

複素多様体上での複素 Monge - Ampère 方程式 に対する Dirichlet 問題

東工大 理 鈴木 誠 (Makoto Suzuki)

M を連結パラコンパクトな n 次元複素多様体とし、 Ω をその相対コンパクトな開集合とする。 M 上、 $d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$ と表す。 Ω 上の局所有界な多重劣調和関数 u に対し、Bedford-Taylor [2] の方法に従って、

$$(dd^c u)^k := \underbrace{(dd^c u) \wedge \cdots \wedge (dd^c u)}_{k \text{ 回}} \quad (k \leq n)$$

が、 (k, k) -型正カレントとして定義できる。よって $(dd^c u)^n$ は、 Ω 上の、Radon 測度を係数に持つ (n, n) -型微分型式とみなすことができる。

次の非線型 Dirichlet 問題を考える： Ω 上の非負値関数 f 及び、 $\partial\Omega$ 上の実数値関数 ϕ に対し、

$$(M) \quad \begin{aligned} (dd^c u)^n &= f dV && \text{on } \Omega \\ u &= \phi && \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

をみたす多重劣調和関数 u をみつけよ。但し、 dV は、 M 上に

あらかじめ与えられたエルミート計量から得られる体積要素を表すものとする。

Bedford - Taylor [2] は、 $M = \mathbb{C}^n$ 、 Ω をその相対コンパクトな C^2 級の境界を持った強擬凸領域とするとき、 $\bar{\Omega}$ (Ω の M における閉包) 上の連続関数 f 、 $\mathbb{R}$ 上の $\partial\Omega$ (Ω の境界) 上の連続関数 ϕ に対し、Dirichlet 問題 (M) を解き、その解が $\bar{\Omega}$ で連続になることを示した。彼らは、本質的には、各多重劣調和関数 u に、 $(\det(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_i \partial z_j}))^{\frac{1}{n}}$ なる Radon 測度を対応させる作用素 Φ を定義し、それに対する Perron - Bremermann の方法によって解いたが、実は、局所有界な多重劣調和関数の単調列に対する作用素 $u \mapsto (dd^c u)^n$ の連続性 (測度空間における弱収束性) から、 Φ を媒介せずに少しよい結果が得られる。さらにこの結果を用いて、複素多様体上の相対コンパクトな強擬凸領域に対して Dirichlet 問題 (M) を f と ϕ に関する条件をつけて解けることを示す。

以下 §.1 では、Monge - Ampère 作用素 $u \mapsto (dd^c u)^n$ の基本的な性質を述べ、§.2 でそれを用いてまず $\mathbb{C}^n$ 内の単位球 $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ 上で、(M) を解く。§.3 では、§.2 の結果を用いて連結パウコンパクトな複素多様体上で (M) を考察する。以下の節を通じて、 M は、連結パウコンパクトな n 次元複素多様体とする。

§.1 複素 Monge-Ampère 作用素 $u \mapsto (dd^c u)^n$ の基本的性質

この節では、複素 Monge-Ampère 作用素についての重要な性質を後に使われる形でまとめておく。

複素 Monge-Ampère 作用素 $u \mapsto (dd^c u)^n$ は、連続な多重劣調和関数の中では一様収束位相に関して連続に働く (Bedford, Taylor [2]) が局所有界多重劣調和関数の中では、うまくいかない。しかし、単調な関数列に関しては連続に作用する：

定理 1.1 (Bedford, Taylor [4], 福島 [8])

複素多様体 M が、その上に大域的に定義された連続な強多重劣調和関数を持つと仮定する。 Ω を M 内の開集合とする。 $\{u_j\}$ を局所有界な多重劣調和関数の単調減少あるいは単調増加な列で、 Ω 上ほとんどどこいたるところで、ある局所有界な多重劣調和関数 u に収束しているものとする。このとき $(dd^c u_j)^n$ は $(dd^c u)^n$ に Ω 上で弱収束する。

