

Foliation 上の Dynamical System

東大 理 田村 一郎
(Itiro TAMURA)

多様体 M に零点のない C^r ベクトル場 X ($r \geq 1$) が与えられたとき, X の軌道は M の 1 次元 C^r 葉層 $\mathcal{F}$ をなす。 M が閉じた 2 次元多様体ならば M はトーラス T^2 であって, この場合の $\mathcal{F}$ の構造は具体的に知られている。しかし, M が 3 次元以上の場合には, 閉多様体であっても, $\mathcal{F}$ しかってそれを定める X を具体性をもつてとらえることはむずかしい。

以下, M^3 を閉じた 3 次元 C^∞ 多様体とし, X を M^3 上の零点のない C^r ベクトル場 ($r \geq 2$), $\mathcal{F}$ を X の軌道 γ なす 1 次元 C^r 葉層とする。

X を M^3 上に幾何学的な議論が行える形で与えるには, どのような方法がありうるであろうか? 最も簡単なものとして, M^3 が閉曲面上の S^1 バンドルの全空間であって, $\mathcal{F}$ の葉がファイバーの場合がある。このように $\mathcal{F}$ そのものがはつきりと定められているときに, Milnor-Wood [1] は

(1)

M^3 の余次元 1 の C^r 葉層 $\mathcal{F}'$ の存在を研究している。一般に、 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ を M^3 の 1 次元および余次元 1 の C^r 葉層とあるとき、 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ が横断的であるとは、 M^3 の各点 x において x を通る $\mathcal{F}$ の葉と $\mathcal{F}'$ の葉の x における接ベクトルによって、 x における M^3 の接ベクトル空間が生成されることである。閉曲面上の S^1 バンドルの場合、 $\mathcal{F}'$ の存在は閉曲面と S^1 バンドルの Euler 数によって定められる。このことを逆に見れば $\mathcal{F}'$ の存在がバンドルの Euler 数を規制しているということである。

バンドルの Euler 類はもつとも古典的な特性類として極めて重要な意味をもつ。 M^3 における C^r 葉層 $\mathcal{F}$ を上述の S^1 バンドルのファイバーの集合の一般化と考えると、 $\mathcal{F}$ に対して Euler 類を拡張することが出来ればそれは数学的内容のあるものになるであろう。しかし、一般の $\mathcal{F}$ には底空間というものがうまく定義できないから、 S^1 バンドルにおけるように切断を構成するときの障害類を考えるのは正しいとは思えない。 $\mathcal{F}$ 全体の状態を反映させるのには、切断の代りに横断的な余次元 1 の C^r 葉層をとるのが適切であり自然である。

ここで Hopf バンドルが定める S^2 の楕円曲線によってえられる C^r 葉層に横断的な余次元 1 の葉層として Reeb-葉層がえられることを注意しよう。それらの理論の出发点となった

この二つの概念がここで結びつけられるのは興味あることである。

S^1 バンドルのファイバーとして M^3 が与えられるというのは、 M^3 に相互の関係のはっきりした1次元部分多様体の族があって、ここで M^3 が定められるということ、このようなもののもう一つの例として閉曲面上の Seifert バンドルがあり、この場合についても Eisenbud-Hirsch-Neumann [2] によって横断的葉層の存在が研究されている。

横断的葉層の存在問題について精密な議論を行うためには、1次元 C^r 葉層 M の構造に関してあらかじめ知識が与えられていることが必要である。

ここでもう1次元自由度を上げて、 M^3 に相互の関係のはっきりした2次元部分多様体の族があって、1次元 C^r 葉層 M の一つの葉はその一つの部分多様体上にあるというような場合を考えることができる。このような2次元部分多様体の族の例として、 S^1 上のトーラス・バンドルと M^3 の余次元1の C^r 葉層とがある。

