

鉛直トーラス内の熱対流

—— その空間的構造について

東京農工大学・一般教育部 佐野 理

(Osamu Sano)

§ 1. 序

鉛直に立てたトーラス内に流体を満たし、下部を加熱、上部を冷却すると、ループに沿って時計回りあるいは反時計回りの対流が発生する。それでは鉛直軸に対して左右対称な境界条件のもとで流れはどのようなになるか？この問に対する従来の答は以下のようなものであった。まず、上下の温度差が小さい場合には熱伝導によって熱が運ばれ、対流は生じない。温度差がある臨界値を越えるとループに沿った定常的な対流が発生し、流れの向きは攪乱によって偶然的に決ってしまう。これらは通常の流体において、対流発生初期の段階で実際に観測されるものである。しかし温度差がさらに大きい場合の振舞いは必ずしも明かではない。もし、この系がローレンツ・モデルによって記述されるなら、^{1, 2)}流れは時計回り・反時計回りの不規則的な反転を繰り返すはずであり、その振

舞いの長期的な予測は困難である。我々はこのシナリオの検証を念頭に、以下に述べるような実験を行い、³⁻⁵⁾そこで得られた新しい現象について理論的な考察を行っている。⁶⁻⁹⁾今回はこれまでの理論をさらに拡張し、8個の変数についてのモデルを議論する。

§ 2. 実験結果

使用したトーラスは肉厚1mmのパイレックス・ガラス製で、ループの周に沿った長さ $2\pi R$ が100cm、チューブの直径 $2a$ は1cmである。ループの下部約1/4の長さを高温 T_h に、また上部約1/4の長さを低温 T_c に保ち、「鉛直方向に一様な温度勾配」を近似する。実験ではおもにトレーサー粒子による流れの可視化とレーザー流速計(LDV)による流速測定を行ない、流れのレイリー数依存性を調べた。ここでレイリー数 Ra は $Ra = \alpha \beta g a^4 / (\kappa \nu)$ と定義する(ただし α は熱膨張率、 $\beta = (T_h - T_c) / (2R)$ 、 g は重力加速度、 κ は熱拡散率、 ν は動粘性率である)。(i) 図1はトーラスの一断面における流速分布の Ra 依存性を示したものである。 Ra の増加にともない、流れの軸対称性が崩れ、やがて逆向きの流れの発生するのがわかる。

(ii) また、この流れの最大流速 U で定義したレイノルズ数 $Re (= 2aU/\nu)$ と Ra の関係を調べると、 Ra が800程度までは

$Re \propto \sqrt{Ra - Ra_c}$ が成り立つことがわかる。ここで $Ra_c \doteq 35$ は対流発生の臨界レイリー数である。

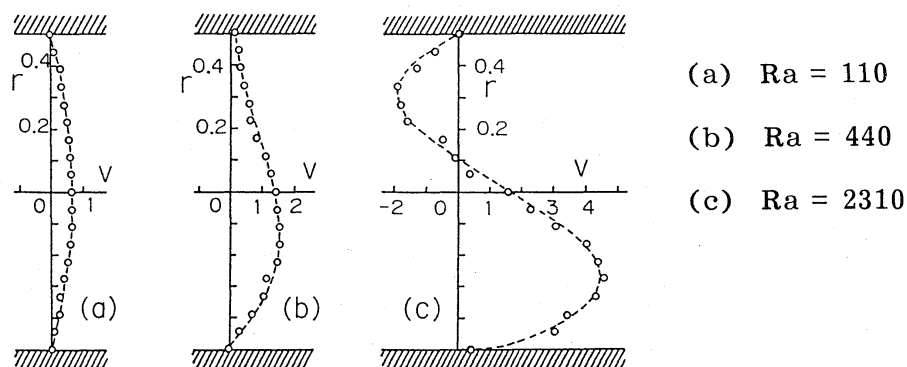


図 1. 流速分布のレイリー数依存性

(iii) Ra が 800 程度を越えると (ii) の関係式からのずれが顕著になってくる。これは Ra の増加にともない流速が増し、管の断面内での温度の一樣性が破れ、断面内での流速成分が無視できなくなってくるため、図 2 (a) に示したような 3 次元流が実現される。

