

有限群の作用に付随した fusion algebra

Akihiro Munemasa (宗政昭弘)
九州大学理学部

1 有限群の group Hopf algebra の quantum double

Quantum double とは任意の Hopf 代数に対してその dual とのテンソル積に Hopf 代数の構造を入れたもので、定義は Drinfeld [6] による。ここでは有限群の group Hopf algebra の場合についてのみ、quantum double がどのようなものを簡単に述べる。 G を有限群とし、 D を $G \times G$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。 D において積を次のように定義する。

$$(g, h)(k, l) = \delta_{h^{-1}gh, k}(g, hl) \quad (g, h, k, l \in G).$$

すると D は associative algebra になる。さらに、

$$\Delta : (g, h) \mapsto \sum_{x \in G} (x, h) \otimes (x^{-1}g, h)$$

$$\varepsilon : (g, h) \mapsto \delta_{g, 1}$$

により D は Hopf 代数 になり

$$R = \sum_{g, h \in G} (g, 1) \otimes (h, g)$$

により D は quasi-triangular になる。

そもそも私が quantum double に興味を持ちはじめたのは、Dijkgraaf-Vafa-Verlinde-Verlinde [5] に現われる fusion algebra が、実は group Hopf algebra の quantum double の中心であるということを知ったからである。論文 [5] では任意の有限群 G から出発して $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用する fusion algebra なるものを構成し、Verlinde formula が与えられている。一方、坂内 [1] によれば、fusion algebra は character algebra [8] と本質的に同じもので、self-dual な character algebra において構造定数を指標表で書き表わしたものが Verlinde formula に他ならない。従って、[5] に現われる fusion algebra を純代数的に構成し、対応する character algebra の self-duality を示すことができれば、Verlinde formula は証明されたことになる。そこで [5] への形式的な approach を試みた [11]、が、このよ

うな試みはすでになされていた (Bantay [3],[4], 和久井 [12])。次節では、坂内 [1] による fusion algebra を非可換な場合に一般化した定義を与え、[5] に現われる fusion algebra を構成する。この fusion algebra は可換だが、非可換な例は第3節で取り上げる。

2 Fusion algebras

Definition. 複素数体上の有限次元代数 $\mathcal{A}$ が、(基底 $x_0, \dots, x_d$ に関して) fusion algebra であるとは次の条件をみたすときをいう。ただし、 $x_i x_j = \sum_{k=0}^d N_{ij}^k x_k$ とする。

- (1) $x_0 = 1$
- (2) N_{ij}^k は非負整数
- (3) 基底の置換 $\hat{\cdot}: x_i \mapsto x_i$ で involutive な anti-automorphism が存在する
- (4) $N_{ij}^k = N_{ik}^j$
- (5) ある一次表現 $x_i \mapsto k_i, k_i > 0$ が存在する

この定義は、坂内 [1] の integral fusion algebra at algebraic level から可換性の条件を除いたものである。

さて第1節で述べたように、group Hopf algebra の quantum double を考える。 $\mathcal{A} = Z(D)$ を D の中心とすると、

$$\mathcal{A} = \left(\bigoplus_{gh=hg} \mathbb{C}(g, h) \right)^G \cong \bigoplus_{i=0}^d Z(\mathbb{C}[C_G(g_i)])$$

となることは容易にわかる。ただし g_i ($i = 0, \dots, d$) は G の共役類の代表系である。この代数 $\mathcal{A}$ の中に次のような基底をとる。

$$x_{i,\alpha} = \frac{1}{|C_G(g_i)|} \sum_{h \in G} \sum_{g \in C_G(g_i)} \rho_{i,\alpha}(g)(h^{-1}gh, h^{-1}g_ih),$$

ただし、 $\{\rho_{i,\alpha}\}_\alpha$ は $C_G(g_i)$ の既約指標全体の集合とする。このとき $\mathcal{A}$ は基底 $\{x_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ に関して可換な fusion algebra になる。また、 $SL(2, \mathbb{Z})$ は

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : (g, h) \mapsto (h, g^{-1}),$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (g, h) \mapsto (g, hg),$$

により quantum double の中心 $Z(D)$ に作用する。 S, T を基底 $\{x_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ に関して行列表示すると、 S は対称な、 T は対角な、ユニタリ行列になる。さらに S による基底 $\{x_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ の像は、スカラー倍を除いて $\mathcal{A}$ の原始巾等元の集合 $\{e_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ になる。ただし

$$e_{i,\alpha} = \frac{\rho_{i,\alpha}(1)}{|C_G(g_i)|^2} \sum_{h \in G} \sum_{g \in C_G(g_i)} \rho_{i,\alpha}(g)(h^{-1}g_ih, h^{-1}gh).$$