1982年7月に京大数理研で行われた研究会「力学系の理論とその周辺」での講演「Foliation上の non-singular flow」において、ソリッド・トーラス $S^1 \times D^2$ の Reeb-葉層として2次元部分多様体の族が与えられているとき、一つ

の葉がその一つの部分多様体上にあるような1次元 C^r 葉層 $\mathcal{F}$ については、横断的な余次元1の C^r 葉層をもつ場合とまたない場合があることを述べた。

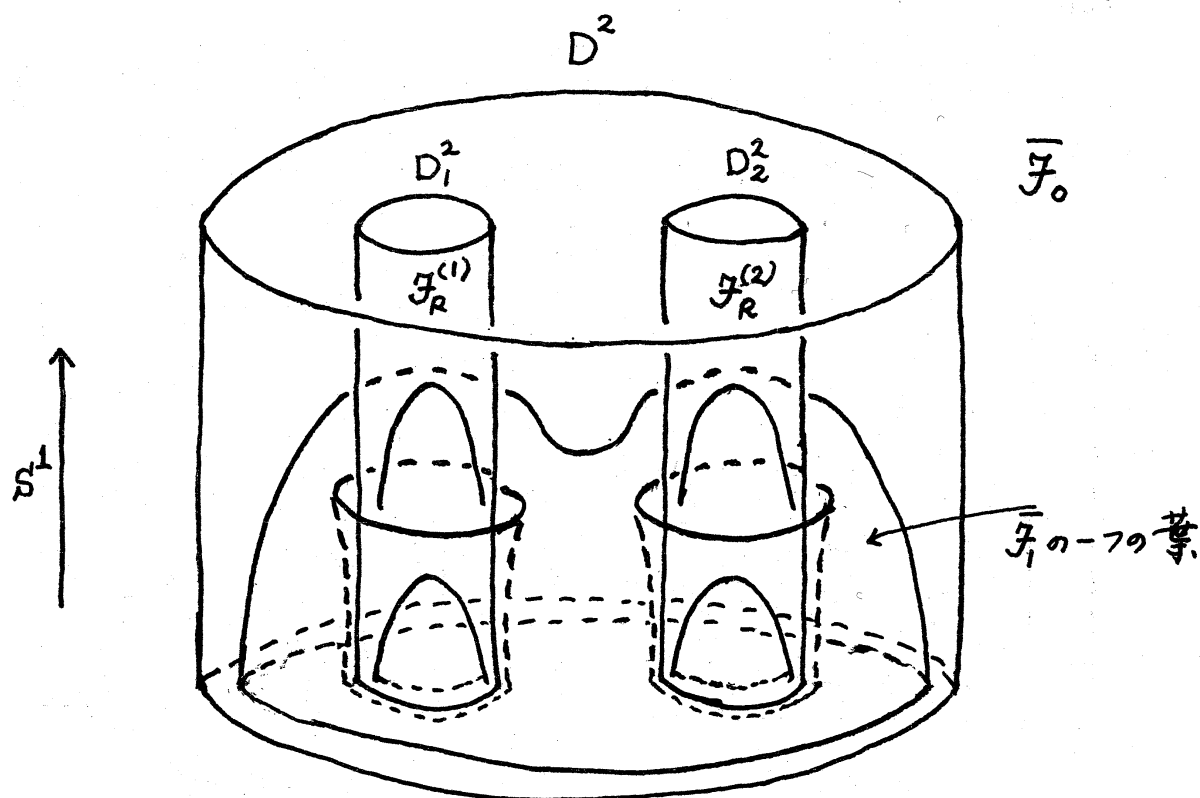
ここでは、3次元球面 S^3 において2次元部分多様体の族として次のような余次元1の C^∞ 葉層 $\mathcal{F}$ をとることにする。