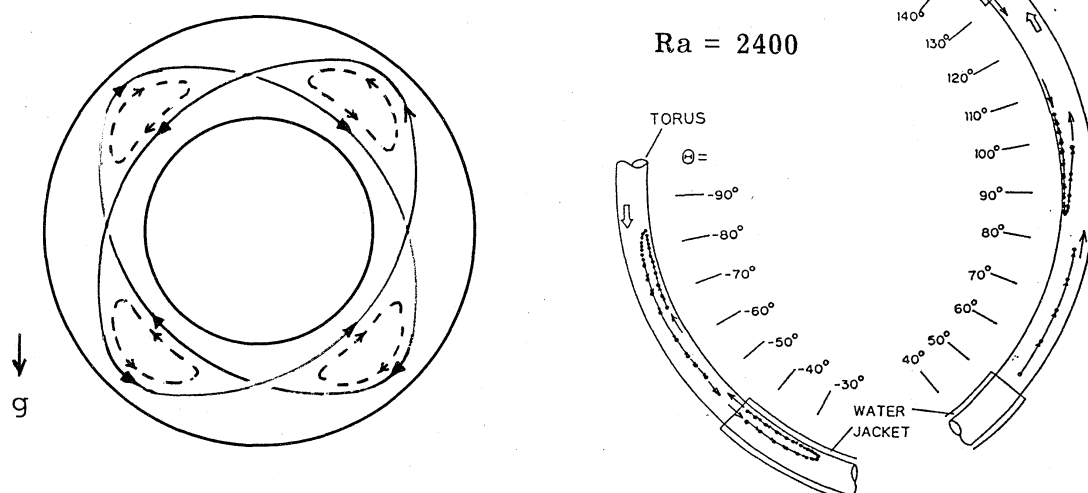


図 2. (a) 3 次元流の発生 (b) 流れの可視化の例

実験的には、このような対称的な流れに循環流が重なり、図 2 (b) のような 2 つのセルを伴った対流がしばしば観測されるが、図 3 (b) のような流速

測定を行い、これからポアズイユ流的な循環流を差し引くと図 3 (c) のように 4 つのセルが浮かび上がってくる。

通常の流体を用いる限り、このような 3 次元的な流れは不可避と思われる。

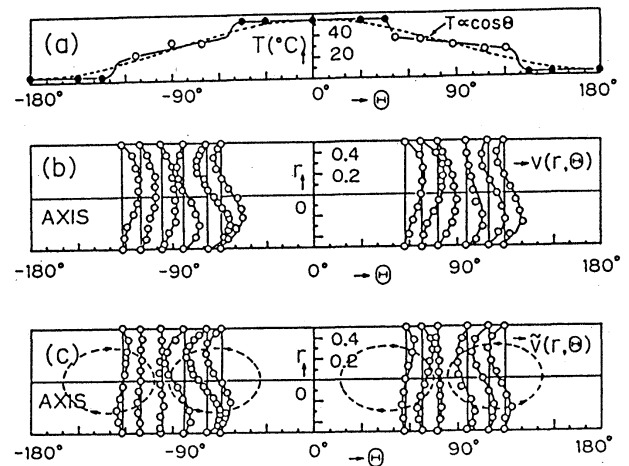


図 3. 速度の L D V 測定

トラス内の流体として水の代わりにエチルアルコールを用いた場合にも同様の流れの変遷が観測される。同じ温度差に対して後者の方が高いレイリー数を与えるので、高い Ra 領域の観測には好都合である。もちろん、プラントル数 Pr の違いを考慮しなければ直接に水のデータと比較はできないが、とりあえず Ra の値によって対流の様子の変化を追ってみることにしよう。これによると

