

## B-3 値論理関数とその応用

明治大学 工学部

向 殷 政 男

### § 0. あらまし

この報告は、B-3 値論理代数、B-3 値論理関数の理論的研究について述べたものである。B-3 値論理代数の定義と諸性質に基づいて B-3 値論理関数の必要十分条件、および標準形について述べる。また、Fail-Safe 論理、Fuzzy 論理との関係についても言及する。応用例として、ハザードの検出と除去及び素項展開を求める手順などについて考察する。

KEYWORDS ;    論理代数    ,    B-3 値論理,  
Fail-Safe 論理,    Fuzzy 論理,  
ハザード    ,    素項展開,

### § 1. まえがき

3 値論理代数、3 値論理関数の研究はかなり古くから行なわれている。理論的な研究の主な興味は、

各真理値に論理的意味を与えてそれに都合のよいような演算を決めて一つの代数系を構成した場合、その代数系はいかなる性質を有するか

という点と

関数的に完全である (functionally completeness) —すなわち、定義された演算を用いてすべての3値論理関数が表現できる— ためには、いくつかの条件を満たせば"良い"かという点に何ヶらられているようである。

本論文で述べる3値論理代数は、2値論理代数を含むように拡張された代数系である。すなわち、2値論理代数で用いられる真理値0, 1の他に真理値 $\frac{1}{2}$ を加えて3値とし、演算  $AND(\cdot)$ ,  $OR(\vee)$ ,  $NOT(\sim)$  に関する2値論理代数での定義

$$x \cdot y = \min(x, y)$$

$$x \vee y = \max(x, y)$$

$$\sim x = 1 - x$$

をそのまま形式的に3値まで拡張定義する。このような3値論理代数をB-3値論理代数 (Binarthic-ternary logic) と呼ぶが、この論理体系は意味を持たないモデルを有している。従来の2値論理代数では、真理値1に"真"を、0に"偽"を対応させ、すべての命題を真か偽かいずれかであるとして論理を展開して行く。ここでは真でも偽でもない"はいい色"的なものの存在を認めていない。このB-3値論理代数でも同じく、1に"真"、0に"偽"を対応させ、 $\frac{1}{2}$ には真か偽

か決定できないもの、不確定という意味づけをすることができ  
 する。その他、 $\frac{1}{2}$ に故障状態とか過渡状態とかの意味づけを  
 することも可能で、その他にも多くのモデルを有している。  
 この論理体系は、最も古くから研究されている3値論理代数  
 で、また、2値論理代数を最も自然に拡張した3値論理代数  
 と思われる。しかし、B-3 値論理代数は関数的な完全性の  
 条件を満たさない。B-3 値論理代数で定義されている演算、  
 $\vee$ ,  $\wedge$  と各変数との結合で表現される3値論理関数をB-3  
 値論理関数というが、3値論理関数の中でB-3 値論理関数  
 が占める割合は非常に少ない。本論文では、B-3 値論理代  
 数の定義に基づいて、3値論理関数の定義域にある半順序関  
 係も定義することにより、この半順序関係に関して単調性を  
 満たすことがB-3 値論理関数であるための必要十分条件であ  
 ることを述べる。次に、B-3 値論理関数の標準形およびB  
 -3 値論理関数の拡張について考察し、最後にこれらのB-  
 3 値論理関数の理論を用いたいくつかの応用例について報告  
 する。

なお、このB-3 値論理代数は、2値論理を含むように広  
 げられているので、2値論理を高レベルな場から眺めることがで  
 きて、2値論理をより詳しく見直しよく眺められるという利  
 点を有する。

## §2. B-3 値論理代数

真理値 0,  $\frac{1}{2}$ , 1 よりなる集合を  $V_3$  としたとき, B-3 値論理代数を次のように定義する。

定義 1: 集合  $V_3$  に, 2 項演算  $\cdot$ ,  $\vee$ , 単項演算  $\sim$  が定義されている代数系  $\langle V_3, \cdot, \vee, \sim \rangle$