以下、Tamura-Sato [3] の用語を使う。

S^1 に向きを定めておく。 D_1^2, D_2^2 を $\text{Int } D^2$ の中に埋め込まれた二つの2次元球体で、 $D_1^2 \cap D_2^2 = \emptyset$ であるとする。 $S^1 \times D_1^2, S^1 \times D_2^2$ それぞれに正 Reeb 葉層 $\mathcal{F}_R^{(1)}, \mathcal{F}_R^{(2)}$ を考える。また、 $S^1 \times (D^2 - \text{Int } D_1^2 - \text{Int } D_2^2)$ では、 $\{x\} \times (D^2 - \text{Int } D_1^2 - \text{Int } D_2^2)$ ($x \in S^1$) に対して、それらの $S^1 \times \partial D_1^2, S^1 \times \partial D_2^2$ および $S^1 \times \partial D^2$ の近傍に含まれる部分を、 S^1 の負の方向の回転流により流すことによってえられる余次元1の C^∞ 葉層 $\mathcal{F}_1$ を考える。 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_R^{(1)}, \mathcal{F}_R^{(2)}$ を含せたものとしてえられる $S^1 \times D^2$ の余次元1の C^∞ 葉層を $\overline{\mathcal{F}}$ とする(第1図)。

$S^3 = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)$ として、 $D^2 \times S^1$ では Reeb 葉層 $\mathcal{F}_R$ 、 $S^1 \times D^2$ では $\overline{\mathcal{F}}$ となる S^3 の余次元1の C^∞ 葉層を $\mathcal{F}$ とする。 $\mathcal{F}$ は横断的に向きづけ可能である。

$\mathcal{F}$ の接ベクトル全体 $T(\mathcal{F})$ 、すなわち S^3 の接ベクトルで $\mathcal{F}$ の葉に接するもの全体は S^3 上の R^2 バンドル $\tau(\mathcal{F})$ の全空間であって、 $\tau(\mathcal{F})$ は自明なバンドルだから $T(\mathcal{F})$



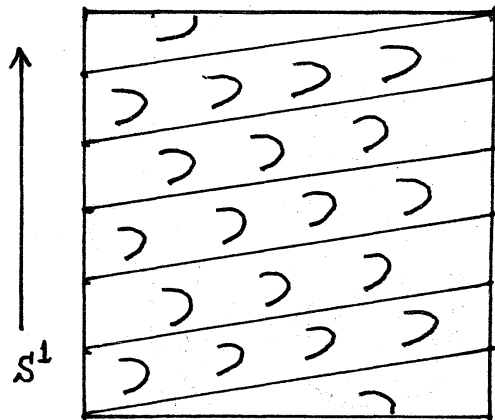
第1図

$= S^3 \times \mathbb{R}^2$ である。したがって $\overline{\mathcal{F}}$ に接する S^3 上の零点のない C^∞ ベクトル場 X が存在する。 X の軌道はなす1次元 C^∞ 葉層を $\mathcal{F}$ とする。

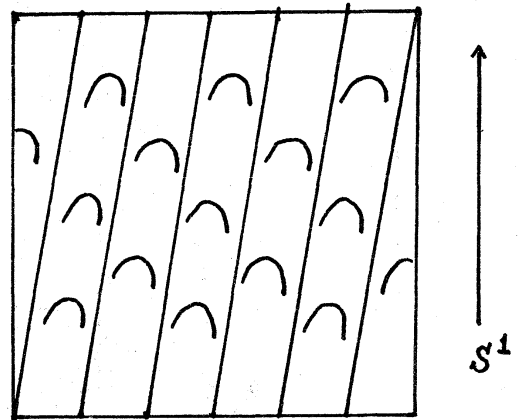
トーラスの1次元 C^∞ 葉層 $\mathcal{F}|(\partial D^2 \times S^1)$ は必ずコンパクトな葉をもち、その一つを L_{comp} とするとき、 L_{comp} の経度数は1である [3, Proposition 2]。一方、 $\mathcal{F}|(S^1 \times D^2)$ を考えることにより、 $\mathcal{F}|(S^1 \times \partial D^2)$ に関して L_{comp} の経度数が3であることが [3, Proposition 2] の証明と同様に示される。

