

3次元 Poincaré 予想の計算機実験について

東工大 情報科学科 本間龍雄

§0 序

四色問題の解決が伝えられる今日において、低次元トポロジーに関する未解決の問題の中で最も有名なものが、Poincaré 予想である。四色問題と比較しても難しいという点では甲乙つけがたく、数学的重要性に関しては上と思われる。もしも Poincaré 予想が解決すれば、低次元トポロジーはもちろん、トポロジー全般の研究が大幅に前進することは、十分期待できる。しかし解決に至る道は非常に険しいらしい。そこで、コンピュータを用い組合せ的方法による実験的試みについて述べる。

Poincaré 予想とは「ホモトピー・タイプが n 次元球面と一致する n 次元閉多様体は n 次元球面と同相であろう」という期待である。ホモトピー・タイプが一致するということを、と代数的に述べると、各次元のホモトピー群が n 次元球

面のどれと同型ということになるが、群という代数的規定から多様体の位相的構造を決定できるであろうという予想である。

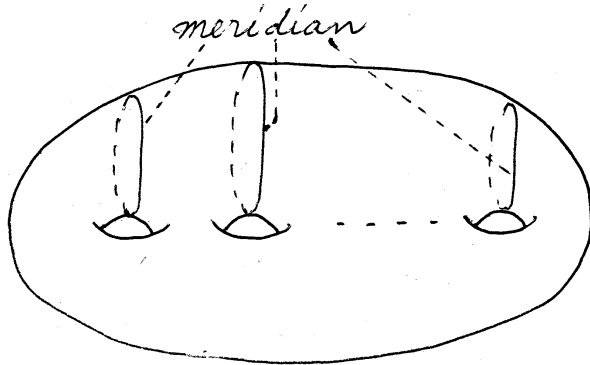
Poincaré 予想は $n=1, 2$ の場合は明らかであり、 $n \geq 5$ 以上の場合も E. C. Zeeman [20] 等により肯定的に解決されたので、残るのは $n=3, 4$ の場合で、3次元と4次元では、この問題は深く関連していて、一方が解決されれば他方も解決できる可能性が大きい。歴史的には、この予想を提起したのは、もちろん H. Poincaré で次元は3である。本稿でも3次元に限って述べるが、3次元 Poincaré 予想はつぎのようになる。

「基本群 (1次元ホモトピー群) が、trivial な3次元閉多様体は3次元球面と同相であろう」

§ 1 Heegaard 分解

いろいろな方面から Poincaré 予想の研究が行われているが、Heegaard 分解を用いる方法が最も正攻法であり、またコンピュータにかせるには今のところ一番良い方法と思われる。球に n 個のハンドルをつけた図形 (あるいは球に n 個の真直ぐなトンネルを掘った図形) と同相な3次元多様体を genus n の solid torus という。genus n の solid

torus の n 個のハンドルに相当するところを輪切りにして



solid torus

切りはなすともとの球にもとるが、その輪切りされる部分を meridian disc と呼び、meridian disc の境界線を meridian の全体を meridian 系 と呼ぶ。

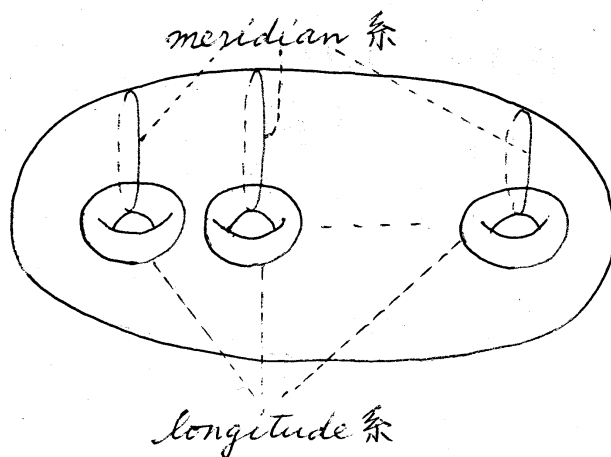
genus n の solid torus $= \mathcal{T}$ を M , L とし、その境界 ∂M , ∂L は同相であるから、 $f: \partial L \rightarrow \partial M$ を一つの同相写像とする。(f の選び方はさまざまにある。) $\mathcal{T}$ の同相写像 f で対応する点どうしを同一視して、 M と L をはり合わせると、一つの 3 次元閉多様体 W を得るが、 $W = M \cup L$ と書き、 W の genus n の Heegaard 分解 という。Heegaard 分解が Poincaré 予想の研究に使われる理由の一つは、つぎの定理である。