を B-3 値論理代数 とする。

$$\text{ただし, } x \cdot y = \min(x, y) \text{ ----- (1)}$$

$$x \vee y = \max(x, y) \text{ ----- (2)}$$

$$\sim x = 1 - x \text{ ----- (3)}$$

$$x, y \in V_3 \quad \parallel$$

真理値を 0, 1 に限れば, 上に定義した演算  $\cdot$ ,  $\vee$ ,  $\sim$  は 2 値論理代数で定義されている AND, OR, NOT そのものであり, このとき, 上の代数系は 2 値論理代数, すなわちブール代数を満す。B-3 値論理代数は, 2 値論理代数の形式的な 3 値への拡張とあってゐるか, 意味のあるモデルも有している。例えば, 1 を "真" に, 0 を "偽" に,  $\frac{1}{2}$  を "不確定" に対処させると, あいまいさも認めた論理を表現していることになる。

B-3 値論理代数においても 2 値論理代数と同様に, 上に定義した演算  $\cdot$ ,  $\vee$ ,  $\sim$  をそれぞれ AND, OR, NOT と呼ぶことにする。AND, OR, NOT の真理値表は表 1 ~

表3のようになる。

| $x \backslash y$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1             |
|------------------|---|---------------|---------------|
| 0                | 0 | 0             | 0             |
| $\frac{1}{2}$    | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1                | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1             |

表1.  $x \cdot y$

| $x \backslash y$ | 0             | $\frac{1}{2}$ | 1 |
|------------------|---------------|---------------|---|
| 0                | 0             | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $\frac{1}{2}$    | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 1                | 1             | 1             | 1 |

表2.  $x \vee y$

| $x$      | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
|----------|---|---------------|---|
| $\sim x$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |

表3.  $\sim x$

B-3 値論理代数では、演算  $\cdot$ ,  $\vee$ ,  $\sim$  に関して次のような公式が成立する。

(I) 可換法則:  $x \vee y = y \vee x$ ,  $x \cdot y = y \cdot x$

(II) 結合法則:  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ,  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(III) 吸収法則:  $x \vee (y \cdot x) = (x \vee y) \cdot x = x$

(IV) 分配法則:  $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$

$$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$$

(V) ド・モルガンの法則:  $\sim(x \cdot y) = \sim x \vee \sim y$ ,  $\sim(x \vee y) = \sim x \cdot \sim y$

(VI)  $\sim(\sim x) = x$

(VII) 最大元, 最小元の存在:  $A \cdot 1 = A$ ,  $A \cdot 0 = 0$

$$A \vee 1 = 1, \quad A \vee 0 = A$$

なお, (I), (II), (III) より

(VIII) 冪等法則:  $x \cdot x = x$ ,  $x \vee x = x$

が導かれる。

こゝで, B-3 値論理代数では2値論理代数で成立する

(\*) 相補法則:  $x \vee \neg x = 1, \quad x \cdot \neg x = 0$

は成立しないのが特徴的である。

(I) ~ (IV) は乗の公理であり, (I) ~ (IV) は分配束の公理である。最大元, 最小元を持つ分配束で, 単項演算  $\neg$  に関して (IV), (VI) を満たす代数系を ド・モルガン束 または デ・モルガン代数 と呼ぶが<sup>(1)</sup>, B-3 値論理代数はこの公理系を満たしている。なお, B-3 値論理代数は, S. C. Kleene の体系と同じである。また, 3 値における NAND ( $\downarrow$ ), NOR ( $\uparrow$ ) を

$$x \downarrow y = \neg(x \cdot y)$$

$$x \uparrow y = \neg(x \vee y)$$

で定義すれば, 演算は  $\downarrow$  のみまたは  $\uparrow$  のみでも, 全く同様の体系ができる。本論文では,  $\cdot, \vee, \neg$  を中心に考察するが, 本論文で述べることはすべて,  $\downarrow$  のみ,  $\uparrow$  のみと置いても同様に成立する。