証明は、 M に対する条件が、 $\mathbb{C}^n$ の場合と同様にしてできる。さらに次の性質は、重要：

定理 1.2 (Bedford, Taylor [2])

M, Ω は定理 1.1 と同じとする。 Ω 上の局所有界な多重劣調和関数 u, v に関して、次が成立する：

$$(1) \quad (dd^c [\max(u, v)])^n \geq \max((dd^c u)^n, (dd^c v)^n)$$

$$(2) \quad (dd^c (u+v))^n \geq (dd^c u)^n + (dd^c v)^n$$

u, v が連続な場合の結果から、単調減少する近似列を通して得られる。これらを用いて次の比較定理を得る。

定理 1.3 (Bedford, Taylor [2], [4], Cegrell [6], 福島 [8])

M, Ω は定理 1.1 のとおりとする。 Ω 上の有界な多重劣調和関数 u, v が、各点 $z \in \partial\Omega$ に対し

$$\liminf_{\Omega \ni z \rightarrow z} (u(z) - v(z)) \geq 0$$

かつ、 Ω 上で $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ をみたすならば、 Ω 上で $u \geq v$ 。

さらに次の比較定理も重要である：

定理 1.4 (福島 [8])

Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の開集合、 Ω' を Ω 内の相対コンパクトな開集合とする。 Ω 上の有界多重劣調和関数 u, v が $\partial\Omega'$ 上で $u \geq v$ 、 Ω' 上で $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ をみたすならば Ω' 上で $u \geq v$ 。

§.2. B^n に対する解

さて、複素 Monge-Ampère 方程式 (M) を解くために、以下では Perron-Bremermann の方法 (例えば Bremermann [5]) を用いる。 Bedford, Taylor は 上包関数 (upper envelope) の連続性を保証するために作用素 Φ を用いざるを得なかったが、定理 1.1 のみかげでその必要はなくなる。次の Perron 族を定義する。 M を n 次元複素多様体でその上に大域的に定義された連続な強多重

劣調和関数が少なくとも1つ存在するものと仮定する(以下、特にことわらない限り M はこの条件をみたすものと仮定する)。

M の Hermite 計量から得られる体積要素を dV とし、 Ω を M 内の開集合とする。 $\partial\Omega$ 上の実数値 ($\pm\infty$ も含めて) 関数 ϕ , Ω 上の非負値局所可積分関数 f に対し、

$$\mathcal{L}(\phi, f) := \left\{ v \in P(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega) : \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} v(z) \leq \phi(\zeta) \text{ for } \forall \zeta \in \partial\Omega, \right. \\ \left. \text{かつ } (dd^c v)^n \geq f dV \text{ on } \Omega \right\}$$

と定義する。但し、 $P(\Omega)$ は Ω 上の多重劣調和関数の集合、 $L_{loc}^\infty(\Omega)$ は Ω 上の局所有界可積分関数全体の集合とする。 Ω をバリエーの存在するような領域とし、 ϕ 及び f に条件をつける。次の基本的な命題が得られる (Bedford, Taylor [2], Theorem 6.2 と比較せよ)。

定理 2.1

Ω は M 内の相対コンパクトな強擬凸領域とする。 $\partial\Omega$ 上の連続関数 ϕ 及び Ω 上の非負値有界可測関数 f に対し、 Ω 上で、

$$u(z) := \sup \{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f) \}$$

とおくと、各 $\zeta \in \partial\Omega$ に対し、

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} u(z) = \phi(\zeta).$$

で $u \in \mathcal{L}(\phi, f)$ である。

(証明) M 上の連続な強多重劣調和関数 u に対し、適当な実数 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ をとれば、 ϕ 及び f の有界性から、 $C_1 u - C_2$