(iv) Ra が 2500 程度を越えると、4 個のセルの位置や大きさが振動を始め、 Ra の増加に伴い複雑な時間変動を示すようになるが、 Ra が 3500 程度になるとこの変動はおさまって再び定常的な流れになる（しかし 3 次元的な構造は残されている）。

図4はトーラス内の一点において周方向の流速の時間変動を測定した例で、パワー・スペクトルを見るかぎり周期倍化分岐が起こっているように見える。

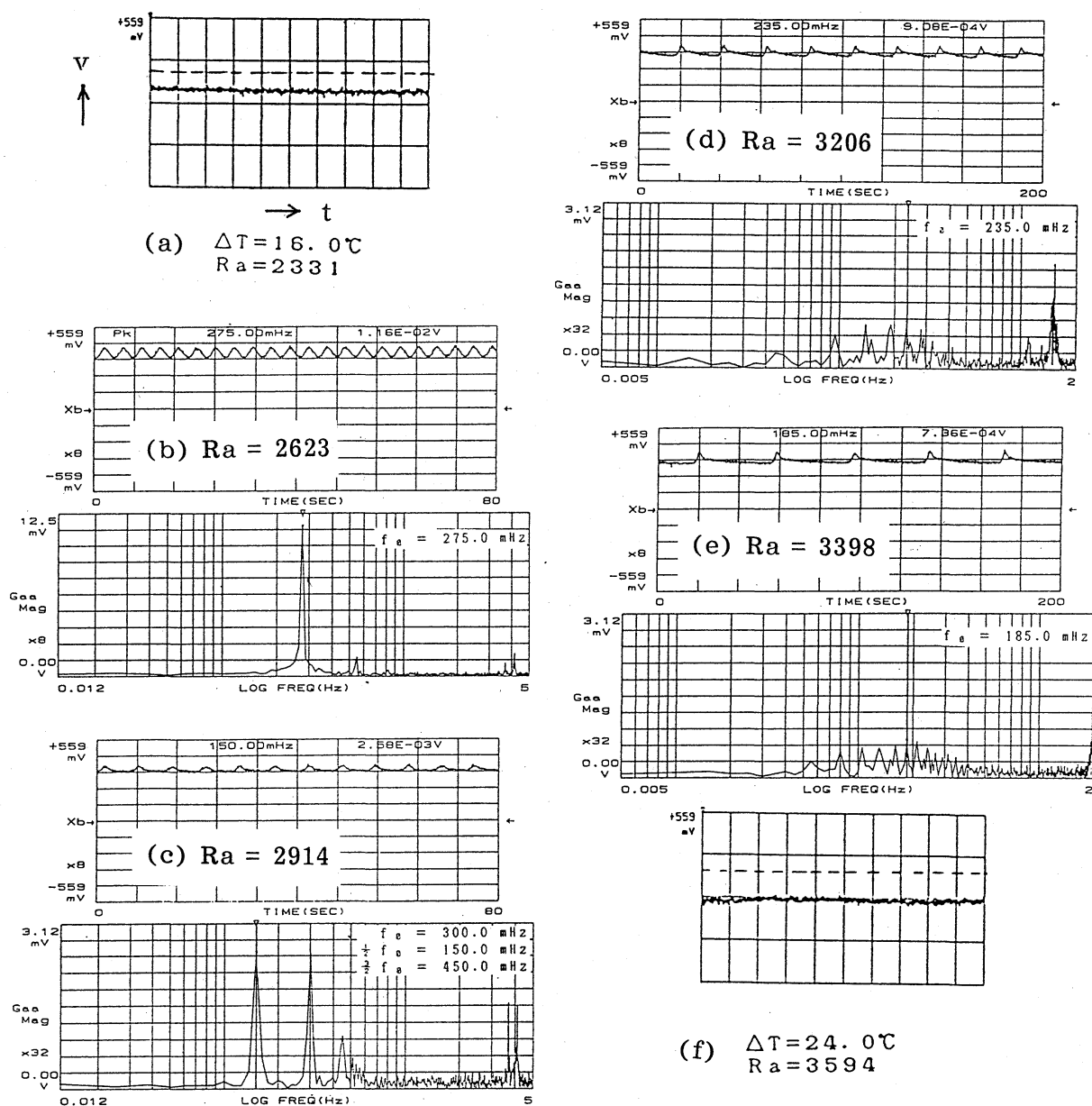


図4. 流速の時間変動とパワー・スペクトル

§ 3. 新しいモデル

この節では、上でみたような空間構造をもった対流について理論的な考察を行なう。解析はブシネスク近似に基づき、定常的な熱伝導状態からの摂動として速度場 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ 、温度場 T などを求める。トラスは充分細いと仮定し、フーリエ級数に展開して基本解を求めた。詳細は参考文献6-9)を参照されたい。

基本解

基本解のうち興味のあるのは次の4種類である。

① ポアズイユ的な流れ (A_{00})

この流れの初項は

$$w = A k_{0,q}^2 J_0(k_{0,q} r),$$

$$T = A J_0(k_{0,q} r) \sin \Theta.$$

ただし、 J_n は n 次の第一種ベッセル関数、 $k_{n,q}$ は q 番目のゼロ。座標系は図5を参照。

