

浅水流運動方程式を考慮した傾斜水路上の転波列の波動

名城大学理工学部 新井宗之

Muneyuki ARAI

Faculty of Science and Technology, Meijo University

1. はじめに

山地流域での自然災害には土石流のような流体現象によるものがある。この土石流と呼ばれる現象には間欠的に多数のサージの流れとして流下する場合がある。このような間欠的なサージ流れの代表的なものに中国で観測される粘性土石流と呼ばれる流れがあり、これは一連の現象が多数の間欠的なサージ流下で、100 波にもおよぶことがある¹⁾。また、ヨーロッパアルプスでも多数の間欠的な土石流サージを観測している²⁾。このような現象は流れの不安定性に基づく転波列の一種であると考えられる³⁾。

しかしながら、山地流域のような傾斜水路上の浅水流での波動性については必ずしも十分明らかにされていない。本件究では、山地流域での浅水流によく用いられる浅水流運動方程式を水面変動の条件に適応して水面変動の関係式を導出しその特性について検討することを目的としている。

2. 基礎方程式

浅水流の弱い非線形波動方程式として Kadomtsev-Petviashvili (K-P) 方程式⁴⁾が知られているが、ここでは浅水流運動方程式を水面変動の条件の一つに与えて水面変動に関する方程式を得ることを目的としている。流下方向を x 軸とし、その直角方向を水深 h として y 軸とする。水深 h_0 を定数としそれからの変動量を η とし、 x 軸方向、 y 軸方向の速度成分を u , v とする。水の波の波動方程式を導出する手法より、流れの流体を非圧縮、非回転として速度ポテンシャル ϕ を導入すると次式のラプラス方程式の関係がある。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

水路床 $y = -h_0$ において

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

である。また、水面の変形と流体粒子が一致する条件として

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3)$$

の関係がある。

急激な水面変動を伴う浅水流の運動方程式は、水路幅が水深に比して広く、矩形断面の 1 次元直線水路の場合、次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} - (\beta - 1) \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f'}{2} \frac{u^2}{h} \quad (4)$$

ここに、 β : 運動量補正係数、 h : 水深、 g : 重力加速度、 θ : 水路勾配、 f' : 摩擦損失係数。

左辺第 1 項は加速度項、第 2 項は移流項、第 3 項は水面の急激な変動に伴う付加応力、右辺第 1 項は重力による外力、第 2 項は水面勾配に基づく作用力、第 3 項は底面摩擦による抵抗項である。

ここで、定常等流での流速を u_0 、水深を h_0 とすると運動方程式 (4) より、 $f'/2 = gh_0 \sin \theta / u_0^2$ である。また、流速 u は u_0 とその変動成分を u' とすると $u = u_0 + u'$ であり、水深 h は h_0 とその変動成分を h' とすると $h = h_0 + h'$ である。 u' 、 h' が u_0 、 h_0 に比して微小とし、その 2 乗をを無視し、 u 、 h_0 との比 u'/u 、 h'/h_0 がほぼ等しく $u'/u \approx h'/h_0$ とすると式 (4) の右辺第 3 項は次式のように表せる。

$$\frac{f'}{2} \frac{u^2}{h} = \frac{g \sin \theta}{u_0} u \quad (5)$$

上式において流れの抵抗則は u_0 に反映されることになる。運動量補正係数 β は流動機構により異なる値となるが、開水路流れで $\beta = 1 \sim 1.2$ 程度であり、ここでは $\beta = 1$ として検討する。これより運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - g \sin \theta + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g \sin \theta}{u_0} u = 0 \quad (6)$$

とすることができる。速度ポテンシャル ϕ より $u = \partial \phi / \partial x$ であるから、これを上式に代入して、 x について積分し積分定数を 0 とすると次式を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - g \sin \theta x + g \cos \theta h + \frac{g \sin \theta}{u_0} \phi = 0 \quad (7)$$

上式を水面条件に適用する。

3. 基礎方程式の無次元表示と摂動展開および波動方程式の導出

無次元量にプライムを付し、次のように定義する。

$$\phi' = \frac{\phi}{h_0 v_{p0}}, \quad x' = \frac{x}{h_0}, \quad y' = \frac{y}{h_0}, \quad t' = t \frac{v_{p0}}{h_0}, \quad \eta' = \frac{\eta}{h_0} \quad (8)$$

ここに、 η は水深 h の h_0 からの変動成分で $h = h_0 + \eta$ である。また、 v_{p0} は速度の次元を有し座標変換の位相速度であり、座標変換は

$$\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}} (x - v_{p0} t), \quad \tau = \epsilon^{\frac{3}{2}} t \quad (9)$$

