

Topos を用いた意味論モデル

釧路高専 水上達就 (Tatsunari Mizukami)

1. はじめに.

Relational Database の Relation は何らかの表現の意味を構成している。例えば、部品 No, 部品の色の2つの属性を持つ Relation は "部品の No とその色" という意味を構成し、この Relation から作られる赤色の部品の No の Relation は "赤い部品の No" なる意味を構成する。このような Relation の構成する意味のモデルとして、Codd の Alpha-expression と Relational Algebra の対応⁽¹⁾がある。しかし、このモデルは first order logic の対応のみで、Sum, Average, Group-by 等を含む。現在用いられている Relational Database の意味モデルとはならない。

Relation を加工する operation、例えば union, intersection, difference, Cartesian product, join, projection, etc と Relation を組合せることで Category の一種である Topos を構成できる。Topos は many sorted higher order intuitionistic logic

と $/$ 対 $/$ に対応している。⁽²⁾ 即ち Relation と operation は Topos を構成し、同時に many sorted higher order intuitionistic logic を構成する。従って、many sorted higher order intuitionistic logic の formula はすべて Relation と operation によつて記述可能である。即ち、その formula の意味としての Relation を構成できる。本稿は Topos のこの対応を Relation の構成する意味モデルとして用いる formula とその対応する Relation の構成を考察するものである。

自然言語の意味記述として、Montague Grammar ⁽³⁾ がよく知られている。これは many sorted higher order logic で自然言語の意味記述を行うものである。従って、Relation が構成する Topos によつて自然言語の意味記述も可能となる。以下では主として、データベースの query を一つの formula と見なし、その意味としての Relation 構成を考察するが、自然言語の意味記述もこの意味モデルで可能である。

以下では、Relation から Topos を構成し、query を formula 化し、その formula に対応する Relation 構成を具体的に記述する。

2. 準備

ここでは Relation と Topos の定義を行う。Relation R は真性か真理値の Relation $\{(T), (F)\}$ と定義する。

R を Relation とする時、 $\delta(R)$ を R の属性集合とする。

Relation R がその属性集合 α に関する projection $R|_{\alpha}$ を domain とし $\delta(R) - \alpha$ の属性の属性値集合の Cartesian product を値域とする写像である時、 (R) を $R|_{\alpha}$ から $\delta(R) - \alpha$ への写像を属性とする tuple であると定義し、 R を写像 Relation と呼ぶ。この定義により集合を要素として持つ tuple の Relation 構成が可能となる。

次に、これらの Relation を用いて Topos を構成する。

Relation $R_1, \dots, R_n$ から作られる Category $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ を次のように定義する。⁽⁴⁾

1) (Object)

a) $R_1, \dots, R_n, \Omega, N$ は $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object である。

b) $R \in \text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object とする時、 R の部分集合は $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object である。

c) $R, U \in \text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object とする時、 $R \times U, R \cap U, R \cup U, R - U$ もまた $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object である。

d) R が $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object であり、また写像 Relation である時、 $\{(R)\}$ は $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object である。

2) (morphism)

$R, R' \in \text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object とする時、 $R \rightarrow R'$

なる写像は R から R' への morphism である。

$\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object 全体を $\text{Ob}(\text{Pre}(R_1, \dots, R_n))$ と表わす。上記定義より、 A, B が $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object である時、 $A \times B, A \cup B, A \cap B, A - B, A/\alpha$ (α は A の属性集合), $A[\alpha \theta \beta] B, A[\alpha \theta \beta]$ (α, β は A, B の属性集合で、 θ は α, β 間の関係) はすべて $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object となる。

この Category $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ は Topos の条件 product, terminal object, power object, subobject classifier を持つことより、Topos である。(4) 従って、 $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ は many sorted higher order intuitionistic logic の formula の意味構成ができる。

3. Topos と many sorted higher order intuitionistic logic

$\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object A に対して、 $\tilde{A}$ を次のように定義する。

$$\tilde{A} = \{ (\{a, T\} \cup \{x, F\} : x \in A - \{a\}) ; a \in A \cup \{\emptyset\} \}$$

$\tilde{A}$ は A から Ω への写像全体の集合である power object Ω^A の部分集合より $\text{Ob}(\text{Pre}(R_1, \dots, R_n))$ の要素となつてゐる。また、

$\tilde{A}$ の各 tuple は A の tuple a に関する特性関数となつてゐるため A の tuple 集合と特性関数とを換えれば $\tilde{A}$ は $\{f_a : a \in A \cup \{\emptyset\}\}$ となる。この時、 $\eta_A : A \rightarrow \tilde{A}$ なる写像を次のように定義する。

$$\begin{aligned} A \text{ の要素 } a \text{ に対して、 } \eta_A(a) &= (\{a, T\} \cup \{x, F\} : x \in A - \{a\}) \\ &= f_a \end{aligned}$$