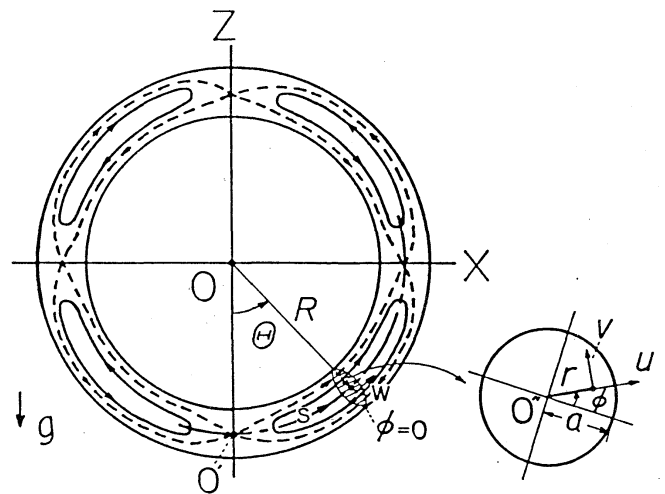


図5. 座標系

この型の流れを無限項

まで考慮すると臨界レイリー数として $k_{0,1}^4 = 33.44523 \dots$

が得られる (付録A参照)。

② ループに沿った反平行な流れ (A_{10})

$$w = A k_{1q}^2 J_1(k_{1q}r) \cos \phi, \quad T = A J_1(k_{1q}r) \cos \phi \sin \Theta.$$

③ 4つのセルを表わす流れ (S_{12})

$$w = W_B \cos \phi \sin 2\Theta, \quad T = T_B \cos \phi \cos \Theta,$$

$$(p/Pr, u) = (P_B, U_B) \cos \phi \cos 2\Theta, \quad v = V_B \sin \phi \cos 2\Theta,$$

④ 4つのセルを表わす流れ (S_{02})

$$w = W_{02} \sin 2\Theta, \quad T = T_{01} \cos \Theta,$$

$$(p/Pr, u) = (P_{02}, U_{02}) \cos 2\Theta, \quad v = 0.$$

[W_B や W_{02} などの表現は付録 B, C 参照.]

これらの解を重ね合わせると図6のような非対称的なポアズイユ流や2個あるいは4個のセルをもつ流れが表現できる.