とする。 ϵ は摂動展開における微小パラメータである。 ξ, τ の無次元量を $\xi' = \xi / h_0, \tau' = \tau v_{p0} / h_0$ と定義すると、式 (9) より ξ', τ' は

$$\xi' = \epsilon^{\frac{1}{2}} (x' - t'), \quad \tau' = \epsilon^{\frac{3}{2}} t' \quad (10)$$

である。以上の関係から基礎方程式の無次元表示で表すと次式のようなである。

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y'^2} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1), \quad (12)$$

$$-\frac{\partial \phi'}{\partial y'} + \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = 0 \quad (y' = 0), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \right)^2 - c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 (1 + \eta') + \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} \phi' = 0, \quad (14)$$

ここに、

$$u_0' = \frac{u_0}{c_0}, \quad c_0' = \frac{c_0}{v_{p0}}, \quad c_0 = \sqrt{g h_0 \cos \theta} \quad (15)$$

である。 ϕ', η' の摂動展開は

$$\begin{aligned} \phi' &= \epsilon^{\frac{1}{2}} \phi'^{(1)} + \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi'^{(2)} + \epsilon^{\frac{5}{2}} \phi'^{(3)} + \dots, \\ \eta' &= \epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \epsilon^3 \eta'^{(3)} + \dots, \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \phi'^{(1)}(\xi', y', \tau') &= \frac{\phi^{(1)}}{h_0 v_{p0}}, \quad \phi'^{(2)}(\xi', y', \tau') = \frac{\phi^{(2)}}{h_0 v_{p0}}, \quad \phi'^{(3)}(\xi', y', \tau') = \frac{\phi^{(3)}}{h_0 v_{p0}}, \quad \dots, \\ \eta'^{(1)}(\xi', \tau') &= \frac{\eta^{(1)}}{h_0}, \quad \eta'^{(2)}(\xi', \tau') = \frac{\eta^{(2)}}{h_0}, \quad \eta'^{(3)}(\xi', \tau') = \frac{\eta^{(3)}}{h_0}, \quad \dots \end{aligned}$$

である。また、 $y' = 0$ の近傍において Boussinesq の Taylor 展開

$$\phi'(\xi', y', \tau') = \phi'(\xi', 0, \tau') + \eta' \frac{\partial \phi'(\xi', 0, \tau')}{\partial y'} + \frac{\eta'^2}{2} \frac{\partial^2 \phi'(\xi', 0, \tau')}{\partial y'^2} + \dots$$

を用いる。これらの摂動展開を式 (11)~(14) に適用する。式 (11)~(13) の摂動展開はすでに知られていると考えられるので、式 (14) の摂動展開をのみを記すと

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \right)^2 - c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 + c_0'^2 \eta' + \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} \phi' \\ &= -\epsilon \left(\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} + \epsilon \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial \xi'} + \dots \right) \\ & \quad + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \tau'} + \epsilon \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \tau'} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial \tau'} + \dots \right) \\ & \quad + \epsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \right)^2 + 2\epsilon \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} \right)^2 + \dots \right\} \\ & \quad - c_0'^2 \epsilon^{-\frac{1}{2}} \tan \theta \xi' - c_0'^2 \tan \theta t' + c_0'^2 \\ & \quad + c_0'^2 \left(\epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \epsilon^3 \eta'^{(3)} + \dots \right) \\ & \quad + \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} \left\{ \epsilon^{\frac{1}{2}} \left(\phi'^{(1)} + (\epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \dots) \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} + \dots \right) \right. \\ & \quad \quad \left. + \epsilon^{\frac{3}{2}} \left(\phi'^{(2)} + (\epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \dots) \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial y'} + \dots \right) \right. \\ & \quad \quad \left. + \epsilon^{\frac{5}{2}} \left(\phi'^{(3)} + (\epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \dots) \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial y'} + \dots \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

である。

摂動展開式の ϵ の次数別方程式は次のようである。前述のように式 (11)~(13) の摂動展開式を示していないがそれらを含めて示す。

$\epsilon^{\frac{1}{2}}$, ϵ の次数の関係式は

$$\frac{\partial^2 \phi'^{(1)}}{\partial y'^2} = 0 \quad (17), \quad \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \quad (18), \quad \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = 0) \quad (19),$$

$$-\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} + c_0'^2 \eta'^{(1)} + \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} \phi'^{(1)} = 0 \quad (20).$$

$\epsilon^{\frac{3}{2}}$, ϵ^2 の次数の関係式は

$$\frac{\partial^2 \phi'^{(1)}}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \phi'^{(2)}}{\partial y'^2} = 0 \quad (21), \quad \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \quad (22),$$

$$-\eta'^{(1)} \frac{\partial^2 \phi'^{(1)}}{\partial y'^2} - \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial y'} - \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \xi'} = 0 \quad (y' = 0) \quad (23),$$

$$-\frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} + \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \right)^2 + c_0'^2 \eta'^{(2)} + \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} \left(\eta'^{(1)} \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} + \phi'^{(2)} \right) = 0 \quad (24)$$