は、 $\mathcal{L}(\phi, f)$ に属するようにできることに注意する。まず $\varepsilon > 0$ をとり固定すると各 $z \in \partial\Omega$ に対し、ある多重劣調和関数 $\psi_z \in \mathcal{L}(\phi, f) \cap C(\bar{\Omega})$ で

$$\psi_z(z) = \phi(z) - \varepsilon/2$$

をみたすものがとれる。なぜなら、まず z における Ω の局所定義関数 ρ をとる。即ち ρ は、 z の適当な近傍 N (M の z における 1つの局所座標近傍に含まれるようにとておく。) 上の C^2 級強多重劣調和関数で、

$$\Omega \cap N = \{z \in N : \rho(z) < 0\}, \quad \partial\Omega \cap N \subset \{z \in N : \rho(z) = 0\}$$

をみたす。そこで z の近傍 $N_1 \subset N$ をとると、ある正数 $\delta > 0$ を十分小さくとれば、 $\forall z \in N_1$ と $\forall w \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) w_j \bar{w}_k \geq \delta |w|^2$$

をみたすようにできる。 $\delta' \in \mathbb{R}$ を $\delta > \delta' > 0$ とする。さらに z の近傍 $N_2 \subset N_1$ をとり、適当な正数 $C_3 > 0$ をとれば、 $\forall z \in N_1 \setminus N_2$ に対し

$$\inf_{z \in N_1 \setminus N_2} \{C_1 r(z) - C_2\} > C_3(\rho(z) - \delta'|z - z|^2) + \phi(z) - \varepsilon/2$$

でかつ、 N_1 上

$$(dd^c[C_3(\rho(z) - \delta'|z - z|^2)])^n \geq f dV$$

なるようにできる。そこで、

$$\psi_z(z) = \begin{cases} \max\{C_1 r(z) - C_2, C_3(\rho(z) - \delta'|z - z|^2) + \phi(z) - \varepsilon/2\} & z \in N_1 \\ C_1 r(z) - C_2 & z \in M \setminus N_1 \end{cases}$$

とよく定理 1.2 より、 $\psi_z \in \mathcal{L}(\phi, f) \cap C(\bar{\Omega})$ でかつ、

$$v_z(z) = \phi(z) - \varepsilon/2.$$

をみたす。\$\phi\$ 及び \$v_z\$ の連続性より、各 \$z\$ のある近傍では、

\$\phi - \varepsilon < v_z\$ が成立する。\$\partial\Omega\$ はコンパクトだから、上記の \$v_z\$ の

有限個をとって \$z \in \bar{\Omega}\$ に対し

$$v_\varepsilon(z) := \sup \{ v_z(z) \}$$

とおくと、\$v_\varepsilon \in \mathcal{L}(\phi, f) \cap C(\bar{\Omega})\$ で \$\partial\Omega\$ 上 \$\phi - \varepsilon < v_\varepsilon\$ だから、

$$\phi(z) - \varepsilon < \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow z} u(z) \quad *z \in \partial\Omega.$$

逆の不等式を得るためには、各 \$z \in \partial\Omega\$ に対し、\$\bar{\Omega}\$ 上の連続な多重優調和関数 \$w_z\$ で、\$\partial\Omega\$ 上では \$w_z \geq \phi\$ で、

$$w_z(z) = \phi(z) + \varepsilon/2$$

なるものを作る。\$w_z\$ と \$\phi\$ の連続性及び \$\partial\Omega\$ のコンパクト性より、\$z \in \bar{\Omega}\$ に対し

$$w_\varepsilon(z) := \inf \{ w_z(z) \}$$

とおくと \$w_\varepsilon \in C(\bar{\Omega}) \cap P(\Omega)\$ で \$\partial\Omega\$ 上では

$$\phi(z) \leq w_\varepsilon(z) < \phi(z) + \varepsilon$$

をみたす。従って最大値の原理より、\$u \in \mathcal{L}(\phi, f)\$ に対し \$\Omega\$ 上で

\$u \leq w_\varepsilon\$。よって各 \$z \in \partial\Omega\$ に対し、

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow z} u(z) < \phi(z) + \varepsilon$$