従って S は $\mathcal{A}$ の“指標表”を与え、また S^2 が $\{x_{i,\alpha}\}$ を集合として固定することから、“self-duality”がわかる（指標表、及び self-duality は character algebra に関して定義される [1],[2],[8]）。

3 群作用への一般化

この節では前節で構成した fusion algebra を、群作用の場合にいかにか拡張するかを述べる。すなわち、有限群 G が集合 X に可移に作用している時、fusion algebra の構成法を述べる。これを、 $G = H \times H$ が $X = H \times H / \Delta H$, (ただし $\Delta H = \{(h, h) | h \in H\}$) に作用している場合に適用すると前節の algebra が得られる。一般に集合 X は群構造を持たないので、Hopf 代数や quantum double の一般化を構成しているわけではない。今、群 G が集合 X に可移に作用しているとし、

$$Y = \{(g; x, y) | x, y \in X, g \in G, x^g = x, y^g = y\}.$$

とおく。 $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}Y$ を Y の元を基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし、 $\tilde{\mathcal{A}}$ に積を次のように定義する。

$$(g; x, y)(h; z, w) = \delta_{y,z} \delta_{g,h}(g; x, w).$$

このとき $\tilde{\mathcal{A}}$ は $\mathbb{C}$ 上の半単純代数になる。実際

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigoplus_{g \in G} M_{|F(g)|}(\mathbb{C})$$

である。ただし、 $F(g) = \{x \in X | x^g = x\}$ 。群 G は集合 Y に作用する：

$$G \ni u : (g; x, y) \mapsto (u^{-1}gu; x^u, y^u).$$

この作用は $\tilde{\mathcal{A}}$ の自己同型を誘導し、従って固定部分空間

$$\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}^G = \{\alpha \in \tilde{\mathcal{A}} | \alpha^g = \alpha, \forall g \in G\}$$

は $\tilde{\mathcal{A}}$ の subalgebra になる。容易に

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{H}(C_G(g_i), F(g_i))$$

がわかる。ただし、 $\{g_0, \dots, g_m\}$ は G の共役類の代表系、 $\mathcal{H}(C_G(g_i), F(g_i))$ は $C_G(g_i)$ の $F(g_i)$ 上の置換表現の centralizer algebra (Hecke algebra, commutant) である。従って、 $\mathcal{A}$ が可換であるためには、すべての i について $C_G(g_i)$ の $F(g_i)$ 上の置換表現が multiplicity-free であることが必要十分である。例えば、 G が、正則正規アーベル部分群をもてば、この条件はみたされる。

さて、 $\mathcal{A}$ の fusion algebra としての基底を構成しよう。 $X \times X$ 上の G -orbit の代表元を (a_i, b_i) ($0 \leq i \leq d$) とし、 G_i を (a_i, b_i) の固定部分群とする。 $\{\rho_{i,\alpha}\}_\alpha$ を G_i の既約指標全体の集合とし、

$$x_{i,\alpha} = \frac{1}{|G_i|} \sum_{h \in G} \sum_{g \in G_i} \rho_{i,\alpha}(g)(h^{-1}gh; a_i^h, b_i^h)$$

とおく。このとき、 $\{x_{i,\alpha}\}_{i,\alpha}$ は $\mathcal{A}$ の基底をなし、この基底に関して $\mathcal{A}$ は fusion algebra となる。

Remark. (1) 吉田知行氏 [13] は、全く別の構成法で代数 $\mathcal{A}$ を構成している。また、 $G = H \times H$, $X = H \times H / \Delta H$ の場合 $\mathcal{A}$ が可換になることは、池田正氏が最初に気づいたことである、と御指摘いただいた。

(2) $G = H \times H$, $X = H \times H / \Delta H$ の場合を扱っている [5] の代数的再構成について、1992年12月に京大数理研短期共同研究・代数的組合せ論と低次元トポロジー (研究代表者: 河野俊丈) において、和久井道久氏が講演したとき、河東泰之氏が、部分作用素環との関連性を指摘し、一般の群作用の場合への拡張の可能性をほのめかした。一般に群 G とその部分群 H が与えられたとき (これは G が $X = G/H$ に作用していると考えてもよい)、hyperfinite II_1 factor と呼ばれる無限次元単純環の組 $M \supset N$ が自然に対応し、 $M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$ に現われる N - N bimodule の同型類は有限個である。これら同型類を基底とし、 $\otimes$ で積を導入した環が、実はこの節で構成した代数と同型になるのではないかと私は予想した。この研究集会の直後山上滋氏より、この予想が正しいということを知られた。