$\epsilon^{\frac{5}{2}}$, ϵ^3 の次数の関係式は

$$\frac{\partial^2 \phi'^{(2)}}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \phi'^{(3)}}{\partial y'^2} = 0 \quad (25), \quad \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \quad (26),$$

$$-\eta'^{(2)} \frac{\partial^2 \phi'^{(1)}}{\partial y'^2} - \eta'^{(1)} \frac{\partial^2 \phi'^{(2)}}{\partial y'^2} - \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial y'} - \frac{\partial \eta'^{(2)}}{\partial \xi'} + \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \tau'} + \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \xi'} = 0 \quad (y' = 0) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial \xi'} + \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \tau'} + \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} + c_0'^2 \eta'^{(3)} \\ & + \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} \left(\eta'^{(2)} \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} + \eta'^{(1)} \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial y'} + \phi'^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

である。ここでは水面の波動性を検討するために、これらの式より $\eta'^{(1)}$ に関して解くものとする。

$\phi^{(1)}$ は ξ' , y' , τ' の関数 $\phi^{(1)}(\xi', y', \tau')$ であるが、式 (19) より、 $y' = 0$ で $\partial \phi^{(1)}/\partial y' = 0$ であるから、 $\phi'^{(1)}$ は $y' = 0$ で y' に依存しない関数 $\phi'^{(1)} = \phi'^{(1)}(\xi', \tau')$ である。式 (20) より $\phi'^{(1)}$ を ξ' について解くと $\phi'^{(1)} = e^{-h} \left[\int e^{h c_0'^2} \eta'^{(1)} d\xi' + C \right]$, ここに、 $h = \int (-\tan \theta c_0'/u_0') d\xi' = -\tan \theta (c_0'/u_0') \xi'$, である。ここで、対象としている流れにおいて、水路勾配は $\tan \theta < 1$ であり、Froude 数を $F_r \geq 1$, v_{p0} が長波の波速 $c_0 = \sqrt{gh_0 \sin \theta}$ であることなどを考慮すると $\tan \theta (c_0'/u_0') \xi' \ll 1$ であり、 $e^{|h|} \approx 1$ と考えられる。これより、 $\partial \phi'^{(1)}/\partial \xi' = c_0'^2 \eta'^{(1)}$ (29), $\partial^2 \phi'^{(1)}/\partial \xi'^2 = c_0'^2 \partial \eta'^{(1)}/\partial \xi'$ (30), の関係を得る。式 (21) と式 (30) から、 $\partial^2 \phi'^{(2)}/\partial y'^2 = -c_0'^2 \partial \eta'^{(1)}/\partial \xi'$ (31), の関係を得る。式 (24) と式 (17) より、 $\partial \phi'^{(2)}/\partial y' = -\partial \eta'^{(1)}/\partial \xi' \quad (y' = 0)$ (32), の関係がある。式 (31) において $\eta'(\xi', \tau')$ は y' に依存しないから y' で積分し、水面 $y' = 0$ で式 (32) の関係を用いて積分定数を定めると、 $\partial \phi'^{(2)}/\partial y' = -y' c_0'^2 \partial \eta'^{(1)}/\partial \xi' - \partial \eta'^{(1)}/\partial \xi'$, である。これをさらに y' で積分し $y' = -1$ で $\phi'^{(2)} = 0$ として積分定数を定めると、 $\phi'^{(2)} = -\frac{1}{2} y'^2 c_0'^2 \partial \eta'^{(1)}/\partial \xi' - y' \partial \eta'^{(1)}/\partial \xi' + \left(\frac{1}{2} c_0'^2 - 1 \right) \partial \eta'^{(1)}/\partial \xi'$, を得る。したがって、 $y' = 0$ で $\phi'^{(2)}$ に関する ξ' による 1 階, 2 階の導関数は、 $\partial \phi'^{(2)}/\partial \xi' = \left(\frac{1}{2} c_0'^2 - 1 \right) \partial^2 \eta'^{(1)}/\partial \xi'^2$ (33), $\partial^2 \phi'^{(2)}/\partial \xi'^2 = \left(\frac{1}{2} c_0'^2 - 1 \right) \partial^3 \eta'^{(1)}/\partial \xi'^3$ (34), である。式 (24) に式 (18), 式 (29) を代入し、その両辺に ξ' の導関数を取り、式 (34), 式 (29), 式 (33) の関係を適用すると

$$-\left(\frac{1}{2} c_0'^2 - 1 \right) \frac{\partial^3 \eta'^{(1)}}{\partial \xi'^3} + c_0'^2 \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \tau'} + c_0'^4 \eta'^{(1)} \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \xi'} + c_0'^2 \frac{\partial \eta'^{(2)}}{\partial \xi'} + \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} \left(\frac{1}{2} c_0'^2 - 1 \right) \frac{\partial^2 \eta'^{(1)}}{\partial \xi'^2} = 0 \quad (35)$$

