^{(k)}$ は次のように計算出来る.

$$\begin{aligned}
v_{(r)}^{(k)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k}{m+2}\pi i} \infty} -x^{r-1} y_{m,k} dx \\
&\sim \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k}{m+2}\pi i} \infty} \{-x^{r-1} (\omega^{-k} x)^{-\frac{m}{4}} (1 + \sum_{N=0}^{M-1} B_{(m+2)(N+1)} (\omega^{-k} x)^{-\frac{(m+2)(N+1)}{2}}) \\
&\quad + O(x^{r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1)})\} e^{(-1)^{k+1} \frac{2}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}} dx
\end{aligned}$$

$\omega^{-k} x = \xi$ とおく.

$$\begin{aligned}
v_{(r)}^{(k)} &\sim \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \{(\omega^{-k} \xi)^{r-1} \xi^{-\frac{m}{4}} (1 + \sum_{N=0}^{M-1} B_{(m+2)(N+1)} \xi^{-\frac{m+2}{2}(N+1)}) \\
&\quad + O(\xi^{r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1)})\} e^{-\frac{2}{m+2} \xi^{\frac{m+2}{2}}} \omega^k d\xi \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \{\xi^{r-1-\frac{m}{4}} + \sum_{N=0}^{M-1} B_{(m+2)(N+1)} \xi^{r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1)} \\
&\quad + O(\xi^{r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1)})\} e^{-\frac{2}{m+2} \xi^{\frac{m+2}{2}}} d\xi
\end{aligned}$$

$\frac{2}{m+2} \xi^{\frac{m+2}{2}} = \zeta$ とおく.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \{(\frac{m+2}{2} \zeta)^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4})} \\
&\quad + \sum_{N=0}^{M-1} B_{(m+2)(N+1)} (\frac{m+2}{2} \zeta)^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1))} \\
&\quad + O(\zeta^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1))})\} e^{-\zeta} (\frac{m+2}{2} \zeta)^{\frac{2}{m+2}-1} d\zeta \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i} (\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}-1} \{(\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4})} \Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4})) \\
&\quad + \sum_{N=0}^{M-1} B_{(m+2)(N+1)} (\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1))} \Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1))) \\
&\quad + O(\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1))))\} \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i} (\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4})-1} \{\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4})) \\
&\quad + \sum_{N=0}^{M-1} B_{(m+2)(N+1)} (\frac{m+2}{2})^{-(N+1)} \Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1)))\} \\
&\quad + O(\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1)))).
\end{aligned}$$

よって, r が十分大きい時, $1 \leq M < r$ なる M に対して, $v_{(r)}^{(k)}$ は次の漸近評価をもつ.

$$v_{(r)}^{(k)} \sim \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i} (\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4})-1} \{\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}))$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{N=0}^{M-1} B_{(m+2)(N+1)} \left(\frac{m+2}{2} \right)^{-(N+1)} \Gamma \left(\frac{2}{m+2} \left(r - \frac{m}{4} - \frac{m+2}{2} (N+1) \right) \right) \} \\
& + O \left(\Gamma \left(\frac{2}{m+2} \left(r - \frac{m}{4} - \frac{m+2}{2} (M+1) \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

$k = \text{偶数の場合}$

$$\begin{aligned}
v_{(r)}^{(2k)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{4k}{m+2}\pi i} \infty} -x^{r-1} y_{2k} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{4k}{m+2}\pi i} \infty} -x^{r-1} \frac{\left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{\Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right)} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{m+2}{2}} \left(\zeta + \frac{2}{m+2} \right)} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta dx \\
&= \frac{-1 \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{2\pi i \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right)} \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \\
&\quad \times \int_0^{e^{\frac{4k}{m+2}\pi i} \infty} x^{r-1} e^{-x^{\frac{m+2}{2}} \left(\zeta + \frac{2}{m+2} \right)} dx d\zeta
\end{aligned}$$

$x^{\frac{m+2}{2}} \left(\zeta + \frac{2}{m+2} \right) = \xi$ とおく.