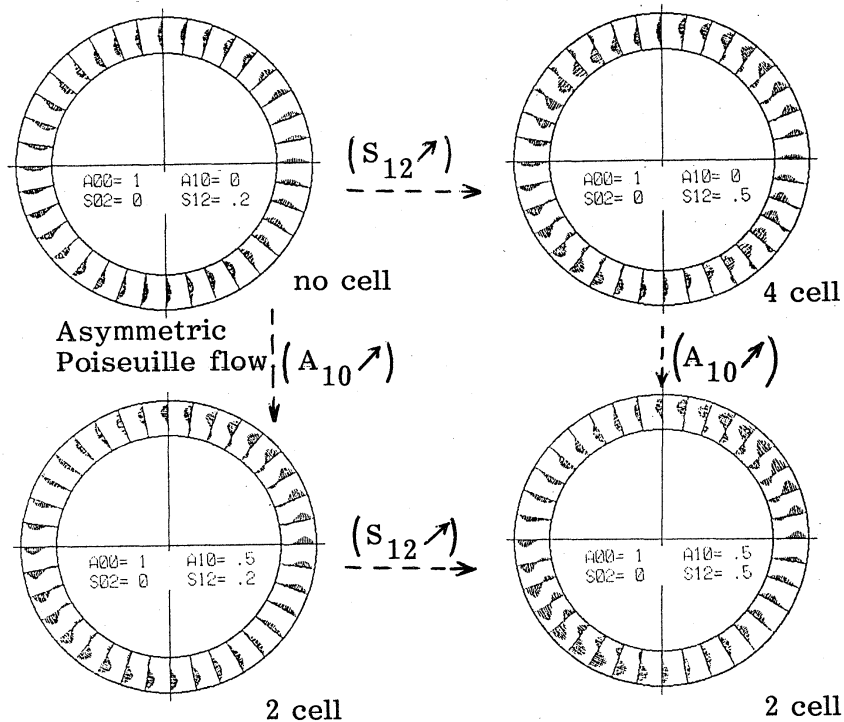


図6. 基本解の重ね合わせ

拡張されたローレンツ・モデル (E L M 8)

上に述べた4種の解の振幅を

型	A_{00}	S_{02}	A_{10}	S_{12}
速度場	X	A	B	C
温度場	Y	Z	D	E

のように仮定し, その時間発展を調べよう. まず, これらの重ね合わせによる解をもとの非線形の方程式系に代入し, Θ , θ の同じ関数系を持つもの同士を等置する. つぎに, これらの式を横断面内で平均して (r について積分), 振幅についての非線形常微分方程式系を得る:

$$\dot{X} = -5.78319 \operatorname{Pr} [X - (Ra/33.4452)Y],$$

$$\dot{A} = -32.9087 \operatorname{Pr} [A - (Ra/33.4452)Z],$$

$$\dot{B} = -14.6820 \operatorname{Pr} [B - (Ra/215.5602)D],$$

$$\dot{C} = -21.8050 \operatorname{Pr} [C - (Ra/215.5602)E],$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} = 5.78319 (X - Y) + \epsilon [&-3.66383 (XZ + AY) \\ &+ 2.75809 (CD + BE)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Z} = 13.7351 (A - Z) + \epsilon [&5.38454C + 3.68019 XY \\ &- 21.5839AZ + 10.3160CE], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{D} = 14.6820 (B - D) + \epsilon [&3.13402XE - 14.6164CY \\ &- 6.89738BZ - 0.770548AD], \end{aligned}$$