を得る。式 (24) に式 (34) を適用し、 $\eta'^{(1)}$ が y' に依存しないことから y' について積分し、式 (26) の関係から積分定数を定めると、 $y' = 0$ のとき、 $\partial \phi'^{(3)}/\partial y' = -\left(\frac{1}{2} c_0'^2 - 1 \right) \partial^3 \eta'^{(1)}/\partial \xi'^3$ (36), を得る。式 (27) に式 (17), 式 (31), 式 (36), 式 (29) を適用すると

$$2c_0'^2 \eta'^{(1)} \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \xi'} + \left(\frac{1}{2} c_0'^2 - 1 \right) \frac{\partial^3 \eta'^{(1)}}{\partial \xi'^3} - \frac{\partial \eta'^{(2)}}{\partial \xi'} + \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \tau'} = 0 \quad (37)$$

を得る。これらより式 (35) と式 (37) から $\eta'^{(1)}$ に関する次式を得る。

$$\frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \tau'} + \frac{3}{2} c_0'^2 \eta'^{(1)} \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \xi'} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_0'^2} - \frac{1}{2} \right) \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} \frac{\partial^2 \eta'^{(1)}}{\partial \xi'^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2 + c_0'^4}{2c_0'^2} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial^3 \eta'^{(1)}}{\partial \xi'^3} = 0 \quad (38)$$

さらに、 $\eta'^{(1)}$ を η' として表し、係数項に a_1 , a_2 , a_3 を用いると

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + a_1 \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} - a_2 \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \xi'^2} + a_3 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial \xi'^3} = 0 \quad (39)$$

ここに、

$$a_1 = \frac{3}{2} c_0'^2, \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_0'^2} - \frac{1}{2} \right) \tan \theta \frac{c_0'}{u_0'}, \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2 + c_0'^4}{2c_0'^2} - \frac{3}{2} \right) \quad (40)$$

である。 a_1 , a_2 , a_3 は c_0' の関数でその大きさにより符号が変わり表-1 のようである。

表-1 係数の符号

$c_0'^2$	$a_1 = \frac{3}{2}c_0'^2$	$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_0'^2} - \frac{1}{2} \right)$	$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2+c_0'^4}{2c_0'^2} - \frac{3}{2} \right)$
$0 < c_0'^2 < 1$	+	+	+
$c_0'^2 = 1$	+	$\frac{1}{4}$	0
$1 < c_0'^2 < 2$	+	+	-
$c_0'^2 = 2$	+	0	0
$2 < c_0'^2$	+	-	+

4. 波動方程式の解析例および考察

4.1 数値解析例

傾斜水路上で対象としている浅水流の波動において、実験結果や実際のサージでは水深波長比が小さく長波の特性を示している。そこで、位相速度のパラメータを長波の波速とすると $v_{p0} = c_0$ である。すなわち、 $c_0' = c_0/v_{p0} = 1$ の場合、 $a_3 = 0$ となり、式 (39)、式 (40) は

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + a_1 \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} - a_2 \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \xi'^2} = 0 \quad (41), \quad \text{ここに,} \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4} \frac{\tan \theta}{u_0'} \quad (42),$$

である。これは Burgers 方程式と同形であり、Cole-Hopf 変換を用いて解析解を得ることができる。幾つかの初期条件、境界条件による解析解を得ているが、固定境界条件の場合、初期条件の η' の形状に関わらず鋸歯状の波形形状になることが知られている。しかしながら、ここでは初期条件、境界条件の違いを数値解析により式 (41) の波形変化を検討する。

ここで、係数 a_2 は無次元平均流速 u_0' と水路勾配 θ により決まる値である。このため a_2 は実験結果から定めることとする。実験水路は、長さ 56m、幅 10cm、深さ 15cm の硬質アクリル製直線水路で水路床は滑面である。水路勾配は 3.0deg. であり、循環式水路である。流量 Q は水路下流端で計量枡による測定結果であり、平均水深 h_0 は 120 秒間の水深変動の単純平均である。平均流速 u_0 は Q 、 h_0 および水路幅 B より定めている。実験条件および実験結果による a_2 の値は表-2 に示す。実験結果による a_2 の平均的な値は $a_2 = 0.0045$ であるから、式 (41) の a_1 、 a_2 はそれぞれ $a_1 = \frac{3}{2}$ 、 $a_2 = 0.0045$ を用いる。