$$\begin{aligned}
v_{(r)}^{(k)} &= \frac{-1 \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{2\pi i \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right)} \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \left(\frac{\xi}{\zeta + \frac{2}{m+2}} \right)^{\frac{2}{m+2}(r-1)} e^{-\xi} \frac{2}{m+2} \left(\frac{\xi}{\zeta + \frac{2}{m+2}} \right)^{\frac{2}{m+2}-1} \left(\frac{1}{\zeta + \frac{2}{m+2}} \right) d\xi d\zeta \\
&= \frac{-1 \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{2\pi i \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right)} \frac{2}{m+2} \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{2}{m+2} \right)^{-\frac{2}{m+2}r} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \xi^{\frac{2}{m+2}r-1} d\xi d\zeta \\
&= \frac{-1 \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{2\pi i \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right)} \frac{2}{m+2} \Gamma \left(\frac{2r}{m+2} \right) \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{2}{m+2} \right)^{-\frac{2}{m+2}r} d\zeta \\
&= \frac{-1 \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{2\pi i \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right)} \frac{2}{m+2} \Gamma \left(\frac{2r}{m+2} \right) \left(\frac{4}{m+2} \right)^{-\frac{2}{m+2}} \left(\frac{2}{m+2} \right)^{-\frac{2r}{m+2}} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \left(\frac{m+2}{4} \zeta \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(1 + \frac{m+2}{4} \zeta \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(1 + 2 \frac{m+2}{4} \zeta \right)^{-\frac{2r}{m+2}} d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\frac{2}{m+2} \right)^{1 - \frac{2r}{m+2}} \\
&\quad \times \frac{\Gamma \left(\frac{2r}{m+2} \right) \Gamma \left(\frac{2r+2}{m+2} \right)}{\Gamma \left(\frac{2r+1}{m+2} + \frac{1}{2} \right)} F \left(\frac{2r}{m+2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}, \frac{2r+1}{m+2} + \frac{1}{2}; -1 \right).
\end{aligned}$$

$k = \text{奇数の場合}$

$$\begin{aligned}
 v_{(r)}^{(2k+1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2(2k+1)}{m+2}\pi i} \infty} -x^{r-1} y_{2k+1} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2(2k+1)}{m+2}\pi i} \infty} -x^{r-1} \frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} e^{x^{\frac{m+2}{2}} (\zeta + \frac{2}{m+2})} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta dx \\
 &= \frac{(-1)^{1 + \frac{2}{m+2}} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \\
 &\quad \times \int_0^{e^{\frac{2(2k+1)}{m+2}\pi i} \infty} x^{r-1} e^{x^{\frac{m+2}{2}} (\zeta + \frac{2}{m+2})} dx d\zeta
 \end{aligned}$$

$x^{\frac{m+2}{2}} (\zeta + \frac{2}{m+2}) = -\xi$ とおく.

$$\begin{aligned}
 v_{(r)}^{(2k+1)} &= \frac{(-1)^{1 + \frac{2}{m+2}} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}}}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{4}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \left(-\frac{\xi}{\zeta + \frac{2}{m+2}}\right)^{\frac{2}{m+2}(r-1)} e^{-\xi} \left(-\frac{1}{\zeta + \frac{2}{m+2}}\right) \left(\frac{2}{m+2}\right) \left(-\frac{\xi}{\zeta + \frac{2}{m+2}}\right)^{\frac{2}{m+2}-1} d\xi d\zeta \\
 &= \frac{(-1)^{\frac{2(r+1)}{m+2}-1}}{2\pi i} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}} \frac{2}{m+2} \frac{\Gamma\left(\frac{2r}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \zeta^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\zeta + \frac{2}{m+2}\right)^{-\frac{2}{m+2}r} \left(\zeta + \frac{4}{m+2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} d\zeta \\
 &= \frac{(-1)^{\frac{2(r+1)}{m+2}-1}}{2\pi i} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{m+2}} \left(\frac{2}{m+2}\right)^{1 - \frac{2r}{m+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2r}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right)} \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \left(\frac{m+2}{4}\zeta\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(1 + \frac{m+2}{4}\zeta\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(1 + 2\frac{m+2}{4}\zeta\right)^{-\frac{2r}{m+2}} \frac{m+2}{4} d\zeta \\
 &= \frac{(-1)^{\frac{2(r+1)}{m+2}-1}}{2\pi i} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}} \left(\frac{2}{m+2}\right)^{1 - \frac{2r}{m+2}} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma\left(\frac{2r}{m+2}\right) \Gamma\left(\frac{2r+2}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2r+1}{m+2} + \frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{2r}{m+2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}, \frac{2r+1}{m+2} + \frac{1}{2}; -1\right).
 \end{aligned}$$