となり、

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow z} u(z) = \phi(z) \quad z \in \partial\Omega$$

を得る。

さて、上記のことより $u^* \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ がわかる。一方、G. Choquet の補題 [10], ある u は、Vitali の被覆定理より、 Ω 上の単調増加列で、 Ω のほとんどいたるところで u^* に収束するような $\mathcal{L}(\emptyset, f)$ の元からなる列 $\{u_j\}$ がとれる。従って $(dd^c)^n$ の連続性定理 1.1 より

$$fdV \leq \lim (dd^c u_j)^n = (dd^c u^*)^n.$$

よって $u^* \in \mathcal{L}(\emptyset, f)$ となり、 $u^* \leq u$ 。従って $u \in \mathcal{L}(\emptyset, f)$ 。

[証明終わり]

さて、上包関数 u の regularity を示すには、J.B. Walsh の方法 [11] が有効である。これを用いて Bedford, Taylor は、次のことを示した。記号を簡略にするため、次の記法を用いる。非負整数 k と、 $0 < \alpha \leq 1$ に対し一様 Hölder 空間 $C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ を $\text{Lip}^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ で表す。 $\text{Lip}^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$ とする。

定理 2.2 (Bedford, Taylor [2], Theorem 6.2).

定理 2.1 と同じ記号を用いる。 $M = \mathbb{C}^n$, $0 \leq \alpha \leq 1$ に対し、 $\emptyset \in \text{Lip}^{2\alpha}(\partial\Omega)$, $f \in \text{Lip}^\alpha(\bar{\Omega})$ ならば上包関数 u は、 $u \in \text{Lip}^\alpha(\bar{\Omega})$ 。

定理 2.2 の証明も Φ を用いずにできる(評価に用いる係数を少し変えればよい)。さらに M が定理 2.1 の仮定をみたす単連結な多様体のときには、 $\bar{\Omega}$ の単連結な Stein 近傍が存在して、その上の正則接バンドルは、正則的に trivial である。従って、

この場合には浅場 [1] の方法により上包関数の連続性を示すことができる (金子 [9] も参照)。

B^n に対する Dirichlet 問題を解こう。以下の定理においても、作用素 Φ に関する評価を全く使わずに $\mathcal{L}(\phi, f)$ の範囲を $(dd^c)^n$ で処理できる。 Φ に対する証明の中の係数を注意して、変更すればよい。 B^n 上の解析的自己同型群が推移的であることを用いて次のことがわかる。

定理 2.3 (Bedford, Taylor [2] Theorem. 67)

$\Omega = B^n$ ($\mathbb{C}^n$ 内の単位球) とする。 $\phi \in C^2(\partial B^n)$, $f \in C^2(\overline{B^n})$, $f \geq 0$ とする。 $z \in B^n$ に対し、

$$u := \sup \{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f) \}$$

とすると、 u は局所有界 2 階偏導関数を持つ。

そこで、 $(dd^c u)^n = f dV$ を示せば (Bedford-Taylor [2], Theorem 8.1 も、 Φ に関することは使わない) 次の結果が得られたことになる。なお、Bedford, Taylor [2] の Theorem 8.1 にあける f についての仮定 $f \in C^2(\overline{B^n})$ は、(Φ を用いなかっただけで) 不要になる。

定理 2.3

$\Omega = B^n$ とする。 $\phi \in C^2(\partial B^n)$, $f \in C^2(\overline{B^n})$, $f \geq 0$ に対し、

$$u(z) := \sup \{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f) \} \quad z \in B^n$$