表-2 実験条件・結果

No.	$\theta(\text{deg})$	$Q(\text{cm}^3/\text{s})$	$h_0(\text{cm})$	$u_0(\text{cm/s})$	a_2
1	3.0	365.0	0.70	52.2	0.00657
2	3.0	503.7	0.83	60.9	0.00615
3	3.0	704.8	0.73	97.1	0.00363
4	3.0	883.4	1.06	83.3	0.00506
5	3.0	984.0	1.11	88.6	0.00487
6	3.0	1089.5	1.07	101.5	0.00416
7	3.0	1453.8	1.15	126.6	0.00347
8	3.0	1475.4	1.13	130.7	0.00334
9	3.0	1634.7	1.11	146.6	0.00293
10	3.0	1884.4	1.45	130.3	0.00380

(1) 固定境界条件での波形変化

1) 初期条件の波数 $k = \frac{1}{2}$ の場合：

初期条件は $\tau' = 0$ 、 $\xi' = 0 \sim 1$ で $\eta'(0, \xi') = \sin(\pi \xi')$ 、境界条件は $\xi' = 0, 1$ で $\eta'(\tau', 0) = 0$ 、 $\eta'(\tau', 1) = 0$ である。初期条件は波数 $k = 1/2$ の $\sin$ 関数である。図-1 はその数値解析結果である。図-1 (a) は $\tau' = 0, 1$

の結果であり、図-1 (b) は無次元時間 τ' を $\tau' = 0 \sim 1$ までを 3D 表示したもので奥 (右) から手前に時間が進行して表示している。初期の $\sin$ 波形は時間の進行とともに ξ' のプラス方向に頂部が移りし波形勾配の急峻化が生じることが分かる。

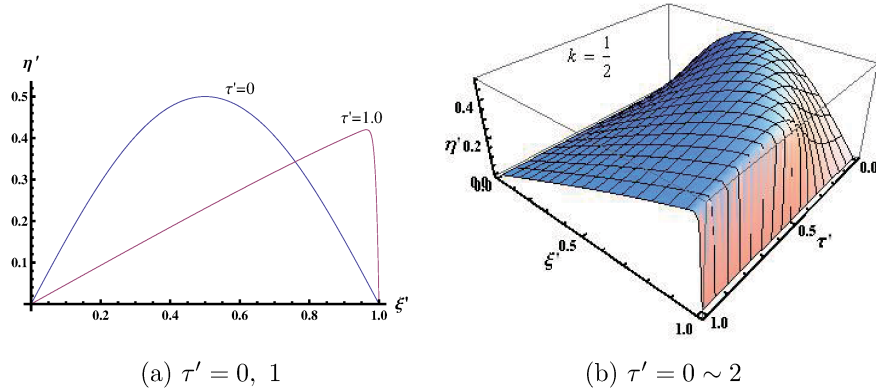


図-1 $k = 1/2$ 初期条件 $\eta'(0, \xi') = \sin(\pi\xi')$ の波形変化

2) 初期条件の波数 $k = 1$ の場合：

初期条件は $\tau' = 0$, $\xi' = 0 \sim 1$ で $\eta'(0, \xi') = -\sin(2\pi\xi')$, 境界条件は $\xi' = 0, 1$ で $\eta'(\tau', 0) = 0$, $\eta'(\tau', 1) = 0$ である。計算結果を図-2 に示す。図-2 (a) は $\tau' = 0, 0.4$ の場合で、図-2 (b) は $\tau' = 0 \sim 1.0$ を 3D で示したものである。初期条件の $\sin$ 波形は、波数 $k = 1$ の鋸歯状の波形に変形することが分かる。

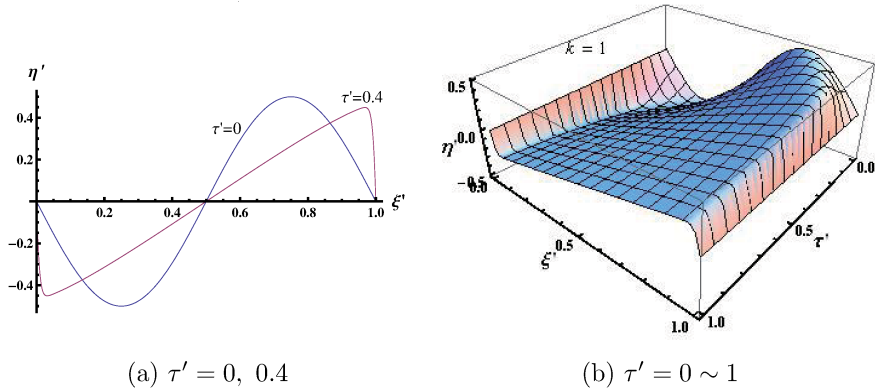


図-2 $k = 1$ 初期条件 $\eta'(0, \xi') = -\sin(2\pi\xi')$ の波形変化

3) 初期条件の波数 $k = 3/2$ の場合：

初期条件は $\tau' = 0$, $\xi' = 0 \sim 1$ で $\eta'(0, \xi') = \sin(3\pi\xi')$, 境界条件は $\xi' = 0, 1$ で $\eta'(\tau', 0) = 0$, $\eta'(\tau', 1) = 0$ である。計算結果を図-3 に示す。図-3 (a) は $\tau' = 0, 0.3$ の場合で、図-3 (b) は $\tau' = 0 \sim 1.0$ を 3D で示したものである。これまでと同様に初期条件の $\sin$ 波形は、波数 $k = 3/2$ の鋸歯状の波形に変形することが分かる。