3 $P = \frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p} + cx^{p-1})$ の場合

任意の実数 $R > 0$ に対して, U_k, S_k を $k = 0, 1, \dots, 2p+1$ に対して次で決まる開扇形領域とする.

$$\begin{aligned} U_k &= \left\{ x \in \mathbb{C}; |x| > R, \frac{2k-3}{2p+2}\pi < \arg x < \frac{2k+1}{2p+2}\pi \right\}, \\ S_k &= U_k \cap U_{k+1} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{C}; |x| > R, \frac{2k-1}{2p+2}\pi < \arg x < \frac{2k+1}{2p+2}\pi \right\}. \end{aligned}$$

但し, $U_{2p+2} = U_0$ とおく. このとき, $\{U_k, k = 0, 1, \dots, 2p+1\}$ は, $x = \infty$ で開扇形被覆をなす.

3.1 斉次方程式の解

方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p} + cx^{p-1})\right)y = 0$$

は, 次の性質を満たす解 y_k を持つ. つまり, y_k は x の整関数であり, 扇型領域 $S_{k-1} \cup \bar{S}_k \cup S_{k+1}$ 上で x が無限遠点に近づくとき, 次の漸近表示を持つ.

$$y_k \sim \omega^{\frac{p+1}{2}k} x^{-\frac{p+1}{2}} \left(1 + \sum_{N=1}^{\infty} B_{2N(p+1)}(\omega^{-(p+1)k} c) \omega^{kN} x^{-N}\right) \exp\left\{-\frac{1}{p+1}(\omega^{-k} x)^{p+1}\right\}$$

但し, $\omega = e^{\frac{1}{p+1}\pi i}$ であって, $B_{2N(p+1)}(c)$ は $N = 0, 1, \dots$ に対して, 次で決まる.

$$B_{2N(p+1)}(c) = \prod_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{4(2p+2)\ell} \prod_{\ell=0}^{N-1} ((2p+2)\ell - p + c)((2p+2)\ell - p - 2 + c)$$

$$B_j(c) = 0, j \neq 2N(p+1)$$

一方, $x^{p+1} = z$ とおくことにより, 作用素 $x^2 \frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p+2} + cx^{p+1})$ は次のように変換される.

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p+2} + cx^{p+1}) &= \left(x \frac{d}{dx}\right) \left(x \frac{d}{dx} - 1\right) - (x^{2p+2} + cx^{p+1}) \\ &= ((p+1)z \frac{d}{dz}) \left((p+1)z \frac{d}{dz} - 1\right) - (z^2 + cz) \\ &= (p+1)^2 z \left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + \frac{p}{p+1} \frac{d}{dz} - \frac{z+c}{(p+1)^2} \right\}. \end{aligned}$$

このとき, 微分方程式

$$\left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + \frac{p}{p+1} \frac{d}{dz} - \frac{z+c}{(p+1)^2} \right\} u = 0$$

は $z = 0, \infty$ を特異点に持つ一般合流型超幾何微分方程式であり, $z = \infty$ を頂点とする角領域で定義された解は, 一般化された Laplace 変換の形を用いて, 次の $u_-(z), u_+(z)$ で与えられる.