次に, B-3 値論理代数の式 を次のように帰納的に定義する。

定義 2; (1)  $0$  と  $1$  は式である。

(2)  $x_1, \dots, x_n$  は式である。

(3)  $\psi_1, \psi_2$  が式ならば,  $\psi_1 \cdot \psi_2, \psi_1 \vee \psi_2, \neg \psi_1$  も式である。

(4) 上で与えられるもののみが式である。  $\parallel$

B-3 値論理代数の式は,  $x_1, \dots, x_n$  を  $V_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  の

値をとる変数とするとき, 各変数と演算  $\cdot, \vee, \sim$  の結合で表わされる  $n$  変数の 3 値論理関数とみなすことができる。

### § 3. B-3 値論理関数

写像  $F: T_3^n \rightarrow T_3$

は  $n$  変数の 3 値論理関数である (以後すべて  $n$  変数の関数についての考察するのでいちいち断わらない) が, B-3 値論理代数の式ではすべての 3 値論理関数を表現することはできない。B-3 値論理代数の式が表現している 3 値論理関数を B-3 値論理関数も ~~B-3 値論理関数~~ というが, これは 3 値論理関数の定義域にある半順序関係を定義し, この半順序関係に関して単純であることが必要十分であることも前回報告<sup>(2)</sup>した。こちらの方を B-3 値論理関数の定義として採用する。まず, 集合  $T_3$  の各元の間に次のような半順序関係  $\succ$  を定義する。

定義 3;  $\frac{1}{2} \succ 0, \frac{1}{2} \succ 1, a \succ a, a \in T_3$  //

これを 3 値論理関数の定義域  $T_3^n$  まで拡張定義する。

定義 4;  $(a=(a_1, \dots, a_n), b=(b_1, \dots, b_n)) \in T_3^n$

において,  $a$  が  $b$  の  $i$  について  $a_i \succ b_i$  なるとき

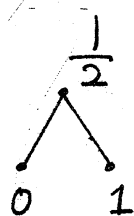


図 1.  
半順序関係  $\succ$

$(a \succ b)$  とする。||

$(a \succ b)$  なるとき元  $a$  は元  $b$  を含み, または  $b$  は  $a$  に含まれるという。

定義 5; 3 値論理関数  $F$  が

(i)  $(a \in V_2^n)$  ならば  $F(a) \in V_2$ ,

(ii)  $(a \succ b)$  ならば  $F(a) \succ F(b)$

なるとき,  $F$  を B-3 値論理関数 という。||

(上記の条件 (i), (ii) も満たす関数と, B-3 値論理代<sup>の式</sup>数が表現する関数とが等しいことは前回の報告<sup>(2)</sup> または文献<sup>(3)</sup> 参照)

3 値論理関数  $F$  に対して, 1,  $\frac{1}{2}$ , 0 に写像される定義域  $V_3^n$  の元の集合をそれぞれ

$$F^{-1}(1), F^{-1}(\frac{1}{2}), F^{-1}(0)$$

で表わし, 1-set,  $\frac{1}{2}$ -set, 0-set と呼ぶことにする。

定理 1;  $F$  を B-3 値論理関数とするとき

(i)  $(a \in F^{-1}(1))$  ならば,  $(a \succ b)$  なるすべての  $b$  について  $b \in F^{-1}(1)$ ,

(ii)  $(a \in F^{-1}(0))$  ならば,  $(a \succ b)$  なるすべての  $b$  について  $b \in F^{-1}(0)$ ,

(iii)  $(a \in F^{-1}(\frac{1}{2}))$  ならば,  $b \succ a$  なるすべての  $b$  について  $b \in F^{-1}(\frac{1}{2})$ . ||

証明)  $F$  が定義 5 の (iii) を満たすことを示す。

B-3 値論理関数  $F$  の 1-set,  $\frac{1}{2}$ -set, 0-set はそれぞれ半順序関係  $\succ$  に関して半順序集合をなしている。集合  $F^{-1}(1)$ ,  $F^{-1}(0)$  における半順序関係  $\succ$  に関する, すべての極大元の集合

を  $\alpha F'(1)$ ,  $\alpha F'(0)$  で,  $F'(x)$  にかけるすべての極小元の集合を  $\alpha F'(x)$  で表わすとき, 次の定理が成立する.