(5)

以上のことから, $\mathcal{F}|(\partial D^2 \times S^1)$ と $\mathcal{F}|(S^1 \times \partial D^2)$ として考えるもつとも簡単な場合は, 次図である。それぞれ二つの正

 $\partial D^2 \times S^1$

(a)

 $S^1 \times \partial D^2$

(b)

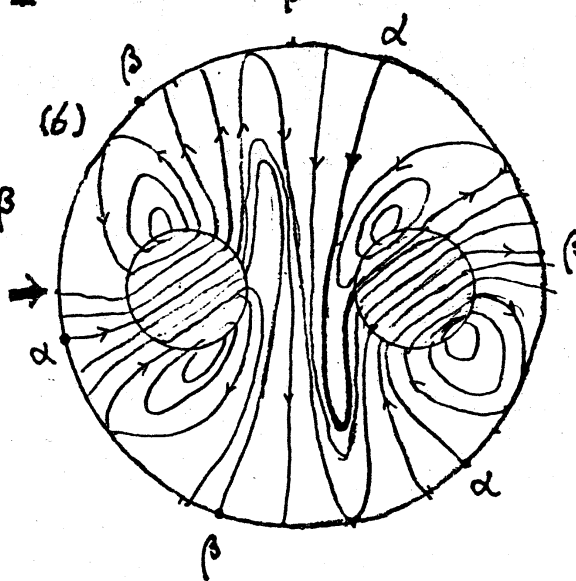
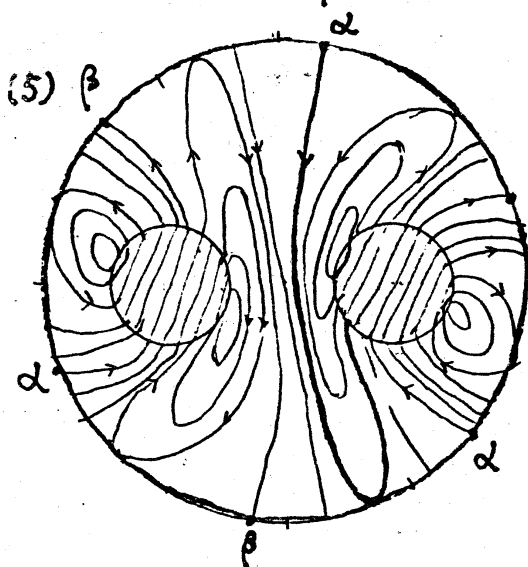
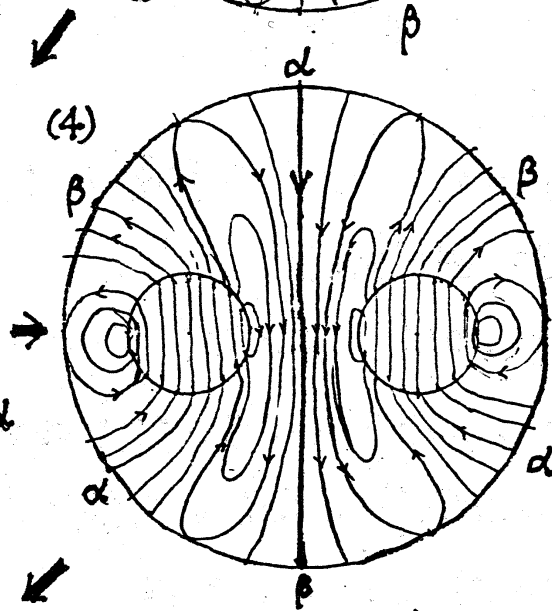
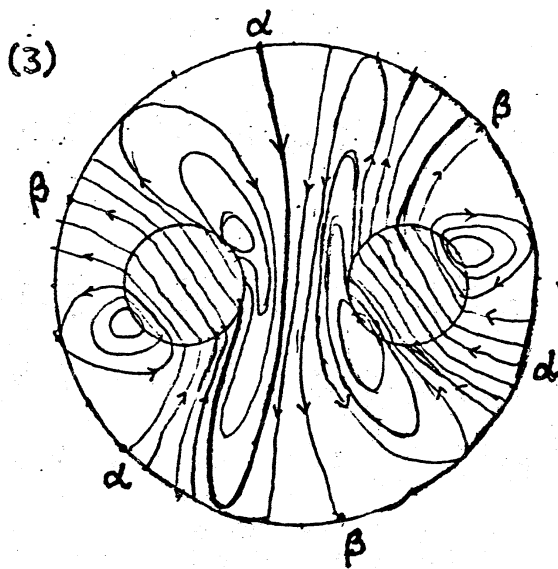
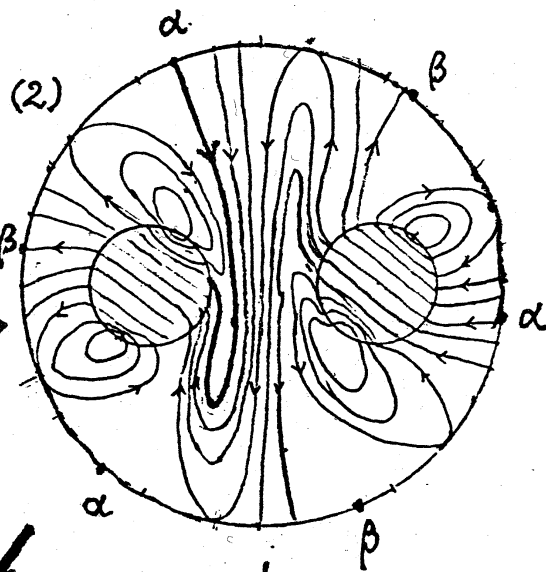
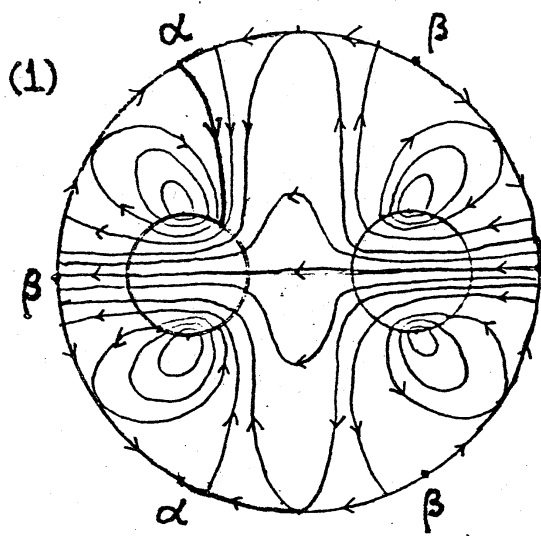
第2図

