

種数2の曲線の族の

第一種特異ファイバーについて

東大 理 上野 健爾

以下述べることは 浪川幸彦氏 (名大理) との 共同研究の一部である。詳細は いずれ 共著の論文として発表する予定である。

$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を 種数2の曲線の族とする。即ち $\mathcal{C}$ はそれぞれ複素次元 2, 1 の多様体, f の一般ファイバーは 種数2の非特異曲線とする。 df が零になる点全体の f による像は 従って有限個である。これを $P_1, \dots, P_\ell$ としよう。点 P_i を中心とする局所座標を T_i とすると, $T_i(f) = 0$ を $\mathcal{C}$ の因子を表わす。この因子のことを, この曲線の族の特異ファイバー (P_i の上の) と呼ぶ。

特異ファイバーを

$$(\mathcal{H}) = \sum_{i=1}^m n_i (\mathcal{H})_i$$

と書くと,

$$\sum_{i=1}^m n_i (\mathcal{H})_i \cdot (\mathcal{H})_j = 0 \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m n_i (H_i) \cdot K = 2\pi(H) - 2 = 2$$

なる関係がある。但し K は C の標準因子を表わす。 $m \geq 2$ として、特異ファイバーは第一種例外曲線 (ie 既約な曲線 Γ で $\Gamma^2 = -1$, $\pi(\Gamma) = 0$ なるもの) を含まないとしておくと常に $(H_i) \cdot K \geq 0$ が成立つ。この事実を使って上の2個の関係式から (H) の形を定めることは飯高, Oggy によって成された。([2])

その分類は大きく分けて約50種類の類に分けられたが、そこに現われる (H) が実際に存在するかどうか分かった。

以下では特殊な場合にその構成法を与える。

問題は C に関して局所的であるので $C = \{z \mid |z| < 1\}$ と仮定しておく。すると $z=0$ のまわりを正の向きに一周する道に沿って $H^1(C_0, \mathbb{Z})$ $C_0 = \pi^{-1}(0)$ の変換 $M (= \text{Picard-Lefschetz 変換})$ が定まる。 M は $Sp(2, \mathbb{Z})$ の元としておいてよい。更に $C = \{0\}$ 上の曲線の Jacobi 多様体を考えることによって $C = \{0\}$ より 種数2の Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_2$ への多価解析写像ができる。この解析写像が $C - l$ (l は 0 から出た半直線) 内で $z \rightarrow 0$ とした時、 $\mathfrak{H}_2$ の内点に極限をもつ場合を考える。

(実はこの条件は M の位数が有限と同値である。) この極限値を τ_0 としよう。すると $M \cdot \tau_0 = \tau_0$ なる関係がなければならぬ。かかる (M, τ_0) は $Sp(2, \mathbb{Z})$ 共役で 上野([3])

[4] の appendix) で完全に求めている。

さて 上の T_0 が 曲線の Jacobi 多様体に対応する時, 対応する特異ファイバーを第一種と呼ぶことにする。

T_0 が Jacobi 多様体に対応しない時 (従って 楕円直線) に対応している時) 特異ファイバーを第二種と呼ぶ。

第一種特異ファイバーの時 T_0 に対応する Jacobi 多様体は PL 変換 M に対応した自己同型をもつ, 従って対応する曲線も自己同型をもつ。種数 2 の曲線の自己同型は Bolza [1] によって求められており, 自明な involution 以外の自己同型をもつ曲線もすべて定まっている。

命題 1 (Bolza) 自明な involution 以外に自己同型をもつ種数 2 の曲線は次の通りである。

曲線	曲線の Jacobi 多様体に対応する Θ_2 の元
$y^2 = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^2 + 1$	$\begin{pmatrix} z_1 & \frac{1}{z_1} \\ \frac{1}{z_1} & z_2 \end{pmatrix}$
$y^2 = x^5 + 1$	$\begin{pmatrix} \omega & \omega + \omega^{-2} \\ \omega + \omega^{-2} & -\omega^{-1} \end{pmatrix}$
$y^2 = x(x^4 + \alpha x^2 + 1)$	$\begin{pmatrix} z & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & z \end{pmatrix}$
$y^2 = x^6 + \alpha x^3 + 1$	$\begin{pmatrix} z & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & z \end{pmatrix}$

$$y^2 = x^6 + 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y^2 = x(x^4 + 1)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \frac{1}{2}(\gamma-1) \\ \frac{1}{2}(\gamma-1) & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1 + 2\sqrt{-2}}{3}.$$

命題 2 第二種特異ファイバーに対応する τ_0 は

$Sp(2, \mathbb{Z})$ によって次の点と同値になる。

$$\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad p = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{0}{\sqrt{-1}} \end{pmatrix}.$$