定義より、 $\eta_A, \tilde{A}$ は partial map classifier (2) を構成する。

上記 object, morphism を用いて、 $\text{PRE}(R_1, \dots, R_n)$ の many sorted higher order intuitionistic logic への対応を作成する。

属性 a の属性値集合 E_a を $\prod_{R \in \text{Ob}(\text{PRE}(R_1, \dots, R_n))} R|a$ と定義する。この時、 R を $\text{PRE}(R_1, \dots, R_n)$ の object とするならば、次の diagram は pull-back ⁽²⁾ となる。

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & \prod_{a \in \mathcal{B}(R)} E_a \\ \downarrow & \text{pb} & \downarrow \chi_R \\ \{(T)\} & \xrightarrow{\iota} & \Omega \end{array}$$

但し、 i, χ_R, ι は各々次の

morphism である。

ι を R の要素とすると

$$\iota(x) = x,$$

ι を $\prod_{a \in \mathcal{B}(R)} E_a$ の要素とすると

$$\chi_R(x) = \begin{cases} x \in R \text{ の時、}(T) \\ x \notin R \text{ の時、}(F), \end{cases}$$

$$\iota((T)) = (T)$$

また、pull-back と Topos の定義より、 R の特性関数である χ_R と ι から作られる pull-back diagram は上記 object R と morphism i を持つ。これは χ_R に対して unique に決定される。⁽⁷⁾ 従って、ここでの pull-back とは $\chi_R(x) = (T)$ を満たす x の集合 (即ち $R = (\chi_R)^+(T)$) と inclusion map i を作ることである。

$\text{PRE}(R_1, \dots, R_n)$ の object R 上の predicate F は $\prod_{a \in \mathcal{B}(R)} E_a$ 上の predicate と見なすことができ、さらに、次のような pull-back diagram の morphism $\tilde{\varphi}_R$ に対応する。⁽²⁾

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{\xi} & \prod_{a \in \delta(R)} E_a & \xrightarrow{\eta_{\prod_{a \in \delta(R)} E_a}} & \widetilde{\prod_{a \in \delta(R)} E_a} \\
 \downarrow & & \downarrow \varphi_R & & \downarrow \widehat{\varphi}_R \\
 \{ (T) \} & \xrightarrow{\iota} & \Omega & \xrightarrow{id} & \Omega
 \end{array}$$

但し、 φ_R は $\prod_{a \in \delta(R)} E_a \rightarrow \Omega$ なる morphism であり、 $\widehat{\varphi}_R$ は $\widehat{\varphi}_R \circ \eta_{\prod_{a \in \delta(R)} E_a} = \varphi_R$ を満たす $\widetilde{\prod_{a \in \delta(R)} E_a} \rightarrow \Omega$ なる morphism である。

この時、 φ_R は $\prod_{a \in \delta(R)} E_a$ から Ω への morphism より $\prod_{a \in \delta(R)} E_a$ 上の特性関数とみなすことができる。従って、上記 pull-back の議論と Topos の定義 (2) より、 Y は $\varphi_R^{-1}(T)$ 、 ξ は $\varphi_R^{-1}(T)$ から $\prod_{a \in \delta(R)} E_a$ への inclusion map とみなすことができる。故に、 R 上の predicate F は $\varphi_R^{-1}(T)$ なる $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object, 即ち Relation に対応する。

logic の formula は論理記号 $\wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ と predicate に付加して作られる。以下では、 $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object A, B 上の formula F_A, F_B に対応する morphism $\varphi_A: \prod_{a \in \delta(A)} E_a \rightarrow \Omega$, $\varphi_B: \prod_{a \in \delta(B)} E_a \rightarrow \Omega$ を用いて、各論理記号を F_A, F_B に付加してできる formula に対して、対応する morphism を $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object と考察する。 φ_A, φ_B は次の diagram を pull-back とする。

$$\begin{array}{ccc}
 R_A & \xrightarrow{\iota} & \prod_{a \in \delta(A)} E_a \\
 \downarrow & & \downarrow \varphi_A \\
 \{ (T) \} & \xrightarrow{\iota} & \Omega
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 R_B & \xrightarrow{\iota} & \prod_{a \in \delta(B)} E_a \\
 \downarrow & & \downarrow \varphi_B \\
 \{ (T) \} & \xrightarrow{\iota} & \Omega
 \end{array}
 \quad \dots (1)$$

但し、 R_A, R_B は $\varphi_A^{-1}(T), \varphi_B^{-1}(T)$ なる $\text{Pre}(R_1, \dots, R_n)$ の object