以上のことから、両端固定の境界条件では初期条件の波形 η' が時間 τ' の経過とともに変形し、初期の波数 k を保持して鋸歯状の波形になることが分かる。また、図-2、図-3 の数値解析結果は、図-1 に比べると η' の時間経過に伴う減衰が大きい。これは波数 k が大きくなると早く減衰することを示している。

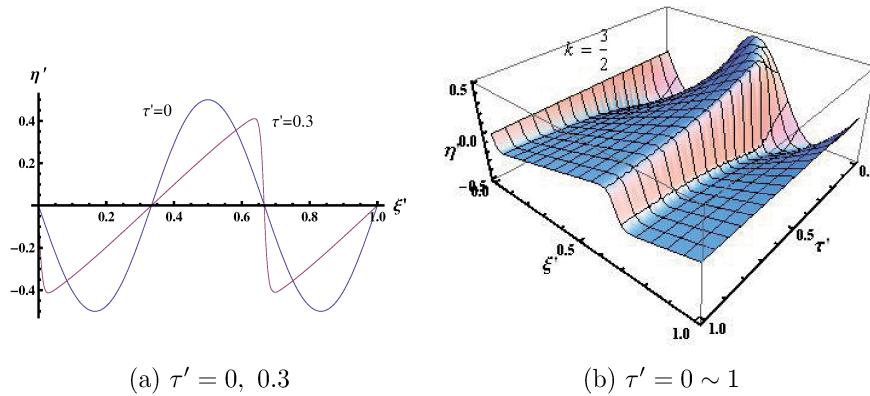


図 -3 $k = 3/2$ 初期条件 $\eta'(0, \xi') = -\sin(3\pi\xi')$ の波形変化

(2) 非固定境界条件での波形変化

1) 初期条件の波数 $k = 1/2$ の場合 :

初期条件は $\tau' = 0$, $\xi' = 0 \sim 1$ で $\eta'(0, \xi') = \sin(\pi\xi')$, 境界条件は $\xi' = 0, 1$ で $\eta'(\tau', 0) = \eta'(\tau', 1)$ である. 初期波形は, 固定境界条件の場合と同じである. 図 -4 に計算結果を示す. 図 -4 (a) は $\tau' = 0, 0.5, 1.2$ の波形変化を示している. 頂部が初期の中央部から ξ' のプラス側に移動し, $\tau' = 1.2$ では中央よりもマイナス側に位置している. これは境界条件を $\eta'(\tau', 0) = \eta'(\tau', 1)$ としていることによるものである. 図 -4 (b) は $\tau' = 0 \sim 2.0$ を連続的に 3D で示している. 頂部が移動し位相が生じていることがわかる. また, この場合波数が初期条件で $k = 1/2$ であるが, 時間の進捗とともに波数 $k = 1$ の波形に変形していることが分かる.

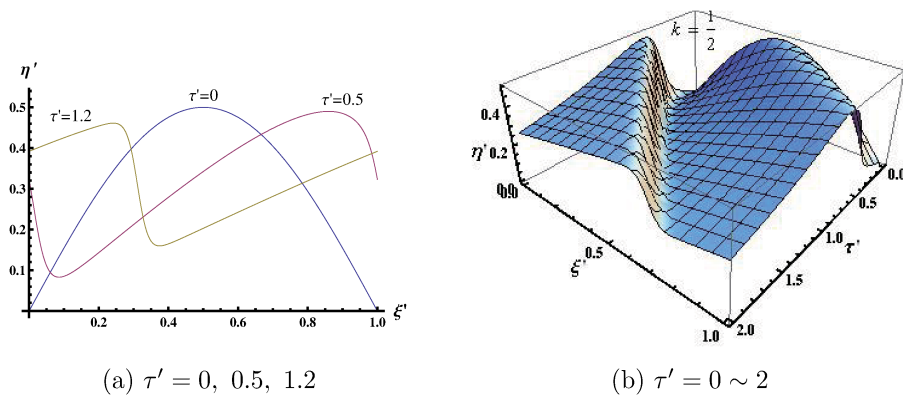
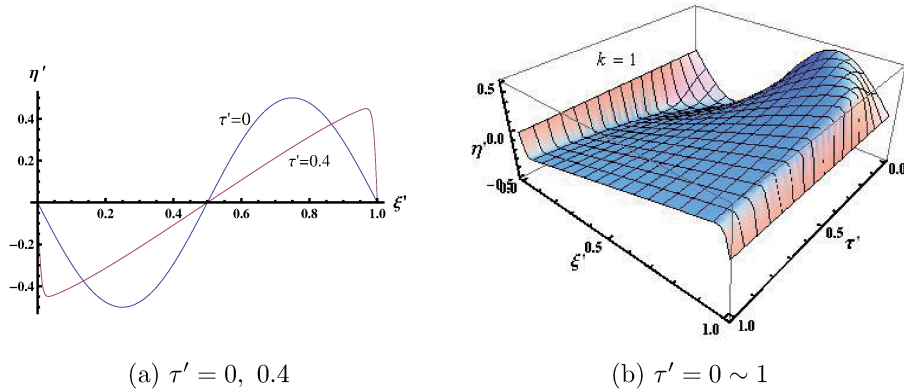


