

戸田分子方程式

広大工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

現在ソリトン方程式として知られてゐる非線形偏微分(差分)方程式は無数にあるが、それらの方程式の間、関係は必ずしも明確になつてゐない。我々はソリトン方程式を変換して2次形式に表現し、2次形式にあるソリトン方程式の統一化を目指している。KP方程式系がソリトン方程式の一つの基本的な方程式であり、KP方程式系の2次形式が Plücker relation に "等しい" ことを発見した佐藤スクールの成果は、この方向への偉大な一歩であるが、KP方程式系だけでは記述できてゐないソリトン方程式も数多く残されてゐる。その一つとして戸田分子方程式がある。この論文では第一に、戸田分子方程式の解が任意関数を含む Wronskian で表現され、戸田分子方程式が行列式における Jacobi の公式に等しいことを示す。第二に戸田分子方程式の Bäcklund 変換の存在を示し、この Bäcklund 変換の式が、2-wave interaction の

拡張した $2N$ -wave interaction を記述する方程式に於いて
 $\tau = t$ と示す。

次の二次元戸田分子方程式を考へる

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}, \quad n=1, 2, \dots, N, (1)$$

境界条件は $V_0 = V_{N+1} = 0$ とする。

変換 $V_n = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log f_n$ により (1) 式は次の2次形式に於て

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_n \right] f_n - \left[\frac{\partial f_n}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial f_n}{\partial y} \right] = f_{n+1} f_{n-1}. \quad (2)$$

(2) 式の解として任意関数 $W(x, y)$ の Wronskian を考へる

$$f_n = \det \left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} W(x, y) \right|_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (3)$$

$$f_0 = 1.$$

(2) 式が (3) 式の表現に於て, Jacobi の公式

$$D \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix} = D \cdot D \begin{pmatrix} n, n+1 \\ n, n+1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Jacobi: Journ. f. Math 12, 1833, Werke 3, p. 191-268
 に等しい事を示す。

次の記号を導入する。

$$D \equiv \det \left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

$$= f_{n+1}.$$

$D \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ = 行列式 D の中から i 行 j 列を消去した $n \times n$ 行列式,

$D \begin{pmatrix} i, k \\ j, l \end{pmatrix}$ = 行列式 D の中から i, k 行と j, l 列を消去した
($n-1$) $\times$ ($n-1$) 行列式.

この記号によつて f_n と f_{n-1} はそれぞれ

$$f_n = D \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}, \quad f_{n-1} = D \begin{pmatrix} n, n+1 \\ n, n+1 \end{pmatrix}$$

と表現される。一方 Wronskian の微分がもつ簡潔な性質によつて、 f_n の微分は次のようになる

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = D \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_n}{\partial y} = D \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} = D \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}.$$

これらの関係式を 2 次形式 (2) に代入すると、(2) 式は次のようになる

$$D \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix} = D \cdot D \begin{pmatrix} n, n+1 \\ n, n+1 \end{pmatrix}$$

とよび、Jacobi の公式になる。

次に二次元戸田分子方程式の Bäcklund 変換を考へる。

2次形式 (2) 式は 微分演算子

$$D_x^n D_y^m f(x, y) \cdot g(x, y) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^m f(x, y) g(x', y') \Big|_{\substack{x'=x \\ y'=y}}.$$

と導くことができる

$$D_x D_y f_n \cdot f_n = 2 f_{n+1} f_{n-1}. \quad (5)$$

と表現される 2次形式の Bäcklund 変換の式は

$$\begin{cases} D_x f_n' \cdot f_n = f_{n+1} f_{n-1}', & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_y f_{n+1} \cdot f_n' = f_{n+1}' f_n & (7) \end{cases}$$

と表すことができる

$$D_x D_y f_n' \cdot f_n' = 2 f_{n+1}' f_{n-1}' \quad (8)$$

が成立する。

(6), (7) 式の両立条件が戸田分子方程式を与えることを示す。

今

$$f_n' = \psi_n f_n, \quad V_n = \frac{d^2}{dt^2} \log f_n = \frac{f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2}.$$

$$I_n = \frac{\partial}{\partial y} \log(f_{n+1}/f_n) = \frac{D_x f_{n+1} \cdot f_n}{f_{n+1} f_n}$$

とおくと、式(6),(7) は次の逆散乱形式を与える

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = V_n \psi_{n-1}, \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y} = -\psi_{n+1} - I_n \psi_n. \end{array} \right. \quad (9)$$

(10)

(9), (10) 式に対する両辺条件 $\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y \partial x}$ より、次式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \log V_n = I_{n-1} - I_n, \\ \frac{\partial}{\partial y} I_n = V_n - V_{n+1}. \end{array} \right.$$

が得られる。この式より I_n を消去すると、戸田分子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}$$

となる。

2次形式による Backlund 変換の式は新しいソリトン方程式を与えることが知られている。このために次の新しい従属変数 u_n, v_n を導入する。

$$u_n = -\frac{\partial}{\partial y} \log(f_n/f_{n-1}') \quad (11)$$

$$= -\frac{D_y f_n \cdot f_{n-1}'}{f_n f_{n-1}'} \quad (\text{定義 } 1=f, z) \quad (12)$$

$$= -\frac{f_n' f_{n-1}}{f_n f_{n-1}'} \quad ((17) \text{式より}) \quad (13)$$

$$v_n = -\frac{\partial}{\partial x} \log(f_n'/f_n) \quad (14)$$

$$= -\frac{D_x f_n' \cdot f_n}{f_n' f_n} \quad (\text{定義 } 1=f, z) \quad (15)$$

$$= -\frac{f_{n+1} f_{n-1}'}{f_n' f_n} \quad ((16) \text{式より}) \quad (16)$$

と定義する。このとき

$$\frac{\partial}{\partial x} \log u_n = \frac{\partial}{\partial x} [\log(f_n'/f_n) - \log(f_{n-1}'/f_n)] \quad ((13) \text{式より})$$

$$= -v_n + v_{n-1} \quad ((14) \text{式より}) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \log v_n = \frac{\partial}{\partial y} [\log(f_{n+1}/f_n') - \log(f_n/f_{n-1}')] \quad ((16) \text{式より})$$

$$= -u_{n+1} + u_n \quad ((11) \text{式より}) \quad (18)$$

(17) (18) 式は次の形に等しい

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_n}{\partial x} = u_n (v_{n-1} - v_n), \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_n}{\partial y} = v_n (u_n - u_{n+1}), \end{array} \right. \quad (20)$$

$n = 1, 2, \dots, N$. 境界条件は $v_0 = 0, u_{N+1} = 0$ である。

この式は $N=1$ のとき、よく知られている "2-wave interaction" の式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = -uv, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = vu, \end{array} \right.$$

に一致する。(19), (20) 式を "2N-wave interaction"

の式と呼ぶ。 ("Exact Solution to 2N-Wave Interaction"

by Ryogo Hirota, J. Phy. Soc. Jpn. #2, Vol. 57 (1988)).

戸田分子方程式の Bäcklund 変換によ、2N-Wave interaction の式が得られたが、2N-Wave interaction の Bäcklund 変換によ、新しい方程式が得られる。戸田分子方程式の解のもつ自由度 (任意関数で表わされている) を利用すると、これらの方程式と KP 方程式の Coupled した方程式が考えられる。この立場からソリトン方程式の統一化を進めよう。