$$\begin{aligned} u_-(z) &= \frac{(-1)^{\frac{1}{p+1}} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1)) e^{2\pi i(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1))} - 1} \int_{L_-} e^{z\zeta} \left(\zeta - \frac{1}{p+1}\right)^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} \left(\zeta + \frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} d\zeta \\ &= \frac{\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))} \int_0^{+\infty} (-1)^{-\frac{1}{p+1}+1} e^{-z(\zeta + \frac{1}{p+1})} \zeta^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} \left(\zeta + \frac{2}{p+1}\right)^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} d\zeta \end{aligned}$$

但し, L_- は $-\infty$ から出発し, $\zeta = -\frac{1}{p+1}$ のまわりを正の向きに一周し, 再び $-\infty$ に戻る道である. $u_-(z)$ は $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ なる扇形領域で正則な解を与える.

$$\begin{aligned} u_+(z) &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1) (e^{2\pi i(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1))} - 1)} \\ &\quad \times \int_{L_+} e^{z\zeta} \left(\zeta - \frac{1}{p+1}\right)^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} \left(\zeta + \frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} d\zeta \\ &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)} \int_0^{+\infty} e^{z(\zeta + \frac{1}{p+1})} \zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} \left(\zeta + \frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} d\zeta \end{aligned}$$

但し, L_+ は $+\infty$ から出発し, $\zeta = +\frac{1}{p+1}$ のまわりを正の向きに一周し, 再び $+\infty$ に戻る道である. $u_+(z)$ は $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ なる扇形領域で正則な解を与える.

これより微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p} + cx^{p-1})\right)y = 0$$

の解で上に述べた性質を持つものは次のように与えられる.

$$\begin{aligned} y_{2k} &= \frac{\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))} \int_0^{+\infty} e^{-x^{p+1}(\zeta + \frac{1}{p+1})} \zeta^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} \left(\zeta + \frac{2}{p+1}\right)^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} d\zeta \\ y_{2k+1} &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)} \int_0^{+\infty} e^{x^{p+1}(\zeta + \frac{1}{p+1})} \zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} \left(\zeta + \frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} d\zeta \end{aligned}$$

各 y_k は, 扇型領域 S_k における subdominant solution を与える.

3.2 $\text{Ker}(\frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p} + cx^{p-1}); \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底

$\{U_0, U_1, \dots, U_{2p+1}\}$ に対する 1-cocycle を $k = 0, 1, \dots, 2p+1$ に対して

$$\{u_{j,j+1}^{(k)}, j = 0, 1, \dots, 2p+1\}, \text{ 但し } u_{2p+1,2p+2}^{(k)} = u_{2p+1,0}^{(k)}, k = 0, 1, \dots, 2p+1$$

を

$$u_{j,j+1}^{(k)} = \begin{cases} y_j & x \in S_j \quad j = k \\ 0 & x \in S_j \quad j \neq k \end{cases}$$

とおく. すると, $\{u_{j,j+1}^{(0)}\}, \{u_{j,j+1}^{(1)}\}, \dots, \{u_{j,j+1}^{(2p+1)}\}$ のコホモロジー類が $H^1(S^1, \text{Ker}(P : \mathcal{A}_0))$ の基底をなす.

漸近解析における消滅定理により,

$$u_{j,j+1}^{(k)} = -v_j^{(k)} + v_{j+1}^{(k)}$$

を満たす 0-cochain $\{v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \dots, v_{2p+1}^{(k)}\}$, ($k = 0, 1, \dots, 2p+1$) を得る. 但し, $v_j^{(k)}$ は U_j , ($j = 0, 1, \dots, 2p+1$) で定義され, それぞれ形式巾級数 $\hat{v}^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} v_{(r)}^{(k)} x^{-r}$, $k = 0, 1, \dots, 2p+1$ を漸近展開に持つ.