図 -4 $k = 1/2$ 初期条件 $\eta'(0, \xi') = \sin(\pi\xi')$ の波形変化

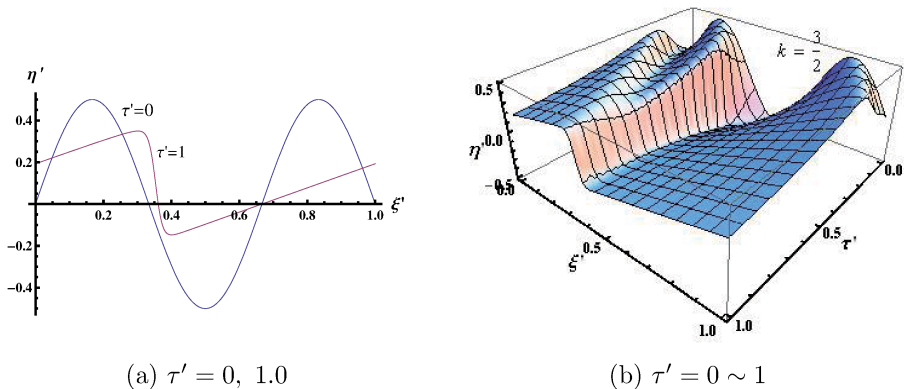
2) 初期条件の波数 $k = 1$ の場合 :

初期条件は $\tau' = 0$, $\xi' = 0 \sim 1$ で $\eta'(0, \xi') = -\sin(2\pi\xi')$, 境界条件は $\xi' = 0, 1$ で $\eta'(\tau', 0) = \eta'(\tau', 1)$ である. 図 -5 に計算結果を示す. 図 -5 (a) は $\tau' = 0, 0.4$ の波形変化を示している. 図 -5 (b) は $\tau' = 0 \sim 1.0$ を 3D として示している. この場合は, 固定境界条件と同じ波形変形を示している.

(a) $\tau' = 0, 0.4$ (b) $\tau' = 0 \sim 1$ 図 - 5 $k = 1$ 初期条件 $\eta'(0, \xi') = -\sin(2\pi\xi')$ の波形変化

3) 初期条件の波数 $k = 3/2$ の場合 :

初期条件は $\tau' = 0$, $\xi' = 0 \sim 1$ で $\eta'(0, \xi') = \sin(3\pi\xi')$ である. 境界条件は $\xi' = 0, 1$ で $\eta'(\tau', 0) = \eta'(\tau', 1)$ である. 図 - 6 に計算結果を示す. 図 - 6 (a) は $\tau' = 0, 1.0$ の波形変化を示している. この場合, 波数 $k = 3/2$ の初期条件での波形は $\tau' = 1.0$ で波数 $k = 1$ の波形に変形していることが分かる. 図 - 6 (b) は $\tau' = 0 \sim 1.0$ を連続的に 3D として示している. この場合, 複雑な変形過程を経て波数 $k = 1$ の波形に変形することが示されている.

(a) $\tau' = 0, 1.0$ (b) $\tau' = 0 \sim 1$ 図 - 6 $k = 3/2$ 初期条件 $\eta'(0, \xi') = \sin(3\pi\xi')$ の波形変化

4.2 波数 $k = 1/2$ の解析解

初期条件において波数 $k = 1/2$ の $\sin$ 関数の波形で境界条件を非固定境界条件の場合の解析解を求めることにする. 初期条件として, 振幅 $a = 1$, 波数 $k = 1/2$, 周期 $T = 1$ の $\eta(x, 0) = \frac{1}{2} \left(\sin(\pi x) - \frac{2}{\pi} \right)$ ($0 < x < 1$) とし, 境界条件は $\xi' = 0, 1$ で $\eta'(\tau', 0) = \eta'(\tau', 1)$ の非固定境界条件とする.