Reeb 葉層からなっている。コンパクトな葉は二つである。

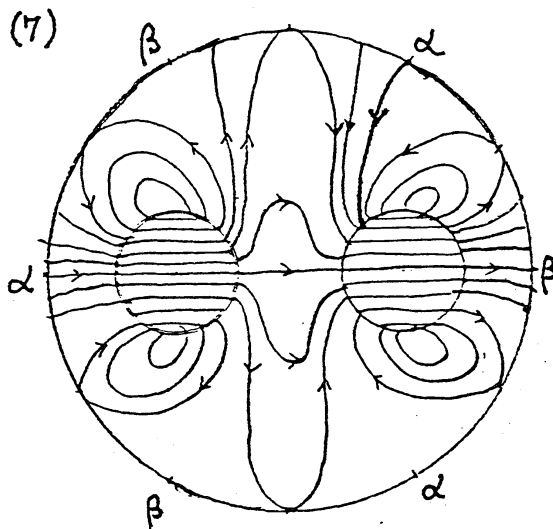
$\mathcal{F}|(\partial D^2 \times S^1)$ が第2図 (a) となっているような $\mathcal{F}|(D^2 \times S^1)$ は確かに存在する ([3] 参照)。一方, $\mathcal{F}|(S^1 \times \partial D^2)$ が第2図 (b) となっているような $\mathcal{F}|(S^1 \times D^2)$ が存在することを次にみよう。