, 即ち Relation である。

F_A, F_B に論理記号を付加して作られる formula に対応する morphism を φ_A, φ_B から, Relation を R_A, R_B から構成する。

(1) (Conjunction) $F_A \wedge F_B$

$F_A \wedge F_B$ の morphism を $\varphi_{A \wedge B} : \prod_{a \in \delta(R_A) \cup \delta(R_B)} E_a \rightarrow \Omega$ なる写像とする。 $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ を次のような morphism とする。(2)

$$a, b \text{ が } \Omega \text{ の要素なら } \wedge(a, b) = \begin{cases} a = b = (\top) \text{ の時, } (\top) \\ \text{上記以外の時, } (\perp) \end{cases}$$

$\pi_A : \prod_{a \in \delta(R_A) \cup \delta(R_B)} E_a \rightarrow \prod_{a \in \delta(R_A)} E_a$, $\pi_B : \prod_{a \in \delta(R_A) \cup \delta(R_B)} E_a \rightarrow \prod_{a \in \delta(R_B)} E_a$ を各々次のような morphism であると定義する。

$\prod_{a \in \delta(R_A) \cup \delta(R_B)} E_a$ の tuple (x_1, x_2, x_3) が $x_1 \in \prod_{a \in \delta(R_A) - \delta(R_B)} E_a$, $x_2 \in \prod_{a \in \delta(R_A) \cap \delta(R_B)} E_a$, $x_3 \in \prod_{a \in \delta(R_B) - \delta(R_A)} E_a$ を満たす時、

$$\pi_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$$

$$\pi_B(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$$

この時、 $\varphi_{A \wedge B}$ は $\wedge \circ \langle \varphi_A \circ \pi_A, \varphi_B \circ \pi_B \rangle$ と表わせる。(2) 故に、

次の pull-back diagram を構成する。(2)

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{A \wedge B}(\top) & \hookrightarrow & \prod_{a \in \delta(R_A) \cup \delta(R_B)} E_a \\ \downarrow & & \downarrow \langle \pi_A, \pi_B \rangle \\ & & \prod_{a \in \delta(R_A)} E_a \times \prod_{a \in \delta(R_B)} E_a \\ & & \downarrow \wedge \circ \langle \varphi_A, \varphi_B \rangle \\ \{(\top)\} & \longrightarrow & \Omega \end{array}$$

pull back diagram (1) より 次の diagram は pull-back である。

$$\begin{array}{ccc} R_A \times R_B & \xrightarrow{i} & \prod_{a \in \delta(R_A)} E_a \times \prod_{a \in \delta(R_B)} E_a \\ \downarrow & \text{pb} & \downarrow \wedge \circ \langle \varphi_A, \varphi_B \rangle \\ \{(T, T)\} & \xrightarrow{\langle t, t \rangle} & \Omega \times \Omega \end{array}$$

故に、 $\wedge$ の定義より、 $(\wedge \circ \langle \varphi_A, \varphi_B \rangle)^T(T)$ は $R_A \times R_B$ となる。

(t_1, t_2) , (t'_1, t'_2) を各々 $\prod_{a \in \delta(R_A)} E_a$, $\prod_{a \in \delta(R_B)} E_a$ の tuple とし、
 $t_1 \in \prod_{a \in \delta(R_A) - \delta(R_B)} E_a$, $t_2, t'_2 \in \prod_{a \in \delta(R_A) \cap \delta(R_B)} E_a$, $t'_1 \in \prod_{a \in \delta(R_B) - \delta(R_A)} E_a$
 を満たす時、 $t_2 \neq t'_2$ ならば、 (t_1, t_2) , (t'_1, t'_2) は $\prod_{a \in \delta(R_A) \cup \delta(R_B)} E_a$
 からの $\langle \pi_A, \pi_B \rangle$ による像といえず、 $t_2 = t'_2$ の時の
 み $\langle \pi_A, \pi_B \rangle$ の像となり、 $(t_1, t_2, t'_1) \in \prod_{a \in \delta(R_A) \cup \delta(R_B)} E_a$ となる。
 故に、 $\varphi_{A \wedge B}^T(T) = (\wedge \circ \langle \varphi_A, \varphi_B \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle)^T(T)$

$$= \{(t_1, t_2, t'_1); (t_1, t_2) \in R_A, (t'_1, t'_2) \in R_B\}$$

この集合は Relational Algebra の operation を用いて、次のように表わせる。

$$\begin{cases} \delta(R_A) = \delta(R_B) \text{ の時} & R_A \cap R_B \\ \delta(R_A) \neq \delta(R_B) \text{ の時} & R_A \times R_B [\delta(R_A) \cap \delta(R_B) = \delta(R_A) \cap \delta(R_B)] \mid \delta(R_A) \cup \delta(R_B) \end{cases}$$