定理 1 任意の向きづけ可能な 3 次元閉多様体は Heegaard 分解をもつ。

さらに重要なことは 3 次元閉多様体 $W = M \cup L$ の位相的構造は f によって定まり、 f は L の meridian 系の像が、 $\partial M = f(\partial L)$ 上でどのように走っているかによって定まる。

$\partial M = f(\partial L)$ を Heegaard 分解の splitting surface を呼び、 N と書くことにする。 L の meridian 系の f による像を Heegaard 分解の longitude 系 と呼び、 M の meridian 系を Heegaard 分解の meridian 系 と呼ぶことにする。 3 次元閉多様体 $W = M \cup L$ の位相的構造は、 meridian 系と longitude 系が splitting surface N の上でどのように交わり、どのように走っているかによって定まる。 Poincaré 予想の研究に Heegaard 分解が有効と思われる二番目の理由は、つぎの Waldhausen [19] の結果である。

定理 2 3 次元球面 S^3 の任意の genus n の Heegaard 分解において、適当に meridian 系, longitude 系を選んで、つぎの図のような位置にあげる。



meridian 系, longitude 系を総称して m, l -系 と呼び、定理 2 のような m, l -系を 標準型 と呼ぶ。

$W = M \cup L$ の位相的構造は m, l -系に

よって定まることは既に述べたが、例えば W の基本群 $\pi_1(W)$ は meridian 系 (または longitude 系) を生成元, longitude

系 (または meridian 系) を 関係 として表示できる。 N の meridian 系 $\mu = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, longitude 系 $\lambda = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ と書き, それぞれの meridian, longitude に向きを与えておく, また splitting surface N にも向きを与えておく。 l_i が m_j と交わるとき向きに従って, $m_j (= m_j^{+1})$ または m_j^{-1} と読み, それを 文字 とみなして l_i の向きの順に並べた語を $\hat{l}_i$ と書くことにすると, つぎの定理を得るが, これが Heegaard 分解が有効なオミの理由である。

定理 3 基本群 $\pi_1(W)$ は $\langle m_1, m_2, \dots, m_n \mid \hat{l}_1 = \hat{l}_2 = \dots = \hat{l}_n = 1 \rangle$ ($\langle l_1, l_2, \dots, l_n \mid \hat{m}_1 = \hat{m}_2 = \dots = \hat{m}_n = 1 \rangle$) と表示できる。

Poincaré 予想の解決には基本群 $\pi_1(W)$ が trivial かどうかを判定する方法を見出さなければならないが, これは非常に難しく解決をまかせる大きな根拠となっている。しかし一次元ホモロジー群 $H_1(W)$ は一次元ホモトピー群 (基本群) $\pi_1(W)$ を可換化したものであるから, meridian m_i と longitude l_j の 代数的交点数 を a_{ij} と書くと, つぎの定理が成立するが, これはコンピュータ実験に利用できる。

定理 4 $H_1(W)$ が trivial になるための必要十分条件は行列式

$$D(W) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の値が ± 1 となることである。

もちろん $\pi_1(W)$ が *trivial* ならば, $H_1(W)$ は *trivial* であるから, 上の定理により $D_1(W) = \pm 1$ であるような 3 次元閉多様体 (ホモロジー 3 次元球面) W について検討すれば良いことになる。