Burgers 方程式である式 (41) は Cole-Hopf 変換を用いると熱伝導方程式に変換することができ, その熱伝導方程式による解を Cole-Hopf 変換の逆変換を用いることにより式 (41) の解を得ることができる. この方法を用いて先の初期条件, 境界条件で式 (41) を解くと解 η' として

$$\eta'(\xi', \tau') = -\frac{\frac{1}{r} \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{-2n\pi A_n \sin(2n\pi\xi') + 2n\pi B_n \cos(2n\pi\xi')\} e^{-\lambda_n^2 \tau'}}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(2n\pi\xi') + B_n \sin(2n\pi\xi')\} e^{-\lambda_n^2 \tau'}} \quad (43)$$

ここに,

$$r = \frac{3}{4\mu} \frac{a}{2}, \quad \mu = \frac{1}{4} \frac{\tan \theta}{u_0'}, \quad \lambda_n = \frac{\sqrt{\mu} n \pi}{l} = \sqrt{\mu} n \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad a_0 = \int_0^1 \exp \left[\frac{r}{\pi} \{ \cos(\pi v) + 2v \} \right] dv$$

$$A_n = 2 \int_0^1 \exp \left[\frac{r}{\pi} \{ \cos(\pi v) + 2v \} \right] \cos(2n\pi v) dv, \quad B_n = 2 \int_0^1 \exp \left[\frac{r}{\pi} \{ \cos(\pi v) + 2v \} \right] \sin(2n\pi v) dv \quad (44)$$

を得る．図 - 7 は $\tau' = 1.0$, $r = 10$, $\tau' = 2.0$, $r = 30$ の計算結果である．波数 $k = 1/2$ の初期条件の波形が波数 $k = 1$ の波形に変形することが分かる．

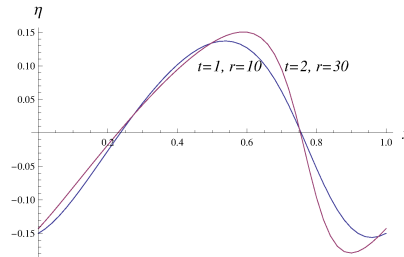


図 - 7 η , $\tau' = 1.0$, $r = 10$, $\tau' = 2.0$, $r = 30$

4.3 考察

数値解析の結果から，固定境界条件の場合，初期条件の波数 k を保持して波形は急峻な水面勾配を有する鋸歯状に変形する．しかし，非固定境界条件においては，初期条件が整数倍の波数ではその波数が保持されたまま急峻な波形勾配を有する波形に変形するが，初期条件の波形の波数が整数倍でない場合には，波数 $k = 1$ の波形に変形することが示される．これは，自然の条件下では非固定境界条件と考えられることから，いろいろな波数の水面擾乱が生じ，長波の波速において波数 $k = 1$ の急峻な水面勾配を有する波形に変形することを示している．また，この波形の変形は解析解から新たな位相を有する解となることが示される．これは，長波の波速の波形が急峻な水面勾配を有する波形に変形するとともに位相速度が長波の波速から新たな位相速度に変化することを示している．このことはさらに現象が Burgers 方程式から Burgers-KdV 方程式の現象となり孤立波的な波に移行することを示しているものと考えられる．

5. まとめ

傾斜水路上の流れの波動性について，浅水流運動方程式を考慮して導かれた波動方程式による転波列性サージの生成過程について検討した．自然条件下のように，非固定境界条件で長波の波速上の初期波形（擾乱）が時間進行とともに急峻な水面勾配を有する波形で波数 $k = 1$ の波形に変形することを示した．また，この変形と同時に新たな位相速度を生じることも解析解の例から示した．

謝辞

この研究における実験は京都大学防災研究所宇治川オープンラボラトリーで行った．ここに記して関係各位に謝意を表します．

参考文献

- 1) Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, and Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences and Ministry of Water Conservancy: Japan-China Joint Research on the Mechanism and the Countermeasures for the Viscous Debris Flow, 206p., 1999.
- 2) Massimo Arattano, Andrea M. Deganutti and Lorenzo Marchi : Debris Flow Monitoring Activities in an Instrumented Watershed on the Italian Alps, *Proceedings of the First ASCE International Conference on Debris Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*, pp.506-515, 1997.
- 3) Arai, M., Huebl, J., Kaitna, R. : Occurrence conditions of roll waves for three grain-fluid models and comparison with results from experiments and field observation. *Geophysical Journal International* Vol 195, Issue 3, p 1464-1480 (doi: 10.1093/gji/ggt352), 2013.
- 4) Kadomtsev, B.B and Petviashvili, V.I. : On the stability of solitary waves in weakly dispersive media, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **192** 753-6(1970), *Sov. Phys. Dok.* **15** 539-41, 1970.