故に、次の diagram は pull back となり、 $\bar{R}_A \wedge \bar{R}_B$ に対応している。

Relation は $R_A \times R_B [\delta(R_A) \cap \delta(R_B) = \delta(R_A) \cap \delta(R_B)] \mid \delta(R_A) \cup \delta(R_B)$ である。

$$\begin{array}{ccc} R_A \times R_B [\delta(R_A) \cap \delta(R_B) = \delta(R_A) \cap \delta(R_B)] \mid \delta(R_A) \cup \delta(R_B) & \xrightarrow{i} & \prod_{a \in \delta(R_A) \cup \delta(R_B)} E_a \\ \downarrow & & \downarrow \wedge \circ \langle \varphi_A \circ \pi_A, \varphi_B \circ \pi_B \rangle \\ \{(T)\} & \xrightarrow{t} & \Omega \end{array}$$

(2) (Disjunction) $F_A \vee F_B$

$F_A \vee F_B$ の morphism $\exists \varphi_{A \vee B} : \prod_{a \in \mathcal{L}(R_A) \cup \mathcal{L}(R_B)} E_a \rightarrow \Omega$ なる写像とする。 $V : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ $\exists$ 次のような morphism とする。⁽²⁾

$$a, b \in \Omega \quad \text{ならば} \quad V(a, b) = \begin{cases} a = (\tau) \text{ または } b = (\tau) \text{ の時, } (\tau) \\ \text{上記以外の時} \end{cases} \quad (7)$$

(1) と同様に $\varphi_{A \vee B} = V \circ \langle \varphi_A \circ \pi_A, \varphi_B \circ \pi_B \rangle$ となり、⁽²⁾ 次の diagram が pull-back となる。⁽²⁾

$$\begin{array}{ccc} R_A \times R_B & \xrightarrow{\lambda} & \prod_{a \in \mathcal{L}(R_A)} E_a \times \prod_{a \in \mathcal{L}(R_B)} E_a \\ \downarrow & \text{pb} & \downarrow V \circ \langle \varphi_A, \varphi_B \rangle \\ \{(\tau)\} & \xrightarrow{\lambda} & \Omega \end{array}$$

故に、(1) と同様に、 $\varphi_{A \vee B}^{-1}(\tau)$ $\exists$ 次のように構成できる。

$$\begin{aligned} \varphi_{A \vee B}^{-1}(\tau) &= (V \circ \langle \varphi_A \circ \pi_A, \varphi_B \circ \pi_B \rangle)^{-1}(\tau) \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in R_A, \text{ または } (x_2, x_3) \in R_B\} \end{aligned}$$

従って、Relational Algebra の operation を用いるならば、 $\varphi_{A \vee B}^{-1}(\tau)$ は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \varphi_{A \vee B}^{-1}(\tau) &= (R_A \times \prod_{a \in \mathcal{L}(R_A)} E_a) [\mathcal{L}(R_A) \wedge \mathcal{L}(R_B) = \mathcal{L}(R_A) \vee \mathcal{L}(R_B)] \mid \mathcal{L}(R_A) \vee \mathcal{L}(R_B) \\ &\quad (R_B \times \prod_{a \in \mathcal{L}(R_B)} E_a) [\mathcal{L}(R_A) \wedge \mathcal{L}(R_B) = \mathcal{L}(R_A) \wedge \mathcal{L}(R_B)] \mid \mathcal{L}(R_A) \vee \mathcal{L}(R_B) \end{aligned}$$

$R_A \times \prod_{a \in \mathcal{L}(R_A)} E_a$ は R_A, R_B から構成できます、 $\mathcal{L}(R_A) = \mathcal{L}(R_B)$ の場合のみ、 R_A, R_B から構成可能となり、

$$\varphi_{A \vee B}^{-1}(\tau) = R_A \vee R_B \quad \text{となる。さらに、この diagram}$$

$\exists$ pull-back とする。

$$\begin{array}{ccc}
 R_A \cup R_B & \xrightarrow{i} & \prod_{a \in \delta(R_A)} E_a \\
 \downarrow & p_b & \downarrow \\
 \{(T)\} & \xrightarrow{t} & \Omega
 \end{array}
 \quad \vee \circ \langle \varphi_A \circ \pi_A, \varphi_B \circ \pi_B \rangle$$

(3) (Negation) $\neg \bar{F}_A$

$\neg \bar{F}_A$ の morphism は $\varphi_{\neg A} : \prod_{a \in \delta(R_A)} E_a \rightarrow \Omega$ なる写像とする。