§2 genus 2 の Heegaard 分解

3 次元閉多様体が genus 1 の Heegaard 分解をもつ場合は Poincaré 予想は肯定的に解決しているので, genus 2 の場合が当面の目標になる。genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3 次元多様体の研究は Birman [3], 高橋 [23], 本間 [21], 落合 [22] 等による近年多少の進展をみている。一つの方法は, そのような多様体は 結び目を分岐線とする S^3 の branched covering になっていることに注目し, 結び目の問題に帰着せしめることである。私は genus 2 の Heegaard 分解をもつ S^3 は標準型以外は reducible という非常に見分けやすい特徴をもっていることを証明し, その性質を用いて S^3 を判定するアルゴリズムを得たので, さらに基本群

$\pi_1(W)$ が trivial かを判定する方法を検討している。

今後 m, l -系は常に transversal に交わり, meridian
あるいは longitude を isotopy で動かすことだけでは,
交点は除けない状態になっているものとする。genus g の
Heegaard 分解はつぎの定理の示されるような対称性をも
っているで, genus g 以上から見れば容易である。

定理 5 $\{m_1, m_2\}, \{l_1, l_2\}$ を genus g の Hee-
gaard 分解の m, l -系とすると, splitting surface
 N の involution f が存在して,

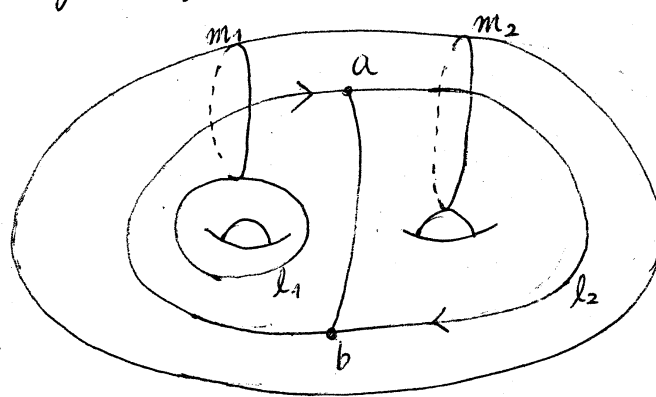
$f(m_1) = m_1, f(m_2) = m_2, f(l_1) = l_1, f(l_2) = l_2$
を満足する。

ある Heegaard 分解の m, l -系において meridian m_i
(または longitude l_j) が存在し, さらに m_i または l_j
の二点 a, b を結ぶ splitting surface N 上の曲線 ab
が存在し

i) ab は他の m, l -系
には a, b 以外では交わら
ず,

ii) m_i (または l_j) とは
図のような向きで交わり,

iii) a, b を端点とする m_i (または l_j) の二つの弧は共



reducible

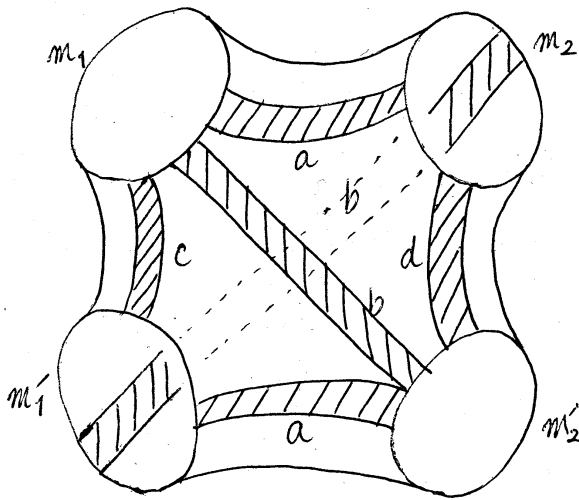
に *longitude* 系 (または *meridian* 系) と交わるとき, *reducible* であると定義する。 *reducible* な m, l -系は, つぎのような性質があるので, *reduction* が可能となる。

