

氏 名	お ぐに しん いち 尾 國 新 一
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3185 号
学位授与の日付	平 成 19 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	The group homology and an algebraic version of the zero-in-the-spectrum conjecture (群ホモロジーと代数版零スペクトラム予想)
論文調査委員	(主 査) 助教授 加 藤 毅 教 授 深 谷 賢 治 教 授 中 島 啓

論 文 内 容 の 要 旨

離散群 G に対して、その分類空間を BG としその普遍被覆空間を EG とする。

BG が閉多様体で実現できる場合、 EG 上の L^2 微分形式全体に作用するラプラス作用素のスペクトラムが、少なくともどこか一つの次数ではゼロを含むであろうということがグロモフによって予想されていた。それは微分トポロジーに應用を持つ別の予想、バウムコンヌ予想から従うことが分かっている。グロモフの予想は多くの群で正しいことがわかっており、現在までのところ反例は見つかっていない。

それは BG が閉多様体で実現できるという仮定のもとでの予想であるが、一方で BG が無限次元 CW 複体になってしまうような例はたくさん存在し、そのような群についてはなにもいっていなかった。近年リュックが、グロモフの予想を局所係数群ホモロジーが消えるという同値な条件に書き換えた。その条件では BG が閉多様体である必要はなく、その新たな予想はすべての群について意味があり、それを代数版ゼロスペクトル予想と呼ぶ。

この代数版の予想では、これまで無限生成無限表示群の場合のみ反例が知られていた。尾國は一般に離散群から別の離散群を作るアルゴリズムを構成し、それを応用して有限生成有限表示群で反例を与えた。

その構成は、3段階に分かれる。まず群 G に対して、その無限直和から、その上のシフトを用いて半直積群を作り、さらに HNN 拡大をして得られたもの G' がもとめるものである。

主結果は、 G がアメナブルでないとき、対応する G' の局所係数群ホモロジーは消えるというものである。特に、それら G' は代数版ゼロスペクトル予想の反例を与える。有限表示群の中で、アメナブルでない群は非常にたくさんあることが知られており、これによりその予想の反例は無数個存在することが分かった。

さらに、 G が自由群であるとき、対応する G' の群ホモロジーの計算を行った。特に、3以上の各次数 p で、 p 次の群ホモロジーは、常に $\mathbb{Z}$ の無限直和を含むことが示された。特に、その場合の群ホモロジー次元は無限大である。群ホモロジー次元が無限大であるような有限表示群の例は、トンプソン群と呼ばれるものがそうであるが、これまでほかにはあまり知られていなかった。

BG が閉多様体で実現できるとき、バウムコンヌ予想からグロモフの予想が従うが、一般の場合バウムコンヌ予想から代数版ゼロスペクトル予想が従うか知られていなかった。これに関して、尾國は、 G がハーゲラップの性質を満たすとき、対応する G' はバウムコンヌ予想を満たすことを示した。一方で、アメナブル群や自由群はハーゲラップの性質を満たすことが知られている。特に、自由群 G の場合、対応する G' はバウムコンヌ予想を満たすが、代数版ゼロスペクトル予想は満たさないことが分かる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

このように、尾國は幾何学的群論の分野において、群のホモロジーの研究で非常に優れた結果を残した。

X を G が自由に作用する CW 複体とするとき、セル分割を用いて CW 鎖複体が構成され、その上に作用する組み合わせ論的なラプラス作用素が得られる。 X が非コンパクトであるとき、それらはゼロの近傍で連続スペクトルをもつことがあり、その G -同変密度関数の指数がノビコフシュービン不変量である。すなわち、 t が 0 に近いとき、その密度関数の t で値が漸近的に $\exp(-at)$ であれば、そのノビコフシュービン不変量は a である。ベッチ数はスペクトルのゼロでの値のみを対象としているが、このようにその不変量はゼロの近傍まで見ているという点で非常に深いといえる。

ノビコフシュービン不変量はその値を無限大にとる例が知られていた。尾國はそのような群を扱うため、第 2 ノビコフシュービン不変量を新たに導入し、1 次の場合に具体例で計算を行った。まず、 G が有限群かまたはアメナブルでない有限生成群であることと、第 2 ノビコフシュービン不変量が無限大であることは同値であることを示した。さらに、 G が有限群でないアメナブル有限生成群であるとき、第 2 ノビコフシュービン不変量の計算を、ランダムウォークの推移確率を用いて、その漸近挙動の指数から求めることに成功した。このように、自分で定義したものが実際に新しい不変量であることを示したことは高く評価できる。

以上の理由により、大学院在学 5 年未満であるが、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また論文内容とそれに関連した諮問の結果合格と認めた。