$\neg : \Omega \rightarrow \Omega$ は次のような morphism とする。⁽²⁾

$$a \in \Omega \text{ ならば } \neg(a) = \begin{cases} a = (\bar{F}) \text{ の時 } (T) \\ a = (T) \text{ の時 } (\bar{F}) \end{cases}$$

上記と同様、 $\varphi_{\neg A} = \neg \circ \varphi_A$ となる。⁽²⁾ 従って、 $\neg$ の定義より、

$\varphi_{\neg A}^{-1}(T)$ は次のように構成できる。

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\neg A}^{-1}(T) &= (\neg \circ \varphi_A)^{-1}(T) = \{t; t \in \prod_{a \in \delta(R_A)} E_a, t \notin R_A\} \\
 &= \prod_{a \in \delta(R_A)} E_a - R_A
 \end{aligned}$$

disjunction 同様 $\prod_{a \in \delta(R_A)} E_a$ は R_A から構成可能である。conjunction

と組合せた formula $\bar{F}_B \wedge \neg \bar{F}_A$ の formula $\delta(R_A) = \delta(R_B)$ が成立する時のみ R_A, R_B から構成され、 $\varphi_{\bar{F}_B \wedge \neg \bar{F}_A}^{-1}$ は $R_B \cap (\prod_{a \in \delta(R_A)} E_a - R_A)$ 、即ち $R_B - R_A$ となり、次の diagram を pull-back とする。

$$\begin{array}{ccc}
 R_B - R_A & \xrightarrow{i} & \prod_{a \in \delta(R_A)} E_a \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{(T)\} & \xrightarrow{t} & \Omega
 \end{array}
 \quad \wedge \circ \langle \varphi_B \circ \pi_B, \neg \circ \varphi_A \circ \pi_A \rangle$$

(4) (Universal quantification) $\forall x \bar{F}_A(a, x)$

tuple a の属姓集合を δ とする。この時、 $\forall x \bar{F}_A(a, x)$ の

morphism $\pm \varphi_{\forall x F_A(a, x)} : \prod_{a \in A} E_a \rightarrow \Omega$ なる写像とする。

morphism $f: R \times Y \rightarrow \Omega$ に対し、 $(\forall y \in Y)(f): R \rightarrow \Omega$ $\pm$

次のように morphism とする。(2)

$$r \in R \text{ ならば } (\forall y \in Y)(f)(r) = \begin{cases} \lambda y. f(r, y) = \lambda y. \lambda_{R \times Y}(r, y) & \text{の時} \quad (T) \\ \text{上記以外} & \text{の時} \quad (F) \end{cases}$$

但し、 $\lambda_{R \times Y}$ は $R \times Y \rightarrow \{T\} \xrightarrow{\lambda} \Omega$ なる morphism である。

故に、 $(\forall y \in Y)(f)(r) = (T)$ の時には、すべての $y \in Y$ に対し $f(r, y) = (T)$ が成立し、 $(\forall y \in Y)(f)(r) = (F)$ の時には、 $f(r, y) = (F)$ なる $y \in Y$ が存在する。

この定義を用いるならば、 $\varphi_{\forall x F_A(a, x)} = (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\varphi_A)$ となり、次の diagram $\pm$ pull-back とする。(2)

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{\forall x F_A(a, x)}(T) & \xleftarrow{i} & \prod_{a \in A} E_a \\ \downarrow & \text{pb} & \downarrow (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\varphi_A) \\ \{T\} & \xrightarrow{\lambda} & \Omega \end{array}$$

従って、 $(\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\varphi_A)$ の定義と pull-back diagram (1)

より、 $\varphi_{\forall x F_A(a, x)}(T)$ は次のように構成できる。

$$\begin{aligned} & \{t; t \in \prod_{a \in A} E_a, (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)(\varphi_A)(t) = (T)\} \\ &= \{t; t \in \prod_{a \in A} E_a, \forall x (x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha)((x, a) \in R_A)\} \\ &= R_A [\alpha \div \delta(R) - \alpha] (R_A | \delta(R_A) - \alpha) \end{aligned}$$

(6) (Existential quantification) $\exists x F(a, x)$

a の属性集合 $\Sigma \alpha$ とする時、 $\exists x F(a, x)$ の morphism Σ
 $(\exists x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (\varphi_A) : \prod_{a \in \alpha} E_a \rightarrow \Omega$ なる写像とする。この
 写像は上記写像を用いて、 $\neg \circ (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (\neg \circ \varphi_A)$ と表
 わすことができる。(2)

$\neg \circ (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (\neg \circ \varphi_A) (a) = (T)$ なる 1 次が成立する。

$$(\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (\neg \circ \varphi_A) (a) = (F)$$