は、次の Dirichlet 問題:

$$u \in P(B^n) \cap C(\bar{B}^n).$$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{z}} u(z) = \phi(\bar{z}) \quad \forall \bar{z} \in \partial B^n$$

$$(dd^c u)^n = f dV \quad \text{on } B^n$$

の一意な解でしかも u は、局所有界 2 階偏導関数を持つ。

一意性は定理 1.3 より従う。退化する場合を含んだ解の正則性についての結果が得られたわけである。

§ 3. M 上での解の存在

この節では、まず、 B^n 上で、境界データ ϕ は μ Monge - Ampère データ ϕ の regularity を弱めても、それに対する Dirichlet 問題の解の存在が保証されるかということについて述べよう。比較定理 1.3 より、データの単調列に対して得られる解の列の単調性が保証される。従って与えられたデータ関数に単調収束する関数列を作り、それから得られる解の列の極限が、もとのデータに対する解であることを $(dd^c)^n$ の連続性定理に照らして検証すればよい。この方法によりまず次の結果を得る:

定理 3.1 (Bedford-Taylor [2], Theorem 8.2)

$\Omega = B^n$ とする。 $\phi \in C(\partial B^n)$, $f \in C(\overline{B^n})$, $f \geq 0$ とし、

$$u := \sup \{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f) \} \quad z \in B^n$$

とすると、 u は $\overline{B^n}$ まで連続に拡張できて(それを同じく u で表す), 次の Dirichlet 問題の解を与える:

$$u \in P(B^n) \cap C(\overline{B^n})$$

$$(dd^c u)^n = f dV \quad \text{on } B^n$$

$$u = \phi \quad \text{on } \partial B^n$$

さらに、同じ方法を用いて、次の結果を得る。

定理 3.2 (Cegrell [6], Lemma 2).

$\Omega = B^n$, $\phi \in C(\partial B^n)$, $f \in L^\infty(B^n)$, $f \geq 0$ とする。このとき、

$$u := \sup \{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f) \} \quad z \in B^n$$

は、次の Dirichlet 問題の一意的解である:

$$u \in P(B^n) \cap L^\infty(B^n)$$

$$(dd^c u)^n = f dV \quad \text{on } B^n$$

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} u(z) = \phi(\zeta) \quad \zeta \in \partial B^n.$$

さて、考える領域を、複素多様体上に拡張しよう。定理 3.2

は、 Ω が $\mathbb{C}^n$ 内の強擬凸領域の場合にも成立する (Cegrell [6],

Lemma.2)。これは、局所有界な多重劣調和関数の Monge - Ampère 測度が局所的に改変できることによる (福島 [1])。

そこで、与えられた Monge - Ampère データを達成する関数の存在を示す。 Ω 上の局所可積分関数 f に対し、

$$\Omega_f := \{z \in \Omega : z \text{ のある近傍 } N \text{ 上では } f|_N \in L^\infty(N)\}$$

とおく。 Ω_f は開集合である。また Ω 上の関数 u に対し、

$$u^*(z) := \limsup_{\Omega \ni x \rightarrow z} u(x) \quad z \in \Omega \quad (u \text{ の upper regularization})$$

とおく。次の定理は、福島 [8] による。

定理 3.3

複素多様体 M ($\dim M = n$) の開部分集合を Ω とし、 M の Hermite 計量から得られる体積要素 dV を定めておく。このとき、 Ω 上の正值局所可積分関数 f 、 Ω 上の実数値関数 ($\pm\infty$ の値も許す) ϕ に対し、 $\mathcal{L}(\phi, f) \neq \emptyset$ で、

$$u := \sup \{ v(x) : v \in \mathcal{L}(\phi, f) \}$$

が局所的に上に有界ならば、 $\Omega_u \cap \Omega_f$ 上で、

$$(dd^c u^*)^n = f dV.$$

(証明)