x_0 を S^1 の一点とし, $\{x_0\} \times D^2$ から回転流によってえられる $\overline{\mathcal{F}}_1$, $\mathcal{F}_R^{(1)}$ および $\mathcal{F}_R^{(2)}$ の葉を $\overline{L}$, $L^{(1)}$ および $L^{(2)}$ とする。 $\overline{L}$, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ 上に頁(7) 第3図 (1) の曲線が与

(b)



(7)



第3図

L_{comp} を表わすのは α とし
てよく, (1) ~ (7) でそれは
 60° 回転している. この回転を
つづけて 360° まで回転しても
とにもとる.

えらぶ 1次元 C^∞ 葉層 $\hat{\Sigma}$ をとる. 第3図は S^1 の上方か
ら見た図である.

$S^1 \times \partial D_1^2$, $S^1 \times \partial D_2^2$ にはそれぞれ二つの正 Reeb 葉層を
もちコンパクトな葉の経度数が1, 緯度数 (コンパクトな葉
の $\{*\} \times \partial D_i^2$ に関する字像度の絶対値) が3のものをとる
(第3図 (1) ~ (7) 参照). この1次元 C^∞ 葉層を $S^1 \times D_1^2$
と $S^1 \times D_2^2$ に葉が $\bar{\Sigma}_0|(S^1 \times D_1^2)$ と $\bar{\Sigma}_0|(S^1 \times D_2^2)$ の葉に含
まれるように拡張することができる ([3] 参照). 次に, $\{*\}$
 $\times D^2$ において, $\{*\} \times \partial D^2$ と $\{*\} \times \partial D_1^2$ とを結ぶ線分 I_1
と, $\{*\} \times \partial D^2$ と $\{*\} \times \partial D_2^2$ とを結ぶ線分 I_2 を, $\{*\} \times (D^2$
 $- \text{Int } D_1^2 - \text{Int } D_2^2)$ の中で互いに交わらないようにとる. S^1
 $\times (D^2 - \text{Int } D_1^2 - \text{Int } D_2^2)$ を $S^1 \times I_1$ と $S^1 \times I_2$ とで切り開
き, さらにそれを $\bar{L}$ を $S^1 \times \partial D^2$, $S^1 \times \partial D_1^2$, $S^1 \times \partial D_2^2$ の τ
(8)

命のさの近傍で切り捨ててそれにあうため $\{*\} \times D^2$ の部分集合をつけ加えてえらる2次元球体 D^2 で切り開く。このようにしてえらる D^3 と同相な角のある3次元多様体を A とする(第4図)。

$\pi(\tilde{A})$ を A に制限したバンドルは自明であり,

∂A 上には $\tilde{A}|_{\bar{L}}$

および $\tilde{A}|(S^1 \times \partial D^2)$

と上述の $S^1 \times \partial D^2_i$ ($i=1,2$)