故に、 $(\neg \circ (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (\neg \circ \varphi_A))^T (T)$ は $((\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (\neg \circ \varphi_A))^T (F)$
 $(\neg \circ \varphi_A))^T (F)$ となり、 $((\exists x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (\varphi_A))^T (T)$ は次
 のように構成される。

$$\begin{aligned} & \{ t ; t \in \prod_{a \in \alpha} E_a, (\forall x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (\neg \circ \varphi_A) (t) = (F) \} \\ &= \{ t ; t \in \prod_{a \in \alpha} E_a, \exists x (x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) (F_A(t, x)) \} \\ &= \{ t ; t \in \prod_{a \in \alpha} E_a, \exists x (x \in R_A | \delta(R_A) - \alpha) ((x, t) \in R_A) \} \\ &= R_A | \alpha \end{aligned}$$

(6) $(\theta ; >, =)$ $t_1 \theta t_2$ (θ は $>, =$ のいずれかの
 predicate)

t_1 の属性を a , t_2 の属性を b とする。(6) と同様に
 predicate θ に対応する morphism $\theta_{a,b}$ を次のように定義する。

$$(t_1, t_2) \in E_a \times E_b \quad \text{なる 1 次}$$

$$t_1 \theta_{a,b} t_2 = \begin{cases} t_1 \theta t_2 & \text{の時} \quad (T) \\ \neg t_1 \theta t_2 & \text{の時} \quad (F) \end{cases}$$

故に、 $\theta_{a,b}^T (T) = \{ (t_1, t_2) ; (t_1, t_2) \in E_a \times E_b, t_1 \theta t_2 \}$

$$= E_a \times E_b [a \theta b]$$

(3) と同様、 $t_1 \theta t_2$ が $F_A(t_1) \wedge F_B(t_2) \wedge (t_1 > t_2)$ なる形で使用されるならば、その意味となる Relation は R_A, R_B のみで構成可能である。(1) より、その Relation は次のようになる。

$\delta(R_A) \cap \delta(R_B) \neq \emptyset$ の時

$$\left\{ \begin{aligned} & ((R_A \times R_B [\delta(R_A) \cap \delta(R_B) = \delta(R_A) \cap \delta(R_B)] \mid \delta(R_A) \cup \delta(R_B)) \times (E_a \times E_b [a \theta b])) [\{a, b\} = \{a, b\}] \mid \delta(R_A) \cup \delta(R_B) \\ & = (R_A \times R_B [\delta(R_A) \cap \delta(R_B) = \delta(R_A) \cap \delta(R_B)] \mid \delta(R_A) \cup \delta(R_B)) [a \theta b] \end{aligned} \right.$$

$\delta(R_A) \cap \delta(R_B) = \emptyset$ の時

$$\begin{aligned} & (R_A \times R_B) \times (E_a \times E_b [a \theta b]) [\{a, b\} = \{a, b\}] \mid \delta(R_A) \cup \delta(R_B) \\ & = R_A \times R_B [a \theta b] \end{aligned}$$

(7) (Constant) $F_A(x, t_c)$ (t_c ; constant tuple)

x の属性集合を α とする。この時、対応する morphism は $\lambda x. \varphi_A(x, t_c) : \prod_{a \in \alpha} E_a \rightarrow \Omega$ となる。(2) 従って、対応する Relation は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\lambda x. \varphi_A(x, t_c))^T(\tau) &= \{x; x \in \prod_{a \in \alpha} E_a, \lambda x. \varphi_A(x, t_c)(x) = (\tau)\} \\ &= \{x; x \in \prod_{a \in \alpha} E_a, (x, t_c) \in R_A\} \\ &= R_A [\delta(R_A) = t_c] \mid \alpha \end{aligned}$$

(8) (Count, Sum, Average, Max, Min) $COUNT(n, F_A)$
 $SUM(a, n, F_A), AVR(a, n, F_A), MAX(a, n, F_A), MIN(a, n, F_A)$
 ($n \in \mathbb{N}, a \in \delta(R_A)$ とする。)