定理 2:  $B$ -3 値論理関数  $F$  は, 集合  $\alpha F'(1)$ ,  $\alpha F'(0)$ ,  $\alpha F'(x)$  により一意に定まる。||

証明) 任意の元  $a \in V_3^n$  について,  $F(a) \in V_3^n$  より ( $a$  は  $F'(1)$ ,  $F'(0)$ ,  $F'(x)$  の要素である。よって, 関係  $\gamma$  に関して

- 1)  $a$  を含むような元が  $\alpha F'(1)$  に存在するか,
- 2)  $a$  を含むような元が  $\alpha F'(0)$  に存在するか,
- 3)  $a$  に含まれるような元が  $\alpha F'(x)$  に存在するか.

のいずれかが必ず成立する。(のみ, 一つの場合しか成立しない。なぜならば, (1), (2) が同時に成立した, すなわち,

$$a_1 \gamma a, \quad a_0 \gamma a, \quad (a_1 \in \alpha F'(1), \quad a_0 \in \alpha F'(0))$$

なる  $a_1, a_0$  が同時に存在したとすると, 定義 5 の iii) より

$$a_1 \gamma a \text{ ならば } F(a_1) = 1 \gamma F(a)$$

$$a_0 \gamma a \text{ ならば } F(a_0) = 0 \gamma F(a)$$

となり,  $F(a) = 1$  と  $F(a) = 0$  が同時に導かれて矛盾する。

(1) と (3), (2) と (3) が同時に成立するとしても同様に矛盾する。

以上により, 関係  $\gamma$  に関して (1) が成立すれば  $F(a) = 1$ ,  
 2) が成立すれば  $F(a) = 0$ , 3) が成立すれば  $F(a) = \frac{1}{2}$  となり,  
 $F(a)$  の値は,  $\alpha F'(1)$ ,  $\alpha F'(0)$ ,  $\alpha F'(x)$  が与えられると, 一意に定まる。||

系1: B-3 値論理関数  $F$  は, 集合  $\Delta F(1)$ ,  $\Delta F(0)$ ,  $\Delta F(\frac{1}{2})$

のいずれか二つの集合が与えられれば, 一意に定まる。||

(証明) 定理2の証明で, (1), (2), (3) のいずれか一つが必ず成立し, しかも必ず一つしか成立しないことが明らか。■

#### §4. B-3 値論理関数の標準形<sup>(3)</sup>

B-3 値論理代数の式  $\psi$  が与えられたとき, B-3 値論理関数としてこれと等値な, 一意に定まる B-3 値論理代数の式を求めよう。

B-3 値論理代数では, 分配法則 (IV), ハミ等法則 (VIII) が成立するから, これを用いて加法形式 (積和形式)<sup>\*1</sup> に展開することができる。ただし, 相補法則 (\*) が成立しないから, ある変数について肯定, 否定を同時に含む項 (このような項を 相補項 という) が存在する。上のような加法形式を B-3 値加法標準形 といい, B-3 値加法標準形のうち相補項を含まない部分を 加法標準形 (2 値論理代数における加法標準形の定義と同じである), 含む部分を 相補加法標準形 といふ。

変数, または変数の否定を 文字 といい, 同じ文字を2度以上含まない文字の積 (AND) を 項 といふ。同じ項を2度以上含まない項の和 (OR) で表わされる形式を 加法形式 (積和形式) といい, これをここでは B-3 値加法標準形と呼ぶ。

(こゝでは加法形式についてのサビが、乗法形式(和積形式)についても同様に考察できる。) (もし、 $\psi$ に好かする B-3 値加法標準形は一意的に定まらない。