の1次元 C^∞ 葉房からき

まる零次元のないうへりトル

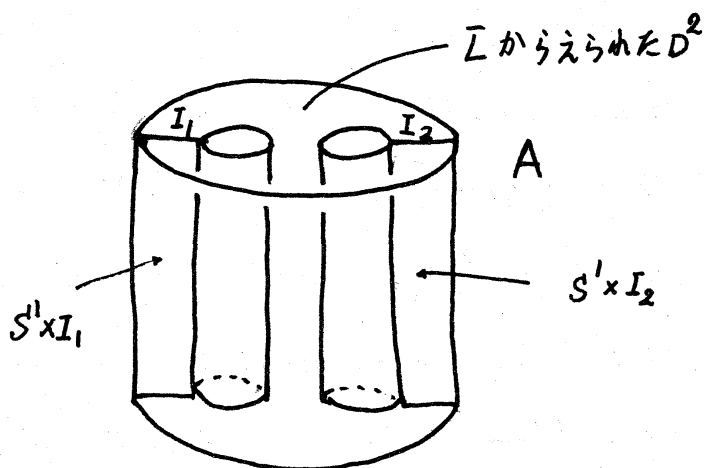
場がある。よく知られているホモトピー群に関する結果

$\pi_2(S^1)=0$ によってこのうへりトル場は A に拡張され、その軌道のつくるものとして、 $S^1 \times (D^2 - \text{Int} D^2_1 - \text{Int} D^2_2)$ の1次元 C^∞ 葉房をとると、これは $\tilde{A}|(S^1 \times \partial D^2)$ と拡張したもので、これによって求まる $S^1 \times D^2$ の1次元 C^∞ 葉房がえられた。

このように存在が示されたが、実際にそのようなものを構成してみせたのが第3図である。これは矢野公一君の協力によるものである。横断葉房の存在に関して次の定理が成り立つ。

定理1. 第3図で与えらる、1次元 C^∞ 葉房が $\tilde{A}|(S^1 \times D^2)$ となるような、 S^3 の1次元 C^∞ 葉房は横断的な

(9)



第4図

余次元 1 の C^r -葉層 ($r \geq 2$) をもたない。

1次元葉層に対して横断的な余次元 1 の葉層の非存在というのには次の定理が有用である。

定理 2 M^3 をコンパクトな次元 C^∞ 多様体とし, $X = \{X(x); x \in M^3\}$ を M^3 上の零矢をもたない C^r ベクトル場とする ($r \geq 2$)。ただし, $\partial M^3 \neq \emptyset$ のときは X は ∂M^3 の各点で ∂M^3 に接しているものとする。 M^3 に Riemann 計量をきめておく。 $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとき, M^3 の閉曲線 $f: S^1 \rightarrow M^3$ で X の ε 近似軌道 (すなわち $f(S^1)$ の各点 x で $f(S^1)$ の零でない接ベクトル v_x と $X(x)$ とが

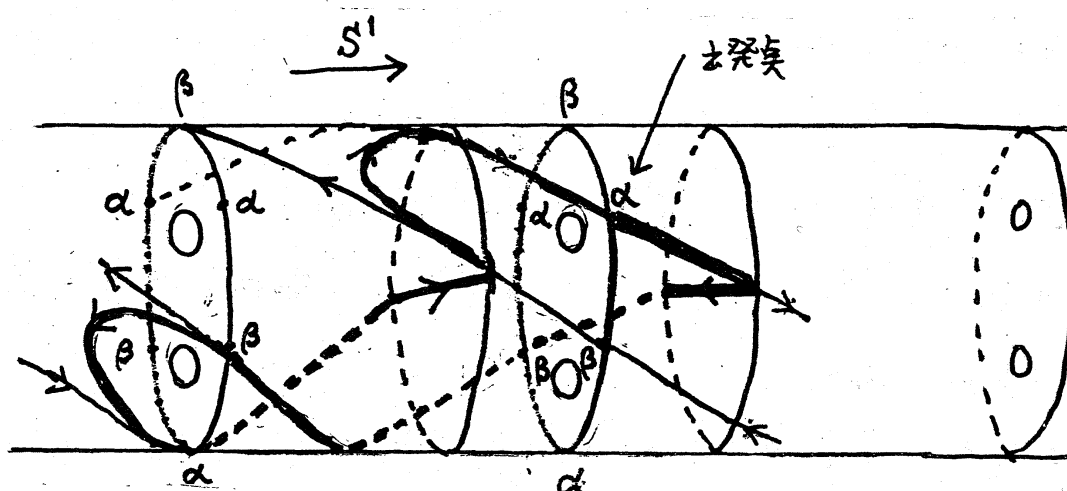
$$(v_x, X(x)) / |v_x| \cdot |X(x)| > 1 - \varepsilon$$

