

Sequential order of product spaces

愛媛大学理学部 野倉 嗣紀 (Tsugunori Nogura)

位相空間 X に対し, sequential order $so(X)$ が次のように定義される。

$$so(X) = \min \{ \alpha \in \omega_1 + 1 : \bar{A} = [A]_\alpha \text{ for every } A \subset X \}$$

ここで $\bar{A}$ は集合 A の閉包, $[A]_\alpha$ は次のように帰納的に定義される。 $[A]_0 = A$, $[A]_1 = \{x \in X : A \text{ の点列で } x \text{ に収束するものがある}\}$ 。 $[A]_{\alpha+1} = [[A]_\alpha]_1$, α が極限順序数の場合は $[A]_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} [A]_\beta$ 。

次の van Douwen-Tanaka [2], [5] の定理が示すように, sequential 空間の積は sequential になり難いことがわかる。

Theorem (van Douwen-Tanaka). S_ω を sequential fan とする。

$S_\omega \times X$ が sequential になる必要十分条件は X が locally countably compact sequential なことである。

$\Delta_0(X)$ は次のようにすれば、一般の位相空間 X に対しても、定義される。 $S[X]$ で X に次のような新しい位相を導入したものを表すことにする: $A \subset X$ が $S[X]$ で閉集合とは、 X の任意の compact metric subset K に対し $A \cap K$ が K で閉集合。

このとき新しい位相 $S[X]$ は sequential になる。そこで

$$\Delta_0(X) = \Delta_0(S[X])$$

で定義する。

この小論では sequential space (又は特別な場合として、Fréchet space) X, Y に対し $\Delta_0(X), \Delta_0(Y)$ と $\Delta_0(X \times Y)$ の関係を検べる。特に $\Delta_0(X \times Y) \leq \Delta_0(X) + \Delta_0(Y)$ が成立するとき product theorem が成立する。という。

§1. sequential order に関する product theorem

Theorem 1.1. X が sequential space, Y は regular locally countably compact sequential space. そのとき $X \times Y$ は sequential になり、更に product theorem が成立する。

X が sequential, Y が $\aleph_1$ -可算空間としても $X \times Y$ が sequential とは限らないが 次の product theorem が成立する。

Theorem 1.2. X が sequential space, Y が ω -可算空間とする.

そのとき $\Delta_0(S[X \times Y]) \leq \Delta_0(X) + 1$.

X の部分集合の collection $\mathcal{K}$ が K -network とは X の compact 部分集合 K と開集合 $U \supset K$ に対し $\mathcal{K}$ の有限部分集合 $\mathcal{K}_K$ で $K \subset \bigcup \mathcal{K}_K \subset U$ となるものがとれる。

Theorem 1.3. X, Y を point-countable K -network を持つ Fréchet 空間とする。そのとき $X \times Y$ は sequential ならば product theorem が成立する。つまり $\Delta_0(X \times Y) \leq 2$ 。

上の定理で $X \times Y$ が sequential であるという仮定の代わりに $\Delta_0(S[X \times Y]) \leq 2$ が成立することが望ましいが、次のような example を構成できる。

Example 1.4 point-countable K -network を持つ Fréchet 空間 X, Y で $\Delta_0(S[X \times Y]) = 3$ となるものがある。

§2. Fréchet 空間 X と Y で $\Delta_0(X \times Y) = \alpha$ となる例

Lemma 2.1 (CH) X を可算 k_ω -space とする. X に もとの位相より弱い位相 τ_1 と τ_2 が導入され

(1) X は $(X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$ に closed k 埋め込める.

(2) $(X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$ は sequential

とできる.

この Lemma より Fréchet 空間 X, Y で $X \times Y$ は sequential. $\Delta_0(X \times Y) \geq \alpha$. となるものが構成できる. 特に Fréchet space X, Y で $\Delta_0(X \times Y) = \omega_1$ となるものの存在が保障される.

位相空間 X が scattered とは任意の空でない閉部分集合が孤立点をもつものとする. $X^0 = X \setminus \{X \text{ の isolated points} \}$
 $X^{\alpha+1} = X^\alpha \setminus \{X^\alpha \text{ の isolated points} \}$, $X^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} X^\beta$ と定義する. X が scattered ならば或る順序数 α で $X^\alpha = \emptyset$ となる. $Cd(X) = \min \{ \alpha : X^\alpha = \emptyset \}$ と定め Cantor degree とよぶことにする.

Lemma 2.2 X を sequential scattered とする. そのとき

$$\Delta_0(X) \leq Cd(X).$$

Lemma. 2.3 任意の順序数 $\alpha \leq \omega_1$ に対し Arhangel'skii-Franklin space [1] X_α で $cd(X_\alpha) = so(X_\alpha)$ となるものが存在する。

Lemma 2.4 $f: X \rightarrow Y$ を 1:1, 連続 上への写像とする。今 Y が scattered とすると $cd(X) \leq cd(Y)$ が成立。

Lemma 2.5 (CH) X を可算 R_w -space. $Y = (X, \tau_1), Z = (X, \tau_2)$ で τ_1, τ_2 は Lemma 2.1 で存在が保障された位相とする。そのとき適当に構成すれば次の (*) を満たすようにできる。

(*)

任意の $A \subset Y \times Z$, $x \in Y \times Z$ で $x \in [A]_\beta^{Y \times Z}$

かつ $x \notin [A]_\gamma^{Y \times Z}$ として $\gamma < \beta$ とする。その

とき $B \subset Y \times Z$ で $x \in [B \cap A]_\beta^B$ かつ

$\pi_Y|_B$ も $\pi_Z|_B$ が 1:1.

$x \in [A]_\beta^{Y \times Z}$ で $x \notin [A]_\gamma^{Y \times Z}$ $\gamma < \beta$ とする。そのとき $B \subset Y \times Z$ で上の条件を満たすものとする。今 $\pi_Y|_B$ が 1:1 とすれば $\beta \leq cd(B) \leq cd(Y) = \alpha$ となり, $so(Y \times Z) \leq \alpha$ が成立する。Lemma 2.1 と合せば次の定理を得る。

Theorem 2.6 (CH). 任意の順序数 $\alpha \leq \omega_1$ に対し Fréchet 空間 Y, Z で $so(Y \times Z) = \alpha$ となるものが存在する。

References.

- [1]. A.V. Arhangel'skii - S.P. Franklin, Ordinal invariants for topological spaces, Michigan Math. J. 15 (1968) 313-320.
- [2] E.K. van Douwen, The product of a Fréchet spaces and a metrizable spaces, Topology and Appl. 47. (1992) 163-164.
- [3]. J. Nogura - A. Shibakov, Sequential order of product spaces., Topology and Appl. (to appear)
- [4]. J. Nogura - A. Shibakov, Sequential order of product spaces II, (in preparation).
- [5] Y. Tanaka, Products of sequential spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976) 371-375.