4 Terwilliger algebras of association schemes

Association schemes を中心とする代数的組合せ論の哲学は、群の作用する空間から、群そのものを除外することである。第3節に述べたことは、可移に作用する群がなければ全く無意味である。第3節の内容を伊藤達郎氏に話した時、 $G \times X \times X$ の部分集合 Y を基底としてとる代わりに、 $X \times X \times X$ を考えたらどうか、と助言をいただいた。実際、前節の代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ の積の定義においては G の演算は全く用いられていない。そこで、有限集合 X に対し、 $X \times X \times X$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}[X \times X \times X]$ を考え、積を次で定義する。

$$(x; y, z)(u; v, w) = \delta_{x,u} \delta_{z,v} (x; y, w).$$

もちろん、これでは $\tilde{\mathcal{A}} = \bigoplus^n M_n(\mathbb{C})$ 、ただし $n = |X|$ となり全く面白くない。有限群 G が X に可移に作用していれば、 $X \times X$ はいくつかの軌道 $R_0, R_1, \dots, R_d$ に分れる。この

状況を一般化したのが association scheme の概念である。詳しくは [2] にゆずるが、association scheme の定義を知らない読者は、 $R_0, R_1, \dots, R_d$ を G の $X \times X$ 上の軌道と考えて差し支えない。

さて、

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{x \in X} \sum_{(y,z) \in R_i} (x; y, z). \\ E_i^* &= \sum_{(x,y) \in R_i} (x; y, y), \\ T_0 &= \text{span}\{E_i^* A_j E_k^* | 0 \leq i, j, k \leq d\} \end{aligned}$$

とおく。 T を $\{A_i\} \cup \{E_i^*\}$ で生成された $\tilde{A}$ の subalgebra とし、これを association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ の Terwilliger algebra と呼ぶ。明らかに T_0 は T の部分空間であり、 $T_0 = T$ が成立するとき $\mathcal{X}$ は triply regular であるという。Triply regular であるための必要十分条件は $A_i E_j^* A_k \in T_0$ がすべての i, j, k について成り立つことである。今、 $\{R_i\}_{0 \leq i \leq d}$ が実際にある群 G の $X \times X$ 上の軌道だとしよう。群 G は $X \times X \times X$ 上にも作用し、従って代数 $\tilde{A}$ に自己同型として作用する。Terwilliger 代数 T は G の固定部分代数 $\tilde{A}^G$ の部分代数である。

最後に、Terwilliger 代数の応用として、spin model に関する Jaeger の定理の簡単な証明を与える。まず、Terwilliger 代数の生成元 $\{A_i\} \cup \{E_i^*\}$ のみたす関係を列挙しておく。ただし、 $J = \sum_{i=0}^d A_i$, $R_i(x) = \{y \in X | (x, y) \in R_i\}$, $R_{i'} = \{(x, y) | (y, x) \in R_i\}$, $p_{ij}^k = |R_i(x) \cap R_{j'}(y)| ((x, y) \in R_k)$ とする。

Lemma 1 (i) $A_0 = \sum_{i=0}^d E_i^*$ is the identity of T .

(ii) $A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k.$

(iii) $E_i^* E_j^* = \delta_{ij} E_i^*.$

(iv) $E_i^* A_j E_k^* = \sum_{\substack{(x,y) \in R_i, (x,z) \in R_k \\ (y,z) \in R_j}} (x; y, z).$

(v) $E_0^* A_j = E_0^* A_j E_j^*, A_j E_0^* = E_j^* A_j E_0^*.$

(vi) $A_i E_j^* A_k = \sum_{x,y,z \in X} |R_i(y) \cap R_j(x) \cap R_{k'}(z)| (x; y, z).$

(vii) $A_i E_0^* A_k = E_{i'}^* J E_k^*.$

(viii) $J E_j^* A_k = \sum_{i=0}^d p_{jk}^i J E_i^*.$

(ix) $A_i E_j^* J = \sum_{k=0}^d p_{ji'}^k E_k^* J.$

$$(x) E_0^* A_i E_j^* A_k = \delta_{ij} \sum_{l=0}^d p_{ik}^l E_0^* A_l E_l^*.$$

$$(xi) A_i E_j^* A_k E_0^* = \delta_{jk} \sum_{l=0}^d p_{ik}^l E_l^* A_l E_0^*.$$