$$Pu_{j,j+1}^{(k)} = -Pv_j^{(k)} + Pv_{j+1}^{(k)}$$

より, $x \in S_i$ に対して,

$$Pv_j^{(k)} = Pv_{j+1}^{(k)}$$

だから,

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} Pv_j^{(k)} & x \in U_j \\ Pv_{j+1}^{(k)} & x \in U_{j+1} \end{cases}$$

とおき, 更に, 改めて,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & x \in \mathbb{C} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) & x = \infty \end{cases}$$

と表せば,

$$\hat{v}^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} v_{(r)}^{(k)} x^{-r}$$

は, 非斉次微分方程式

$$P\hat{v}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

の形式解となる. このとき, $\langle [\hat{v}^{(0)}], [\hat{v}^{(1)}], \dots, [\hat{v}^{(2p+1)}] \rangle$ が $\text{Ker}(\frac{d^2}{dx^2} - (x^2 p + cx^{p-1}); \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底をなす.

3.2.1 $v_{(r)}^{(k)}$ の計算

実際に $v_{(r)}^{(k)}$ を計算する.

漸近解析における消滅定理より, $k = 0, 1, \dots, 2p+1$ に対して, 非斉次微分方程式

$$P\hat{v}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

の形式解の係数は

$$v_r^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k}{2p+2}\pi} \infty} -x^{r-1} y_k dx, \quad k = 0, 1, \dots, 2p+1$$

によって求められる.

v_r の漸近表示

k が偶数, 奇数にかかわらず, $v_{(r)}^{(k)}$ は次のように計算出来る.

$$\begin{aligned} v_{(r)}^{(k)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{k}{p+1}\pi i} \infty} -x^{r-1} y_k dx \\ &\sim \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{k}{p+1}\pi i} \infty} \{-x^{r-1} (\omega^{-k} x)^{-\frac{p+1}{2}} (1 + \sum_{N=1}^{M-1} B_{2N(p+1)} (\omega^{-(p+1)k} c) (\omega^{-k} x)^{-N(p+1)} \\ &\quad + O(x^{r-1-\frac{p+1}{2}-M(p+1)}))\} e^{(-1)^{k+1} \frac{1}{p+1} x^{p+1}} dx \end{aligned}$$

$\omega^{-k} x = \xi$ とおく.

$$\begin{aligned} v_{(r)}^{(k)} &\sim \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \{(\omega^k \xi)^{r-1} \xi^{-\frac{p+1}{2}} (1 + \sum_{N=1}^{M-1} B_{2N(p+1)} ((-1)^k c) \xi^{-N(p+1)} \\ &\quad + O(\xi^{r-1-\frac{p+1}{2}-M(p+1)}))\} e^{-\frac{1}{p+1} \xi^{p+1}} d\xi \\ &= \frac{(-1)^{1+\frac{1}{p+1}kr}}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \{\xi^{r-1-\frac{p+1}{2}} + \sum_{N=1}^{M-1} B_{2N(p+1)} ((-1)^k c) \xi^{r-1-\frac{p+1}{2}-N(p+1)} \\ &\quad + O(\xi^{r-1-\frac{p+1}{2}-M(p+1)}))\} e^{-\frac{1}{p+1} \xi^{p+1}} d\xi \end{aligned}$$

$\frac{1}{p+1} \xi^{p+1} = \zeta$ とおく.

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^{1+\frac{1}{p+1}kr}}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \{((p+1)\zeta)^{\frac{1}{p+1}(r-1-\frac{p+1}{2})} \\ &\quad + \sum_{N=1}^{M-1} B_{2N(p+1)} ((-1)^k c) ((p+1)\zeta)^{\frac{1}{p+1}(r-1-\frac{p+1}{2}-N(p+1))} \\ &\quad + O(\xi^{\frac{1}{p+1}(r-1-\frac{p+1}{2}-M(p+1))})\} e^{\zeta} ((p+1)\zeta)^{\frac{1}{p+1}-1} d\zeta \\ &= \frac{(-1)^{1+\frac{1}{p+1}kr}}{2\pi i} (p+1)^{\frac{1}{p+1}-1} \{(p+1)^{\frac{1}{p+1}(r-1)-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{p+1}r - \frac{1}{2}) \\ &\quad + \sum_{N=1}^{M-1} B_{2N(p+1)} ((-1)^k c) (p+1)^{\frac{1}{p+1}(r-1)-\frac{1}{2}-N} \Gamma(\frac{1}{p+1}(r-1) - \frac{1}{2} - N)\} \\ &\quad + O(\Gamma(\frac{1}{p+1}r - \frac{1}{2} - M)). \end{aligned}$$