Predicate COUNT, SUM, AVR, MAX, MIN に対応する
morphism φ_{count} , φ_{sum} , φ_{avr} , φ_{max} , φ_{min} を各々次の
ように定義する。

$$n \in N, \quad t \in R_A / \alpha \quad (\alpha \in \mathcal{L}(R_A)), \quad t_a \in R_A / a \quad (a \notin \mathcal{L}) \quad \tau' \leq 12.$$

$$\varphi_{\text{count}}(n, (\exists x \in R_A | \Delta(R_A) - \alpha)(\varphi_A)(x)) = \begin{cases} n = |R_A[\Delta = x]| \text{ の時} & (T) \\ \text{上記以外 の時} & (F) \end{cases}$$

$$g_{sum}(a, n, (\exists x \in R_A \mid \delta(R_A) - \alpha - \{a\})) (g_A)(\lambda, \lambda_a)$$

$$= \begin{cases} \sum_{t_a \in R_A[\alpha=t] \mid a} t_a = n & \text{のとき} \quad (T) \\ \text{上記以外} & \text{のとき} \quad (F) \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{anz}}(a, n, (\exists x R_A | \delta(R_A) - \alpha - \{a\}) (\varphi_A)(t, t_a))$$

$$= \begin{cases} \left(\sum_{\lambda \in P_A[\alpha = \lambda]} \lambda \right) / |P_A[\alpha = \lambda]| = n & \text{のとき} & (T) \\ \text{上 記 外 のとき} & & (F) \end{cases}$$

$$g_{\max} (a, n, (\exists x R_A / G(R_A) - d - f a) (y_A) (x, x_a))$$

$$= \begin{cases} \text{Max} & \text{の時} & (7) \\ \lambda_a \in \text{RA}[\alpha = \lambda] / a & \\ \text{上記以外の時} & & (8) \end{cases}$$

$$G_{\min}(a, n, (\exists x R_A | G(R_A) - d - \{a\})(f_A)(t, t_a))$$

$$= \begin{cases} \min_{x_a \in R_A[x=a]} f_a & x_a = n \text{ の時} & (T) \\ \text{上記以外の時} & (F) \end{cases}$$

従、 π 、COUNT, SUM, AVG, MAX, MIN の意味を構成する
Relational は次のようになる。

$$(\varphi^{\text{count}})(T) = \{ (n, t) ; n = |\mathbb{R}_A[\alpha=t]|, t \in \mathbb{R}_A / \alpha \in \mathbb{P} \}$$

$$= \{ (|R_A[\alpha = t]|, t) ; t \in R_A[\alpha] \}$$

$$(G^+_{sum})(T) = \{ (n, t) ; n = \sum_{t_a \in R_A[\alpha = t] | a} t_a, t \in R_A[\alpha] \}$$

$$= \{ (\sum_{t_a \in R_A[\alpha = t] | a} t_a, t) ; t \in R_A[\alpha] \}$$

$$(G^+_{avr})(T) = \{ (n, t) ; n = (\sum_{t_a \in R_A[\alpha = t] | a} t_a) / |R_A[\alpha = t]|, t \in R_A[\alpha] \}$$

$$= \{ (\sum_{t_a \in R_A[\alpha = t] | a} t_a) / |R_A[\alpha = t]|, t) ; t \in R_A[\alpha] \}$$

$$(G^+_{max})(T) = \{ (n, t) ; n = \max_{t_a \in R_A[\alpha = t] | a} t_a, t \in R_A[\alpha] \}$$

$$= \{ (\max_{t_a \in R_A[\alpha = t] | a} t_a, t) ; t \in R_A[\alpha] \}$$

$$(G^+_{min})(T) = \{ (n, t) ; n = \min_{t_a \in R_A[\alpha = t] | a} t_a, t \in R_A[\alpha] \}$$

$$= \{ (\min_{t_a \in R_A[\alpha = t] | a} t_a, t) ; t \in R_A[\alpha] \}$$

4. Topas k query

Relation に対する query は many sorted higher order logic の formula と見なし、query の answer はその formula の意味となる Relation とする。今、次の Relation からなる Data base (5) を与えるとする。

S : Supplier

S#	SNAME	STATUS	CITY
S1	Smith	20	London
S2	Jones	10	Paris
S3	Blake	30	Paris
S4	Adams	30	London

P : Parts

P#	PNAME	COLOR	WEIGHT	PCITY
P1	Nut	Red	12	London
P2	Bolt	Green	17	Paris
P3	Screw	Blue	17	Rome
P4	Screw	Red	14	London
P5	Cam	Blue	12	Paris

SP : Supplier, Parts

SP#	PS#	QTY
S1	P1	300
S2	P1	100
S3	P2	200
S4	P4	300

上記 Relation に対応する Formula を次のように定義する。

但し、 $t_{s\#}, \dots, t_{qty}$ は各属性 $s\#, \dots, qty$ の自由変数、 $x_{s\#},$

$\dots, x_{qty}$ は各属性 $s\#, \dots, qty$ の束縛変数とする。

$S(t_{s\#}, t_{sname}, t_{status}, t_{city})$,

$P(t_{p\#}, t_{pname}, t_{color}, t_{weight}, t_{pcity})$,

$SP(t_{sp\#}, t_{ps\#}, t_{qty})$.