となっている f) で X の閉軌道全体を C_r ($r \in P$) とするとき, f は $M^3 - \bigcup_{r \in P} C_r$ で inessential であるものが一つに存在するとき, X の軌道のなす 1次元 C^r -葉層は横断的な余次元 1 の C^r -葉層をもたない。

(略証) $f(S^1)$ を境界にもつ 2次元球体 D^2 を $M^3 - \bigcup_{r \in P} C_r$ にはめ込む。 f が横断的な余次元 1 C^r -葉層 f' をもつとすると, f' の葉は D^2 に特異点のある 1次元葉層と交わりとしてきめるが, Novikov が示したように, そのうちの消失サイクルは Reeb 葉層の存在を保証し, Reeb 葉層に横断的であるものとして X はそこで閉軌道をもつことになり矛盾 (10)

がある。

(定理1の証明) ε 近似軌道を第5図の太線のようにとると、これは定理2の性質をもつものである。(第3図も参照)



第5図

第5図は第3図を横にして、 $S' \times D^2$ の被覆空間をとったものである。

ソリッド・トーラス $S' \times D^2$ の余次元1の C^∞ 葉層 $\mathcal{F}$ 上の零点のない C^r ベクトル場 X の軌道としてえられた $S' \times D^2$ の1次元 C^r 葉層 $\mathcal{F}$ のうち第3図で示したものは、もっとも簡単なものである。一般の $\mathcal{F}$ について、その複雑さの度合は $\mathcal{F}|(S' \times \partial D^2)$, $\mathcal{F}|(S' \times \partial D_1^2)$, $\mathcal{F}|(S' \times \partial D_2^2)$ に含まれる正 Reeb 葉層, 負 Reeb 葉層の数で表わされる。この数に関する帰納法によって、一般の $\mathcal{F}$ についても定理2を用いて横

(11)

断的葉層の非存在を証明することができると思う。実は、どのような $\bar{M}$ も横断的葉層をもたないことが、Nishimori [4] によって、 $\bar{M}$ の横断的葉層の分類定理を用いる方法で証明されている ([3, Theorem 7] 参照)。ここで述べたのは、 $\bar{M}$ 上の零点をもたない C^r ベクトル場が Morse-Smale の流れに近いものであって閉軌道のある場所がきまつていて、閉軌道を ε 近似の意味でつなぐ軌道の状況が特徴的であることを云っている。このことから一つの考察として横断的葉層の非存在をいうのである。

ところで、 $\bar{M}$ を $\bar{M}$ の一つの葉に制限したものは、 $\mathbb{R}^3$ から二点を除いた非コンパクト多様体の 1 次元葉層で、無限遠で T^2 上の 1 次元葉層に "収束" するものである。このような 1 次元葉層を概周期的な末端をもつ 1 次元葉層と云うことにする。これはまた、コンパクト化可能な 1 次元葉層と云ってもいい。次の図はそのような 1 次元葉層の分岐あるいはベクトル場の分岐の状態を示すものと見ることができる。2 次元多様体上の零点のないベクトル場の分岐について論ずるのは数学的に興味のあることと思う。

以上のことについては、近いうちに論文としてまとめる予定である。

文献

- [1] J. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, *Comm. Math. Helv.*, 46 (1971), 257-273.
- [2] D. Eisenbud, U. Hirsch, W. Neumann, Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphism of the circle, *Comm. Math. Helv.*, 56 (1981), 638-660.
- [3] I. Tamura, A. Sato, On transverse foliations, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 54 (1981), 5-35.
- [4] T. Nishimori, Existence problem of transverse foliations for some foliated 3-manifolds, *Tōhoku Math. Jour.*, 34 (1982), 179-238.