相補項にかいては

$$\begin{aligned} x_i \cdot \sim x_i \cdot \psi &= x_i \cdot \sim x_i \cdot (x_j \vee \sim x_j) \cdot \psi \\ &= x_i \cdot \sim x_i \cdot x_j \cdot \psi \vee x_i \cdot \sim x_i \cdot \sim x_j \cdot \psi \end{aligned}$$

が成立するから、すべての相補項は各項にすべての変数が現われるような相補項の和( $\vee$ )で表現することが出来る。これは丁度、2値論理代数で、任意の項が、各項にすべての変数が現われるような項(最小項)の和で表現されるのと同様で、B-3 値論理代数では、項が相補項となり(このような項を単項と呼ぶ)場合は上のようになるとは成立しないが、相補項については成立するわけである。すべての変数が現われるような相補項を相補最小項と呼ぶことにする。

次に、B-3 値論理代数では、吸収法則(III)が成立するから、 $\alpha, \beta$ をそれぞれ項としたとき、 $\alpha$ に現われる文字(変数または変数の否定)がすべて $\beta$ にも現われるとき

$$\alpha \vee \beta = \alpha$$

が成立する。B-3 値加法標準形にかけるこのような法則を自明な省略と呼ぶ。

いま、与えられた B-3 値論理代数の式  $\psi$  を B-3 値加法

標準形に展開し, すべての相補項については相補最小項の和に展開する。このようにして得られた B-3 値加法標準形に自明な省略を行なつて得られた式は,  $\psi$  と等値で, 1 かも一意的に定まる。このような B-3 値加法標準形を B-3 値全加法標準形 といい。

$$\begin{aligned}
 \text{例1. } \psi &= x_1 \cdot (x_2 \vee \sim x_1) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \\
 &= x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \\
 &= x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \quad \parallel
 \end{aligned}$$

上で述べた手順で求まる式が  $\psi$  と等値であることは明らかである。これが一意的に定まることは, 次のようにして示される。

まず, 単項, 相補最小項の性質について調べる。

定義 6;  $(a = (a_1, \dots, a_n)) \in \mathcal{V}_3^n$  に対応する単項  $\alpha_a$  とは

$$\begin{aligned}
 x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \quad & \text{ただし, } a_i = 0 \text{ のとき } x_i^{a_i} = \sim x_i \\
 & a_i = 1 \text{ のとき } x_i^{a_i} = x_i \\
 & a_i = \frac{1}{2} \text{ のとき } x_i^{a_i} = 1
 \end{aligned}$$

なる式をいう。  $\parallel$

定義 7;  $(a = (a_1, \dots, a_n)) \in \mathcal{V}_3^n - \mathcal{V}_2^n$  に対応する相補最小項  $\beta_a$  とは

$$\begin{aligned}
 x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \quad & \text{ただし, } a_i = 0 \text{ のとき } x_i^{a_i} = \sim x_i \\
 & a_i = 1 \text{ のとき } x_i^{a_i} = x_i \\
 & a_i = \frac{1}{2} \text{ のとき } x_i^{a_i} = x_i \cdots x_i
 \end{aligned}$$

なりすをいう。||

上の各元と単項, 相補最小項との対応は一對一である。

補題 1;  $(a \in V_3^n)$  に対する単項を  $\alpha_a$  とするとき,

$$(i) \quad \alpha_a(\ell) = 1 \Leftrightarrow (a \succ \ell \Leftrightarrow \alpha_a(\ell^*) = \{1\},$$

$$(ii) \quad \alpha_a(\ell) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists c, (a \succ c, \ell \succ c), a \not\succ \ell \\ \Leftrightarrow \alpha_a(\ell) = \{0, 1\},$$

$$(iii) \quad \alpha_a(\ell) = 0 \Leftrightarrow \sim \exists c, (a \succ c, \ell \succ c) \Leftrightarrow \alpha_a(\ell^*) = \{0\}. ||$$

証明) 略. (記号  $\ell^*$  については §5 参照)。

補題 2;  $(a \in V_3^n - V_2^n)$  に対する相補最小項を  $\beta_a$  とするとき,

$$(i) \quad \beta_a(\ell) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ell \succ a,$$

$$(ii) \quad \beta_a(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell \not\succ a. ||$$

証明) 略.