以下で、この Database に対する query とその answer である Topos の object との対応を考察する。

(1) "Get supplier numbers and status for supplier in Paris"⁽⁵⁾

この query は次の formula に対応する。

$$\exists X_{SNAME} S(t_{S\#}, X_{SNAME}, t_{STATUS}, "Paris")$$

この formula の意味となる Topos $Pre(S, P, SP)$ の object は次のように構成される。

$S(t_{S\#}, t_{SNAME}, t_{STATUS}, "Paris")$ の object は

$S[CITY = "Paris"]$ となり、故に、

$\exists X_{SNAME} S(t_{S\#}, X_{SNAME}, t_{STATUS}, "Paris")$ の object は

$S[CITY = "Paris"] / S\#, STATUS$ となる。

(2) "Get supplier name for supplier who at least one red part"⁽⁵⁾

この query は次の formula に対応する。

$$\exists X_{S\#} X_{STATUS} X_{CITY} X_{SP\#} X_{PS\#} X_{QTY} X_{P\#} X_{PNAME} X_{WEIGHT} X_{PCITY} (S(X_{S\#}, t_{SNAME}, X_{STATUS}, X_{CITY}) \wedge SP(X_{SP\#}, X_{PS\#}, X_{QTY}) \wedge P(X_{P\#}, X_{PNAME}, "Red", X_{WEIGHT}, X_{QTY}) \wedge (X_{S\#} = X_{SP\#}) \wedge (X_{PS\#} = X_{P\#}))$$

この formula の意味となる object は次のように構成される。

$S(t_{S\#}, t_{SNAME}, t_{STATUS}, t_{CITY}) \wedge SP(t_{SP\#}, t_{PS\#}, t_{QTY}) \wedge P(t_{P\#}, t_{PNAME}, "Red", t_{WEIGHT}, t_{QTY})$ の object は $S \times SP \times P [COLOR = "Red"]$ となる。

$S(t_{S\#}, t_{SNAME}, t_{STATUS}, t_{CITY}) \wedge SP(t_{SP\#}, t_{PS\#}, t_{QTY}) \wedge P(t_{P\#}, t_{PNAME}, "Red", t_{WEIGHT}, t_{QTY}) \wedge (t_{S\#} = t_{SP\#}) \wedge (t_{PS\#} = t_{P\#})$ の object は

$S \times SP \times P [COLOR = "Red"] [S\# = SP\#] [PS\# = P\#]$ となる。

故に、求める object は次のようになる。

$$S \times SP \times P [COLOR = "Red"] [S\# = SP\#] [PS\# = P\#] | SNAME \\ = (S [S\# = SP\#] SP) [P\# = PS\#] (P [COLOR = "Red"])$$

(3) "For each part supplied, get the part number and the total quantity supplied of that part" (5)

この query は次の formula に対応する。

$$SUM(QTY, n, \exists X_{SP\#} (SP(X_{SP\#}, t_{PS\#}, t_{QTY}))$$

この formula の意味は $\{ (\sum_{t_{QTY} \in (SP [PS\# = t_{PS\#}])} QTY) t_{QTY}, t_{PS\#}, t_{PS\#} \in SP | PS\# \}$ となる。

5. おわりに。

Topos と many sorted higher order intuitionistic logic の対応のモデルを用いるならば、上記 query の例で示すように SUM の操作が可能となり、higher order logic の query, 即ち formula の意味構成が可能である。従って、自然言語の形容詞、前置詞等の意味記述⁽⁶⁾を Topos の object で行うことが可能である。

Relational Database 以外の Database モデルも Topos 構築が可能ならば本稿で論じたこと、すべてをその Database モデルにおいて成立させることが可能である。

(謝 辞)

本研究に対して有益な御助言をいただいた北海道大学田中

議講師に深謝の意を表します。

(参考文献)

- [1] Codd, E. F., "Relational Completeness of Database Sublanguage", Courant Computer Science Symposia Series, Vol 6, Englewood Cliffs, N.J : Prentice-Hall (1972)
- [2] 竹内外史 "層, 圏, トポス" 日本評論社 (1978)
- [3] Dowty, D. R., Wall, R. E., Peters, S., "Introduction to Montague Semantics" Reidel (1981)
- [4] Mizukami, T., "Database Semantics Based on Intuitionistic Logics" 数理解析研究所講義録 (1982)
- [5] Date, C. J., "An Introduction to Database Systems" Addison-Wesley (1981)
- [6] Tanaka, Y., "Information Space Model" 数理解析研究所講義録 (1981)
- [7] Goldblatt, R., "Topoi : The Categorical Analysis of Logics", North-Holland (1979)