よって, r が十分大きな時, $1 \leq M < r$ なる M に対して, $v_r^{(k)}$ は次の漸近評価をもつ.

$$\begin{aligned} v_r^{(k)} &\sim \frac{(-1)^{1+\frac{1}{p+1}kr}}{2\pi i} (p+1)^{\frac{r}{p+1}-\frac{3}{2}} \{\Gamma(\frac{1}{p+1}r - \frac{1}{2}) \\ &\quad + \sum_{N=1}^{M-1} B_{2N(p+1)} ((-1)^k c) (p+1)^{-N} \Gamma(\frac{1}{p+1}(r-1) - \frac{1}{2} - N)\} \\ &\quad + O(\Gamma(\frac{1}{p+1}r - \frac{1}{2} - M)). \end{aligned}$$

$k = \text{偶数の場合}$

$$\begin{aligned}
 v_{(2k)r} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k}{p+1}\pi i} \infty} -x^{r-1} y_{2k} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k}{p+1}\pi i} \infty} -x^{r-1} \frac{\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}+1\right)\right)} \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} e^{-x^{p+1}\left(\zeta+\frac{1}{p+1}\right)} \zeta^{\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}-1\right)} \left(\zeta+\frac{2}{p+1}\right)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)} d\zeta dx \\
 &= \frac{-1 \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)}}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}+1\right)\right)} \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \zeta^{\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}-1\right)} \left(\zeta+\frac{2}{p+1}\right)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)} \int_0^{\frac{2k}{p+1}\pi i \infty} x^{r-1} e^{-x^{p+1}\left(\zeta+\frac{1}{p+1}\right)} dx d\zeta.
 \end{aligned}$$

$x^{p+1}\left(\zeta+\frac{1}{p+1}\right) = \xi$ とおく.

$$\begin{aligned}
 v_{(2k)r} &= \frac{-1 \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)}}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}+1\right)\right)} \int_0^{+\infty} \zeta^{\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}-1\right)} \left(\zeta+\frac{2}{p+1}\right)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)} \left(\zeta+\frac{1}{p+1}\right)^{-\frac{r}{p+1}} \\
 &\quad \times \frac{1}{p+1} \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \xi^{\frac{r}{p+1}-1} d\xi d\zeta \\
 &= \frac{-1 \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)}}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}+1\right)\right)} \Gamma\left(\frac{r}{p+1}\right) \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \zeta^{\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}-1\right)} \left(\zeta+\frac{2}{p+1}\right)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)} \left(\zeta+\frac{1}{p+1}\right)^{-\frac{r}{p+1}} \frac{1}{p+1} d\zeta \\
 &= \frac{-1 \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)}}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}+1\right)\right)} \Gamma\left(\frac{r}{p+1}\right) (p+1)^{-\frac{r}{p+1}+1} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{-\frac{1}{p+1}} \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \left(\frac{p+1}{2}\zeta\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}-1\right)} \left(1+\frac{p+1}{2}\zeta\right)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)} \left(1+2\frac{p+1}{2}\zeta\right)^{-\frac{r}{p+1}} \frac{p+1}{2} d\zeta \\
 &= \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)} \frac{1}{p+1} \frac{1^{-\frac{r}{p+1}}}{\Gamma\left(\frac{r}{p+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)\right)} \\
 &\quad \times F\left(\frac{r}{p+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{p+1}+1\right), \frac{r}{p+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right); -1\right).
 \end{aligned}$$