定理 6 *Heegaard* 分解が *reducible* な m, l -系をもてば, さらに交点数の少ない m, l -系をもつ。

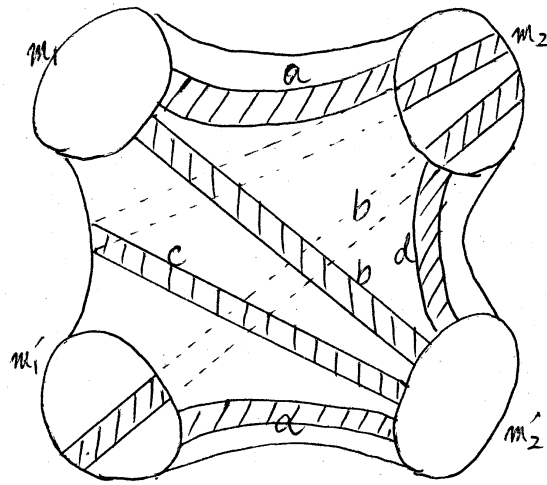
既に触れた *genus* g の *Heegaard* 分解をもつ 3次元閉多様体が S^3 であるかを判定するアルゴリズムが存在するのは, つぎの定理による。

定理 7 S^3 の *genus* g の *Heegaard* 分解では, 標準形以外の m, l -系は *reducible* である。

reducible でない m, l -系を *irreducible* と呼ぶが, 上の定理は, S^3 の場合は *irreducible* な m, l -系は一意的に定まることを主張している。一般の 3次元閉多様体に関しても, *genus* g でも定理 7 のような一意性は成立しないが, *irreducible* な m, l -系をもつ 3次元閉多様体を検討すれば, すべてを調査したことになる。特に *genus* g なら *irreducible* の場合は二つの *type* に限って検討すれば良いことがわかる。いま二つの *meridian* m_1 と m_2 を輪切りにすると, *longitude* 系は図のような帯状の部分の中を走っているものとして良い, a, b, c, d は帯の中を走っている *longitude* の弧の本数である。



type 1



type 2

定理 8 irreducible な $m.l$ -系は, type 1 または type 2 に分類される。

ただし, type 1, type 2 でも reducible な $m.l$ -系が含まれているが, その場合は基本群 $\pi_1(W)$ を $\langle m_1, m_2 \mid \hat{l}_1 = \hat{l}_2 = 1 \rangle$ と表示したとき, つぎのような定理が成立するので, reducible な $m.l$ -系を除くアルゴリズムが存在する。

定理 9 type 1 または type 2 の $m.l$ -系が reducible ならば, その $\pi_1(W)$ の表示 $\langle m_1, m_2 \mid \hat{l}_1 = \hat{l}_2 = 1 \rangle$ において, 語 $\hat{l}_1, \hat{l}_2$ の一方が他方に含まれている。

§3 コンピュータによる実験

実験においては、まず3次元閉多様体をつくり (1), (2), (3), $\pi_1(W)$ を表示し (4), $H_1(W)$ が trivial なもの (ホモロジー3次元球面) を選ぶ (5), 最後に S^3 を除く (6)。

(1) type 1 または type 2 と非負の整数 a, b, c, d を選ぶ, それぞれを本数とするように, 帯の中に longitude の弧に相当する平行線を走らせる。

(2) m_1 と m_1' , m_2 と m_2' をはり合わせ, (1) でつくった弧の端点, どうしをつないで, いくつかの閉曲線とする。

(3) 閉曲線の数が二つのものを選ぶ longitude l_1, l_2 とする。

(4) 語 $\hat{l}_1, \hat{l}_2$ を読む。

(5) 交点数行列式 $D(W)$ が ± 1 のものを選ぶ。

(6) 語 $\hat{l}_1, \hat{l}_2$ の一方が他方に含まれるものを除く。

以上のアルゴリズムで, irreducible な m, l -系をもつ, S^3 でないホモロジー3次元球面が, 交点数の制限のもとですべて output される。もしもその中に基本群 $\pi_1(W)$ が trivial なもの (ホモトピー3次元球面) が存在すれば, Poincaré 予想は否定的に解決される。逆にこれらのホモロジー3次元球面の基本群がすべて trivial でないことが確かめられれば, 部分的ではあるが, Poincaré 予想は肯定されることになる。しかし群が trivial でないことを証明する