Definition. 有限集合 X 上の spin model とは、 $X \times X$ 上の複素数値関数 w_+, w_- で次の条件を満たすものである。

- (i) $w_+(x, y)w_-(y, x) = 1 \quad \forall x, y \in X.$
- (ii) $\sum_{z \in X} w_+(x, z)w_-(z, y) = \delta_{x, y}|X|.$
- (iii) 任意の $a, b, c \in X$ に対して、

$$\sum_x w_+(a, x)w_+(x, b)w_-(x, c) = \sqrt{|X|} w_+(a, b)w_-(b, c)w_-(a, c).$$

Theorem 2 (Jaeger [7]) $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2\})$ を *symmetric association scheme* とし、 $w_+ : (x, y) \mapsto t_i ((x, y) \in R_i)$, $w_- : (x, y) \mapsto t_i^{-1} ((x, y) \in R_i)$ を *spin model* とする。 $t_1 \neq t_2$ ならば、 $\mathcal{X}$ は *triply regular* である。

Proof.

$$W = \sum_{i=0}^d t_i A_i,$$

$$W^* = \sqrt{|X|} \sum_{i=0}^d t_i^{-1} E_i^*$$

とおくと、spin model の定義から $WW^*W = W^*WW^*$ がわかる。 $W^*WW^* \in T_0$ だから、 $WW^*W \in T_0$ となる。定義より、 $W = t_0 A_0 + t_1 A_1 + t_2 A_2$ は A_0, A_1, J の線形結合である。 Lemma 1 (i), (viii) によって、 $A_0 W^* W \in T_0$, $J W^* W \in T_0$ 。 仮定より $t_1 \neq t_2$ だから、 $A_1 W^* W \in T_0$ となる。同様に $A_1 W^* A_1 \in T_0$ 。さらに Lemma 1 (vii) によって、 $A_1 E_0^* A_1 \in T_0$ 、従って

$$t_1^{-1} A_1 E_1^* A_1 + t_2^{-1} A_1 E_2^* A_1 \in T_0.$$

一方

$$A_1 E_1^* A_1 + A_1 E_2^* A_1 = A_1^2 - A_1 E_0^* A_1 \in T_0.$$

ここで $t_1 \neq t_2$ より $A_1 E_1^* A_1 \in T_0$ となる。これは subconstituent が strongly regular であることを意味している。後は簡単な counting argument で証明は完結する。 $\square$

この講演をするにあたり多くの助言をいただいた綿谷安男氏、佐野隆志氏、吉田知行氏に深く感謝する。この研究集会の後、山上滋氏、幸崎秀樹氏に論文 [9] を解説していただいたことは大変参考になった。また、丹原大介氏からも多くの助言をいただいた。

References

- [1] E. Bannai, Association schemes and fusion algebras (an introduction), to appear in J. Algebraic Combinatorics.
- [2] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I: Association schemes, Benjamin/Cummings 1984.
- [3] P. Bantay, Orbifolds and Hopf algebras, Phys. Lett. B **245** (1990), 477–479.
- [4] P. Bantay, Orbifolds, Hopf algebras, and the moonshine, Lett. in Math. Phys. **22** (1991), 187–194.
- [5] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, and H. Verlinde, The operator algebra of orbifold models, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 485–526.
- [6] V. G. Drinfel'd, Quantum groups, in “Proc. Int. Congress of Mathematicians”, Berkley, California, 1986, Acad. Press, 798–820.
- [7] F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, Geom. Dedicata **44** (1992), 23–52.
- [8] Y. Kawada, Über den Dualitätssatz der Charaktere nichtcommutativer Gruppen, Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), **24** (1942), 97–109.
- [9] H. Kosaki and S. Yamagami, Irreducible bimodules associated with crossed product algebras, Internat. J. Math. **3** (1992), 661–676.
- [10] H. Kosaki, A. Munemasa and S. Yamagami, On fusion algebras associated with finite group actions, *in preparation*.
- [11] A. Munemasa, A formal approach to the fusion algebras for finite groups, preprint.
- [12] M. Wakui, Fusion algebras for orbifold models, preprint.
- [13] 吉田知行, 有限 G 集合のカテゴリースパン, 「代数的 K - 理論」研究集会報告集, 1982 年 12 月, 東京工業大学, 104–128.