$$\dot{E} = 14.6820 (C - E) + \epsilon [-2.0909A - 3.13402XD$$

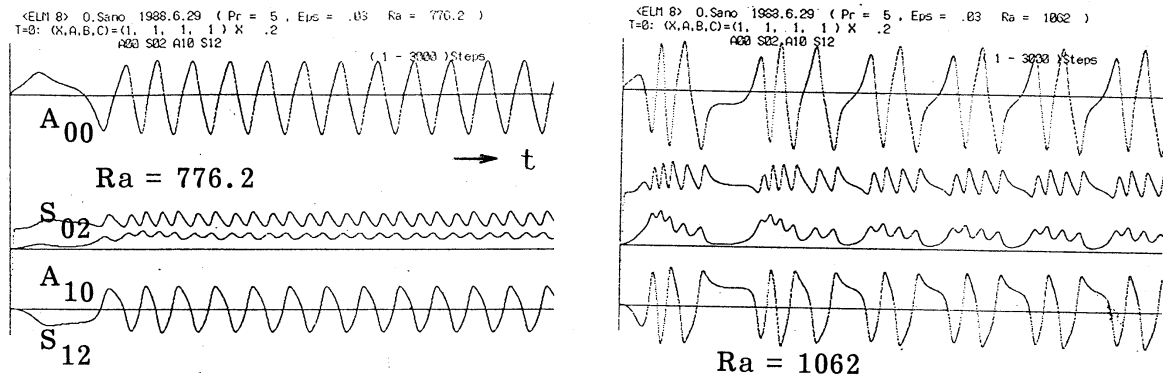
$$- 7.95644BY - 22.4011CZ + 0.770548AE] .$$

ただし, $\epsilon = a/R$, 左辺の上付きのドットは時間微分を表わす. これらの変数のうち X , Y , Z だけを残すと ローレンツ・モデルに帰着するすることは容易にわかる. その意味でここで提案するモデルを拡張されたローレンツ・モデル (Extended Lorenz Model with 8 Variables, 略して ELM8) と呼ぶ.

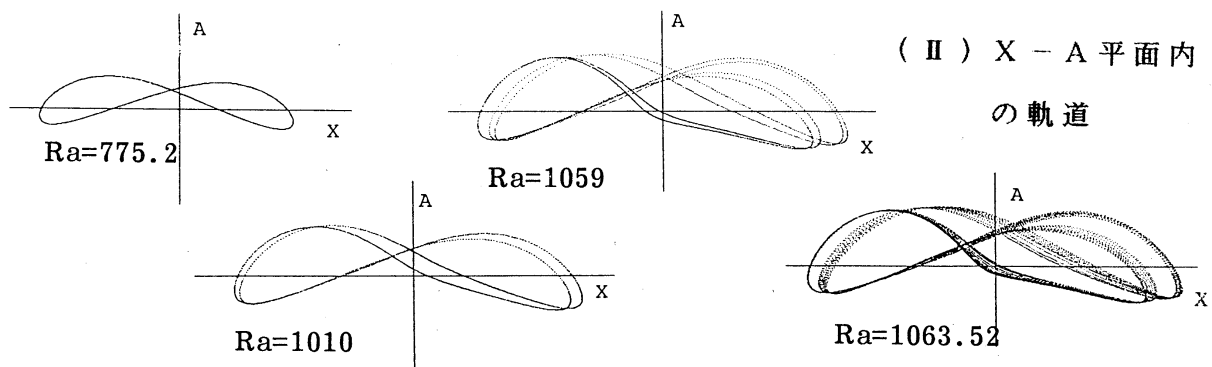
ELM8 の振舞いを数値計算で調べた結果を以下にまとめよう:

- (a) $Ra < 33.4452$ では, すべての振幅 $\rightarrow 0$, すなわち対流は起こらない,
- (b) $33.4452 < Ra < 775.1$ では, すべての振幅 $\rightarrow$ 一定値, すなわち定常流が発生する.
- (c) $Ra \approx 775.2$ でホップ分岐が起こり, 単一の振動数をもった振動が現れる.
- (d) その後 $Ra = 1010$ 付近, 1055 付近, 1063 付近, ..., と次々にホップ分岐を起こし,
- (e) $Ra = 1063.53$ では再び定常状態に落ち着く.
- (f) このモデルは $Ra = 2903$ で発散する.

なお, 挙動の判定には, 時間変動, 位相空間における軌道, パワー・スペクトル, ローレンツ・プロット, ポアンカレ切断面の図形, などを用いた. 図 7 を参照.



