

擬軌道追跡性を持つ Axiom A 微分同相

木更津高専 酒井 一博 (Kazuhiro Sakai)

(X, d) をコンパクト距離空間、 $f: X \rightarrow X$ を位相同相とする。 X の点列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ が δ -擬軌道であるとは、 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ ($i \in \mathbb{Z}$) が成立するときを言う。 f が擬軌道追跡性 (POTP) を持つとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し、 f の任意の δ -擬軌道 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ に対しある $y \in X$ が存在して $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ ($i \in \mathbb{Z}$) が成立するときを言う。

Bowen は ω -極限集合の研究に POTP が有効であることを示し、さらにエルゴード理論の研究にも利用した。微分可能力学系においては、POTP はある意味で自然に生じる性質であると言える。例えば、Axiom A 微分同相が強横断性を満たせば、POTP を持つ。従って、自然な問題として POTP を持つ Axiom A 微分同相は強横断性を満たすだろうかという疑問が生じる。また森本 [4] は、POTP を持つ微分同相全体は、閉多様体上の微分同相の空間 (C^1 -位相を与える) の中で residual な集合かという問題を提起した。ここでは

この2つの問題に関連して得られた結果について述べる。

M を 3次元閉 C^∞ 多様体とし、 M 上の C^1 -微分同相全体に C^1 -位相を与えた空間を $\text{Diff}^1(M)$ で表す。POTP を持つ M 上の微分同相全体を $P^1(M)$ で表し、 $\text{Diff}^1(M)$ における $P^1(M)$ の内点を $\mathcal{P}^1(M)$ で表す。

定理1. $P^1(M)$ が $\text{Diff}^1(M)$ で稠密でないような M が存在する。

定理2. 任意の M に対し、 $\mathcal{P}^1(M)$ は Axiom A 微分同相で強横断性を満たすもの全体として特徴づけられる。

定理1は、[2]と[8]の結果を組み合わせることにより得られる。

すべての周期点が双曲的であるような微分同相 $f \in \text{Diff}^1(M)$ の全体の内点を $\mathcal{F}^1(M)$ で表す。最近、青木[1]は、[3]と[6]の結果を用いることにより、 $\mathcal{F}^1(M)$ は Axiom A 微分同相で no-cycle を満たすもの全体として特徴づけられることを示した。その後、守安[5]は $\mathcal{P}^1(M) \subset \mathcal{F}^1(M)$ であること、さらに、 $f \in \mathcal{P}^1(M)$ に対し、もしすべての $x \in M$ で安定多様体 $W^s(x)$ の次元が $\{0, \dim M - 1, \dim M\}$ のどれかに等しけ

れば、 f は強横断性を満たすことを示した。

定理2の証明は [5]の結果に基づいて行なわれる。 $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_\ell$ を $f \in \mathcal{P}^1(M)$ のスペクトル分解とする。仮りに f が強横断性を満たさないとする。ある $x \in \Lambda_{i_1}$ と $y \in \Lambda_{i_2}$ で $W^u(x) \cap W^s(y) \neq \emptyset$ かつ $\dim W^u(x) = \dim W^s(y) = 1$ ($\dim M = 3$ であるから。) を満たすものが存在する。 f が PCTP を持つことを用いるとさらにある点 $z \in \Lambda_{i_3} \neq \Lambda_{i_2}$ で $W^u(x) \cap W^s(z) \neq \emptyset$, $\dim W^s(z) = 1$ として $W^u(\Lambda_{i_2}) \cap W^s(\Lambda_{i_3}) \neq \emptyset$ を満たすものの存在が示せる。 さて $W^u(x) \cap W^s(z) \neq \emptyset$ で $\dim W^u(x) = \dim W^s(z) = 1$ より、全く同様にしてある $z' \in \Lambda_{i_4} \neq \Lambda_{i_3}$ で $W^u(x) \cap W^s(z') \neq \emptyset$, $\dim W^s(z') = 1$ として $W^u(\Lambda_{i_3}) \cap W^s(\Lambda_{i_4}) \neq \emptyset$ を満たすものの存在が証明できる。以上の議論を繰り返すことにより $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell\}$ の中で cycle ができてしまい、 $f \in \mathcal{P}^1(M)$ は cycle を持たないということに反する。以上の証明の詳細はいずれかの数学雑誌に掲載される予定である。

参考文献

1. N. Aoki, The set of Axiom A diffeomorphisms

with no-cycle, preprint.

2. J. Franks and C. Robinson, A quasi-Anosov diffeomorphisms that is not Anosov, Trans. AMS, 223 (1976) 267-278.

3. R. Mañé, A proof of the C^1 stability conjecture, Publ. Math. IHEs, 66 (1987), 161-210.

4. 森本明彦, 擬軌道追跡性の方法と力学系の安定性, 東大数学教室セミナー・ノート, 39 (1979).

5. K. Moriyasu, The topological stability of diffeomorphisms, to appear in Nagoya Math. J.

6. J. Palis, On the C^1 stability conjecture, Publ. Math. IHEs, 66 (1987), 211-215.

7. C. Robinson, Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems, Rocky Mountain J. Math. 7 (1977), 425-437.

8. K. Sakai, Quasi-Anosov diffeomorphisms and pseudo orbit tracing property, Nagoya Math. J. 111 (1988), 111-114.