これらに対応するアーベル曲面は Jacobi 多様体ではない。
(勿論 $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ の時 z に特別な値をとると Jacobi 多様体になる場合もあるがその時は $Sp(2, \mathbb{Z})$ によって命題 1 の点へうつされてしまう。)

特異ファイバーを構成するのは次の命題による

命題 3 特異ファイバーは第一種又は第二種とする。

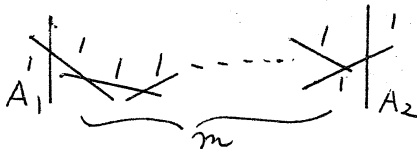
対応する PL 変換 M の位数を m とする。 $C = \{z \mid |z| < 1\}$ の

原点上の m 重分岐被覆 $\{\tau \mid |\tau| < 1\} = \widetilde{C}$

$$\begin{array}{ccc} g: & \widetilde{C} & \longrightarrow C \\ & \downarrow \tau & \\ & \tau & \longrightarrow \tau^m \end{array}$$

に対して $f: C \rightarrow C$ の $\widehat{C}$ への引上げを $\widehat{f}: \widehat{C} \rightarrow \widehat{C}$ とする。 $\widehat{C}$ の非特異モデルで第一種例外曲線をもたないものを $\widetilde{C}$ とすると $\widehat{f}: \widehat{C} \rightarrow \widetilde{C}$ の原点上のファイバーは

第一種 種数2の曲線

第二種  $m \geq 0$

となる。^{*} 但し A_1, A_2 は elliptic curve で $A_1 \times A_2$ は T_0 に対応し、他は、自交切数 -2 の P' を表す。また $\widetilde{C}$ の自己同型

$$\tau \longrightarrow e^{\frac{2\pi i}{m}} \tau$$

は $\widehat{C}$ の自己同型 R に引上げられ群 $G = \{1, R, R^2, \dots, R^{m-1}\}$

は $\widehat{C}$ は properly discontinuous に作用する。この時 商空間

$\widehat{C}/G$ の非特異モデルは C と一致する。また第一種特異ファイバーの時 G の $\widehat{C}$ の原点上のファイバーへの制限は 曲線の自明でない自己同型群を引起す。

この命題は構成問題を考える上だけでなく、モノドロミーが自明であっても特異ファイバーが現われること、及びその特異ファイバーは自然数をパラメーターとしてもっていることを示している点が重要である。

*) 但し $C \rightarrow C$ の原点上の特異ファイバーは必要なら何度か blow up してすべて normal crossing であると仮定しておく。

さて上の Balza の結果を使って 第一種特異ファイバーは
命題3の $\widetilde{C}$ 及び G を見出すことによって構成される。

(第二種の場合は テータ函数の理論と使えば 対応した議論が
可能である。) 以下 結果のみ 記しておく。

モノドロミー*)
(PL 変換)

特異ファイバー **)

I ② $-I_4$

II ① b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

II ② d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

II ③ c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

II ④ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

IV ① c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

IV ② d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*) 記号は 上野 [3] にある行列を表わしている。

**) 数字は Ogy [2] の分類番号。A, B, D も Ogy の記号で A: elliptic curve B: 自交点数 -3 の P^1 C: 自交点数 -4 の P^1 を表す。

$$IV \oplus a) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 6 \\ \hline 2B \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad 19$$

$$IV \oplus b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B \quad B \\ \text{triple contact} \end{array} \quad 34$$

$$IV \oplus a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} D \\ \hline \end{array} \quad 8$$

$$IV \oplus b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B \quad B \\ \hline \end{array} \quad 36$$

$$IV \oplus c) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 5 \\ \hline 2B \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad 21$$

$$IV \oplus d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 5 \\ \hline 3 \quad 3 \quad 4 \\ B \quad B \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad 44$$

$$IV \oplus a) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2B \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad 16$$

$$IV \oplus b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (2,5) \text{ cusp} \end{array}$$

$$\text{IV } \odot \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|c|c|c} & & 10 & \\ \hline 2B & 5 & 9 & 8 \\ & & 7 & 6 \\ & & 5 & 4 \\ & & 3 & 2 \\ & & 1 & \end{array} \quad 20$$

$$\text{IV } \odot \text{ d) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|c|c|c} & & 10 & \\ \hline D & 4 & 7 & 5 \\ & & 8 & 6 \\ & & 4 & 2 \end{array} \quad 17$$

— 文 献 —

[1] O. Bolza, On Binary sextics with linear transformations into themselves. Amer. J. Math 10(1888) PP 47~70

[2] A. P. Egg, On pencils of curves of genus two. Topology 5 (1966) PP 355~362.

[3] K. Ueno, On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2, I. Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA, vol 18 (1971) PP 37~95

[4] K. Ueno, ————— II, (to appear)