$k = \text{奇数の場合}$

$$\begin{aligned}
 v_{(2k+1)r} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k+1}{p+1}\pi i} \infty} -x^{r-1} y_{2k+1} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k+1}{p+1}\pi i} \infty} -x^{r-1} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)+1} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{c-1}{p+1}\right)}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{p+1}+1\right)+1\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{+\infty} e^{x^{p+1}(\zeta + \frac{1}{p+1})} \zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} (\zeta + \frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} d\zeta dx \\
& = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+2}}{2\pi i} \frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)} \\
& \quad \times \int_0^{+\infty} (\zeta + \frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} \zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} \int_0^{e^{\frac{2k+1}{p+1}\pi i}\infty} x^{r-1} e^{x^{p+1}(\zeta + \frac{1}{p+1})} dx d\zeta
\end{aligned}$$

$$x^{p+1}(\zeta + \frac{1}{p+1}) = -\xi \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned}
v_{(2k+1)r} & = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+2}}{2\pi i} \frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)} \int_0^{+\infty} (\zeta + \frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} \zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} \\
& \quad \times \int_0^{+\infty} (-\frac{\xi}{\zeta + \frac{1}{p+1}})^{\frac{r-1}{p+1}} e^{-\xi} (-\frac{1}{\zeta + \frac{1}{p+1}}) (\frac{1}{p+1}) (-\frac{\xi}{\zeta + \frac{1}{p+1}})^{\frac{1}{p+1}-1} d\xi d\zeta \\
& = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+2}}{2\pi i} \frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)} (-1)^{\frac{r}{p+1}-2} \frac{1}{p+1} \Gamma(\frac{r}{p+1}) \\
& \quad \times \int_0^{+\infty} (\zeta + \frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} \zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} (\zeta + \frac{1}{p+1})^{\frac{r}{p+1}} d\zeta \\
& = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+\frac{r}{p+1}}}{2\pi i} (\frac{2}{p+1})^{1-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} (\frac{1}{p+1})^{1-\frac{r}{p+1}} \frac{\Gamma(\frac{r}{p+1})}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)} \\
& \quad \times \int_0^{+\infty} (\frac{p+1}{2}\zeta)^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} (1 + \frac{p+1}{2}\zeta)^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)} (1 + 2\frac{p+1}{2}\zeta)^{-\frac{r}{p+1}} \frac{p+1}{2} d\zeta \\
& = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+\frac{r}{p+1}}}{2\pi i} (\frac{2}{p+1})^{1-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)} (\frac{1}{p+1})^{1-\frac{r}{p+1}} \frac{\Gamma(\frac{r}{p+1})\Gamma(\frac{r+1}{p+1})}{\Gamma(\frac{r}{p+1}-\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1))} \\
& \quad \times F(\frac{r}{p+1}, -\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}-1), \frac{r}{p+1}-\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1); -1).
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] 犬井鉄郎.: 特殊函数, 岩波全書 (1962), pp.182-192
- [2] Majima. H.: Resurgent Equations and Stokes Multipliers for Generalized Confluent Hypergeometric Differential Equations of the Second Order, in the Proceedings of Hayashibara Forum'90 International Symposium on Special Functions, ICM Satellite Conference Proceedings, Springer-Verlag (1991), pp.222 – 233.
- [3] Majima. H., Howls, C. J. and Olde Daalhuis, A. B.: Vanishing Theorem in Asymptotic Analysis III (to appear in “Structure of Solutions of Differential Equations” edited by T.Kawai and M. Morimoto, World Science, May 1996)
- [4] Mizuno. T.: On estimates of coefficients of formal solutions to inhomogeneous linear ordinary differential equations, Master's Dissertation, Ochanomizu University, (1996), (in Japanese).
- [5] Sibuya. Y.: Global Theory of a Second Order Linear Differential Equation with a Polynomial Coefficient, North-Holland Mathematics studies, No 18.