まず、次のことを証明する。

定理 3.3 の条件のもとで、 $\forall v \in \mathcal{L}(\phi, f)$ & $\forall z \in \Omega_f$ に対し、ある z の近傍 $N \subset \Omega_f$ と、 Ω 上の多重劣調和関数 $\tilde{v}$ で次の条件をみたすものが存在する:

$$i) \quad \Omega \text{ 上で } \tilde{v} \geq v$$

$$ii) \quad \Omega \setminus N \text{ で } \tilde{v} = v$$

$$iii) \quad N \text{ 上で } (dd^c \tilde{v})^n = fdV.$$

z における局所座標近傍内に z を中心とした、 n 次元超球に面正則同値な近傍 B, N を $\Omega_f \supset B \supset N$ なるようにとる。 B 上で v に単調減少して収束するような、 B 上の多重劣調和関数の列 $\{v_k\}$ を取る。定理 3.2 より、各 v_k に対し、 N 上の有界多重劣調和関数 w_k で N 上では、

$$(dd^c w_k)^n = fdV$$

かつ、 $\forall z \in \partial N$ に対し、

$$\lim_{B \ni z \rightarrow z} w_k(z) = v_k(z)$$

となるものが存在する。比較定理 1.3 より、 $\{w_k\}$ は N 上の単調減少列で、各 k について、 N 上で $w_k \geq v$ をみたす。そこで

$$w(z) := \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(z) \quad z \in N$$

とすると、 w は N 上の有界多重劣調和関数である。そこで、

$$\tilde{v}(z) := \begin{cases} w(z) & z \in N \\ v(z) & z \in \Omega \setminus N \end{cases}$$

とすると、 $\tilde{v}$ は、 Ω 上の局所有界多重劣調和関数になる。連続性定理より、 N 上では、

$$(dd^c \tilde{v})^n = \lim_{k \rightarrow \infty} (dd^c w_k)^n = fdV$$

だから、 Ω 上で

$$(dd^c \tilde{u})^n \geq f dV$$

境界値はひと変わらないから、 $\tilde{u} \in \mathcal{L}(\phi, f)$ を得る。

さて、 $\Omega_u \cap \Omega_f$ 上で

$$(dd^c u^*)^n = f dV$$

なることを示そう。G. Choquet の補題 (Lelong [101]) より、 Ω 上の単調増加列で、 u^* にほとんどいたるところで収束するものは $\mathcal{L}(\phi, f)$ の元からなる列 $\{u_j\}$ がとれる。結論は、局所的に、各 $z \in \Omega_u \cap \Omega_f$ の近傍で示せばよい。 N を Ω_u に入るようにとり、各 u_j について N 上で局所改変 (上記の主張) したものを $\tilde{u}_j$ とする (N は j について一様にとれる)。このとき、 $j > k$ ならば、 $\forall z \in \partial N$ に対し、

$$\tilde{u}_j(z) = u_j(z) \geq u_k(z) = \tilde{u}_k(z)$$

であるから、比較定理 1.4 により、 N 上で

$$\tilde{u}_j \geq \tilde{u}_k.$$

従って、 $\{\tilde{u}_j\}$ は、 Ω 上の単調増加列で、 Ω 上では、

$$u_j \leq \tilde{u}_j \leq u \leq u^*$$

だから、 Ω 上のほとんどいたるところで、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{u}_j(z) = u^*(z).$$

$N \subset \Omega_u$ だから $(dd^c u^*)^n$ は N 上で定義され、連続性定理より、

N 上では、

$$(dd^c u^*)^n = \lim_{j \rightarrow \infty} (dd^c \tilde{u}_j)^n = f dV$$

を得る。

[証明終わり].

定理 2.1, 定理 3.3, 及び比較定理より、たまたに次の定理を得る。

定理 3.4.

M を n 次元複素多様体で、その上に大域的に定義された連続な強多重劣調和関数を持つものとする。 M の Hermite 計量から得られる体積要素を dV とする。 Ω を M の相対コンパクトな強擬凸領域、 Ω 上の連続関数 ϕ 及び、 Ω 上の非負値有界可測関数 f に対し、 Ω 上で

$$u(z) := \sup \{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f) \}$$

とおく。すると、 u は、Dirichlet 問題

$$u \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} u(z) = \phi(\zeta) \quad \zeta \in \partial\Omega$$

$$(dd^c u)^n = f dV \quad \text{on } \Omega$$

の一意的解である。

定理 2.1 と定理 3.3 の方法を、少し精密に (懲りずに) 押し進めると、次の、やや nonsense な結果を得ることになる。

定理 3.5. M, dV, Ω は定理 3.4 に同じとする。境界条件 ϕ は、 $\partial\Omega$ 上の有界な上半連続関数で次の条件をみたすとする:

(*) 各 $z \in \partial\Omega$ に対し、 z の近傍 N と、 $\Omega \cap N$ 上の局所有界な多重劣調和関数 h があって、 $\partial\Omega \cap N$ では $\limsup_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ \zeta \in \partial\Omega \cap N}} h(z) = \phi(\zeta)$,

Monge-Ampère テータ f は、 Ω 上の非負値局所可積分関数で、次の条件をみたすとする:

(**) Ω 上のある多重劣調和関数 φ で、 $\partial\Omega$ の近くで有界、

$\Omega \setminus \{\varphi = -\infty\}$ で局所有界可測なものがあり、 Ω 上で

$$(dd^c \varphi)^n \geq f dV$$

となっている。

このとき、

$$u(z) := \sup \{v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f)\}$$

は、次の Dirichlet 問題の解を与える:

$$u \in P(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega \setminus \{\varphi = -\infty\})$$

$$\limsup_{\substack{\Omega \ni z \rightarrow \zeta}} u(z) = \phi(\zeta) \quad \zeta \in \partial\Omega$$

$$(dd^c u)^n = f dV \quad \text{on } \Omega.$$

境界の近くで有界な多重劣調和関数に対して $(dd^c)^n$ が定義されることは、Demailly [7] による。(**) の条件は、 $\mathcal{L}(\phi, f)$ が空でないことを示しているが、あまりいい条件ではない。実際、 $f \in L^\infty(\Omega)$ となってしまうかもしれない。 φ が引き出され

る $(dd^c p)^n$ の情報については、Chern, Levine, Nirenberg 型の評価 (Bedford, Taylor [2][4]) があるが、それ以外には、一般的には、あまり知られていないように思う。Monge-Ampère データがディラック測度の場合には、境界条件が連続な場合、log order の特異性を持たせると一意に解くことができるが、一般の測度に対しては、まだわがらぬ。最後に、2次元の複素多様体の場合には、Bedford, Taylor [3] により、ある場合に、ソボレフ空間内に解を持つことがわかっていることを付け加えておく。

参 考 文 献

- [1] Asaba, T., Asymptotic Dirichlet Problem for a complex Monge-Ampère operator, Osaka J. Math. 29(1986), 815-821
- [2] Bedford, E., Taylor, B.A.: The Dirichlet Problem for a Complex Monge-Ampère Equation, Invent. Math. 37(1976), 1-44,
- [3] _____ : Variational properties of the complex Monge-Ampère equation I, Dirichlet principle, Duke Math. J. 45(1978), 375-403

- [4] Bedford. E., Taylor. B.A. : A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math., 149, (1982), 1-41
- [5] Bremermann, H. : On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterization of Silov boundaries. Trans. Amer. Math. Soc 91, (1959) 246-276.
- [6] Cegrell. U. : On the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator, Math. Z. 185 (1984) 247-251
- [7] Demailly. J.P : Measures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques, Math. Z. 194, (1987) 519-564
- [8] 福島正俊 : 等角拡散過程と多重劣調和関数. 東京工業大学における講義. (1986)
- [9] Kaneko. H. : A stochastic resolution of a complex Monge-Ampère equation on a negatively curved Kähler manifold, Osaka J. Math. 24 (1987), 307-320
- [10] Lelong. P. : Fonctions Plurisousharmoniques et Formes Différentielles Positives. Gordon and Breach. New York 1968
- [11] Walsh. J.B. : Continuity of Envelopes of Plurisubharmonic Functions. J. Math. Mech. 18, (1968) 143-148