(I) 時間変動の例



(III) パワー・スペクトル

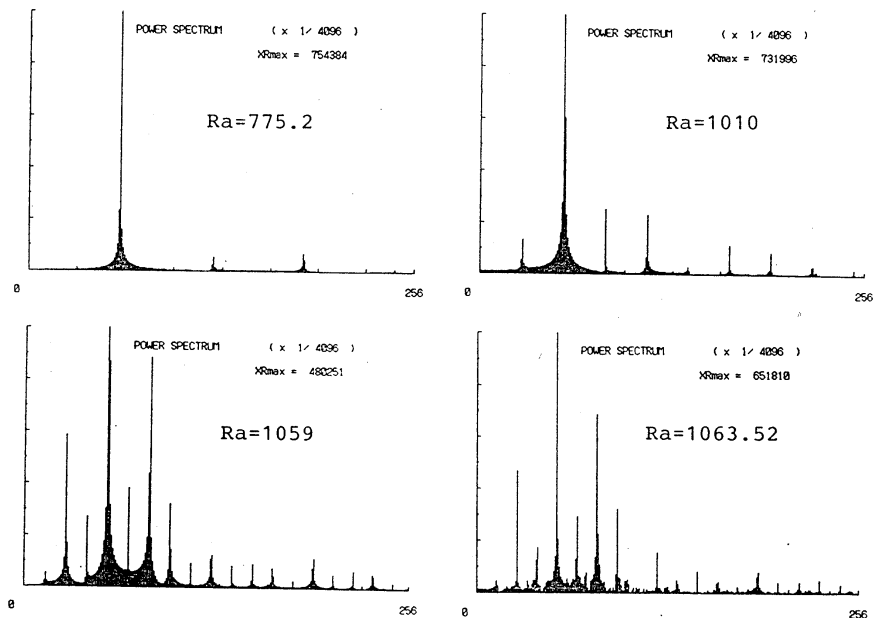


図 7. 新しいモデル E L M 8 の振舞い

§ 4. まとめと議論

トラス内の熱対流, とくに3次元的な構造をもつ流れについて, 実験と理論の両面から検討を加えた. その結果これまでに明らかになったことは以下の通りである.

(1) 対流の発生する臨界レイリー数:

実験的に求めた値は約35で, これは理論値 $33.44523\dots$ とほぼ一致する.

(2) 臨界レイリー数より少し上の領域:

流れは定常的でほぼ1次元的, かつ $Re \propto \sqrt{Ra - Ra_c}$ の関係式が成り立つ. これはローレンツ・モデルの予測とも一致する.

(3) $Ra \gtrsim 800$ の領域:

流れは定常的ではあるが, セルを伴った3次元的なものとなる. ここで提案したいくつかの基本解 $A_{00}, A_{10}, S_{02}, S_{12}, \dots$ の重ね合わせにより表現できる.

(4) $Ra \gtrsim 2500$ の領域:

3次元的な構造を持った流れが時間変動をする. 振動解の発生や周期倍化の兆候が実験的に見いだされ, ELM8モデルによりある程度は説明ができる.

(5) $Ra \gtrsim 3500$ の領域:

流れの変動は小さくなるが, 依然として空間的な構造は

残っている。変動が抑えられる原因は、流速の増加によりループ全体にわたってほぼ一定の温度分布が作られてしまうためと考えられる。ELMSでも上述(4)の段階のうちに定常状態に落ち着くことが示されるが、実験的に見られる流れはかなり乱れたものとなっており(とくに反平行の流れの接する面では渦層に見られるような不規則な巻き込みがあり、また $\Theta = \pm \pi/2$ 付近では顕著な旋回流が存在する、などかなり複雑である)、必ずしも対応したものではない。ELMSではこのような小規模な流れを考慮していないところにその限界があると思われる。

以上述べてきたように、トーラスというきわめて簡単な領域内に生じる熱対流にも、まだ計り知れないほど多様な流体現象が潜んでおり、実用上の問題とも関連して、その解明が待たれていると言えよう。

(付録A) A_{00} 型の流れの拡張:

ループが充分細い($\varepsilon \ll 1$)と考えて1次元的な流れ:

$$w = \sum W_{0n} \cos(n\Theta), T = \sum T_{0n} \sin(n\Theta), u = v = 0$$

を考察する。基礎方程式に代入すると $W_{00} - T_{01} - W_{02} - T_{03} - \dots$,
のような解が得られるので、さらに $W_{0n} = a_n J_0(k_{0,n} r)$, T_{0n}
 $= b_n J_0(k_{0,n} r)$ と仮定すると a_n, b_n は

$$b_{n+1} = b_{n-1} + (2k_{0q}^2/Ra) a_n, \quad a_{n+1} = a_{n-1} - 2k_{0q}^2 b_n,$$

を満たし、その解は $p+1/p=2-\alpha_0$, $\alpha_0=4k_{0q}^4/Ra$ を用いて

$$a_{2N} = (p^N + 1) a_0 = a_0 \prod_{s=1}^N \{4 \sin^2 [(2s-1)\pi/(4N)] - \alpha_0\},$$

$$b_{2N+1} = (2k_{0q}^2/Ra) (p^{2N+1}-1)/[p^N(p-1)] a_0,$$

で与えられる。 $a_{2N}=0$ と置いて無限級数を打ち切ると、その根として Ra^* が求まるので、 $N \rightarrow \infty$ として臨界レイリー数 Ra_c

$$Ra_c = \min\{Ra^*\} = k_{01}^4 = 33.44523\dots$$

が得られる。

(付録 B) S_{12} 型の流れに用いた関数は

$$\begin{aligned} T_B &= -J_1(k_{1j}r), \quad W_B = -2k_{1j}^2 J_1(k_{1j}r), \\ U_B &= \epsilon \{2k_{1j} J_0(k_{1j})(1-r^2) + 4J_1(k_{1j}r)/r \\ &\quad - 4k_{1j} [J_0(k_{1j}r) - J_0(k_{1j})]\}, \\ V_B &= \epsilon [-6k_{1j} J_0(k_{1j})(1-r^2) + 4J_1(k_{1j}r)/r], \\ P_B &= \epsilon [-16k_{1j} J_0(k_{1j})r + 4k_{1j}^2 J_1(k_{1j}r)]. \end{aligned}$$

この流れは $Ra=4k_{11}^4=862.24\dots$ で生じる。

(付録 C) S_{02} 型の流れに用いた関数は

$$T_{01} = J_0(kr) + (J_0/I_0) I_0(kr) - 2J_0,$$

$$W_{02} = 2k^2 [J_0(kr) - (J_0/I_0)I_0(kr)],$$

$$U_{02} = -4\varepsilon k [J_1(kr) - (J_0/I_0)I_1(kr)],$$

$$P_{02} = 2\varepsilon k^4 J_0(k).$$

ここで $J_0=J_0(k)$, $I_0=I_0(k)$ で, $k=4.61089980929\dots$ は $I_0(k)J_1(k)-J_0(k)I_1(k)=0$ の根である.

参考文献

- 1) E. N. Lorenz: J. Atmos. Sci. 20(1963)139.
- 2) J. A. York & E. D. York: Hydrodynamic Stability and Transition to Turbulence (Springer-Verlag, Berlin, 1981)77.
- 3) O. Sano: Nagare 3(Suppl.) 197.
- 4) O. Sano: Proc. 3rd Asian Congress Fluid Mech. (Tokyo, 1986)331.
- 5) O. Sano & T. Wakayama: J. Phys. Soc. Jpn. 58(1989)2615.
- 6) O. Sano: J. Phys. Soc. Jpn. 56(1987)3839.
- 7) O. Sano: J. Phys. Soc. Jpn. 57(1988)1662.
- 8) 佐野 理: 数理解析研究所講究録 661(1988)124.
- 9) K. Sannomiya & O. Sano: Bulletin of Fac. Gen. Ed. Tokyo Univ. Agri. Tech. 25 (1989)215.