のは非常に難しく、もちろんコンピュータで確かめる方法は無
いように見える。現段階では output されたホモロジー3次
元球面 W の特徴を調べ、いくつかの type に分類することと、
基本群 $\pi_1(W)$ が trivial かどうかをしらみつぶしに当る
ことを努力しています。

REFERENCES

- [1] R.H.Bing Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be
 S^3 , Annals of Math. vol. 68, No. 1, July, 1958.
- [2] R.H.Bing and J.M.Martin Cubes with knotted holes, Trans. Amer.
 Math. Soc. 155 (1971) 217-231.
- [3] J.S.Birman and H.M.Hilden Heegaard splittings of Branched Coverings
 of S^3 , Transactions of the American Math. Soc. vol. 213, p.315-352
 1975.
- [4] H.S.M.Coxeter and W.O.J.Moser Generators and Relations for Discrete
 Group, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 14,
 Springer-verlag, Berlin, 1965.
- [5] R.H.Fox Construction of simply connected 3-manifolds, Topology of
 3-manifolds and Related Topics (Proc. Univ. of Georgia Inst., 1961)
 Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp213-216.
- [6] W.Haken Various aspects of the three-dimensional Poincaré Problem,
 Topology of Manifolds (Proc. Inst. Univ. of Georgia, Athens, Ga.,
 1969) Markham, Chicago, III., 1970, p140-152.
- [7] W.Haken Trivial loops in homotopy 3-spheres, Illinois J. Math., II
 (1967) 547-554.

- [8] J.Hempl A simply connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) 154-158.
- [9] W.Magnus, A.Karrass and D.Solitar Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations, Pure and Appl. Math., vol. 13, Interscience, New York, 1966.
- [10] J.W.Milnor "A unique decomposition theorem for 3-manifolds" Am. Jour. Math., 84 (1962), 1-7.
- [11] Donald Myers Homeomorphisms on the solid double torus, Can. J. Math., vol. XXVII, No. 4, 1975 pp.797-804.
- [12] C.D.Papakyriakopoulos A Reduction of the Poincaré conjecture to Group Theoretic conjectures, Annals of Mathematics, vol. 77 No. 2, March, 1963.
- [13] R.Riley Knots with the parabolic property P, Quart. J. Math. (2) 25 (1974) 273-283.
- [14] R.Riley Homeomorphisms of Knot Groups on Finite Groups, Math. of Computation, vol. 25, No. 115, pp603-619, July 1971.
- [15] J.Singer Three-dimensional manifolds and their Heegaard-diagrams, Trans. Am. Math. Soc. 35 (1933) 88-111.
- [16] John Stallings How not to prove the Poincaré conjecture, Ann. of Math. Study, No. 60 (1966), 83-88.
- [17] Ja.Viro Linkings, 2-sheeted branched coverings, and braids, Math. U.S.S.R. Sbornik 16 (1972), 222-236.
- [18] I.A.Volodin, V.E.Kuznetsov and A.T.Fomenko The Problem of Discriminating Algorithmically the Standard Three-Dimensional Sphere, Russian Math. Surveys 29:5 (1974), 71-172.
- [19] F.Waldhausen Heegaard-Zerlegung der 3-sphere, Topology 7 (1968) 195-203.

[20] E.C. Zeeman Seminar on Combinatorial topology, Inst. Hautes Etudes
Sci. Publi. Math., Paris, 1963.

[21] 本間龍雄 " S^3 の種数 2 の Heegaard 分解", 京都
大学数理解析研究所講究録 1976 年 9 月.

[22] 落合豊行 "genus 2 の Heegaard 分解をもつ
homology 3 -sphere について", 京大数理解析研
究所講究録 268, pp. 52-68, 1976 年 4 月.

[23] 高橋元男 "種数 2 の Heegaard 分解について
Birman-Hilden の定理の別証", 京大数理解析
研究所講究録, 1975 年 2 月.