$B-3$  値論理関数  $F$  が与えられれば,  $\alpha F(1), \alpha F(\frac{1}{2})$  は一意的に定まり, また,  $\beta F(1), \beta F(\frac{1}{2})$  が与えられれば  $F$  は一意的に定まる。  $\alpha F(1), \alpha F(\frac{1}{2})$  に対する単項, 相補最小項の和 (V) により, 補題 1, 補題 2 から知れるように  $F(1), F(\frac{1}{2})$  はすべて表現できるから, これらの和 (V) で  $F$  は表現でき, これは一意的である。  $F$  の  $B-3$  値加法標で, 加法標準形か大い相補加法標準形の部分に自明な省略を行なうことは,  $\alpha F(1)$  か  $\alpha F(\frac{1}{2})$  に対する項を求めていることに相当する。一方, 補題 1 より  $F(\frac{1}{2})$  のある部分は単

項によっても表現できて、いくつかの相補最小項は省略できる。単項  $\alpha_i$  があるために、相補最小項  $\beta_{\alpha_i}$  が省略できるのは、補題 1 より、ある  $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_2^n$  が存在して、

$$i \in \mathcal{C}, \quad \alpha_i \in \mathcal{C}$$

なるとき、かまわぬと主に限り、省略できる相補最小項は一意的に定まる。このとき、 $\alpha_i$  に現われる文字はすべて  $\beta_{\alpha_i}$  に現われるから、B-3 値加法標準形にかける自明な省略でこれらの相補最小項はすべて省略される。以上により、前述した手順で求めた B-3 値主加法標準形は一意的に定まる。

定理 3; B-3 値論理関数  $F$  に対する B-3 値主加法標準形は必ず存在して、しかも一意的に定まる。||

### § 5. P 形論理関数と C 形論理関数

B-3 値論理関数  $F$  と  $G$  が、2 値論理関数として見たとき等しい場合、次の定義を置く。

定義 8<sup>(4)</sup>; B-3 値論理関数  $F, G$  が

$$\forall (a \in \mathcal{T}_2^n, \quad F(a) = G(a))$$

なるとき、 $F$  と  $G$  とは  $\mathcal{T}$ -equivalent であるという。||

$F$  と  $\mathcal{T}$ -equivalent な B-3 値論理関数の集合を  $\mathcal{T}_{eq}(F)$  とすると  $\mathcal{T}_{eq}(F)$  には 2 値論理関数が対応し、逆にある 2 値論理関数にはある  $\mathcal{T}_{eq}(F)$  が対応している。  $\mathcal{T}_{eq}(F)$  からなる

集合は、演算  $\cdot, \vee, \sim$  に関してブール代数をなすことが示される。(4)

任意の元  $(a \in V_2^n)$  に対して、 $\frac{1}{2}$  を 0 または 1 で置き換えて得られる  $V_2^n$  の元の集合を  $(a^*)$  で表わす。即ち

$$(a^*) = \{a \mid (a \text{ と } a \in V_2^n)\}.$$

同様に、変数が  $(a^*)$  の値をとるとき、関数  $F$  の値のとり集合を  $F(a^*)$

で表わすものとする。そのとき、次の定理が成立する。

定理4;  $F$  が  $B-3$  値論理関数なるば、

- (i)  $F(a) = \frac{1}{2} \iff F(a^*) = \{0, 1\},$
- (ii)  $F(a) = 0 \implies F(a^*) = \{0\},$
- (iii)  $F(a) = 1 \implies F(a^*) = \{1\}.$  //

証明)  $B-3$  値論理関数の定義よりおぼちに示される。■

特に、 $F$  が加法標準形 (相補項を含まない場合) なるば、次の定理が成立する。

定理5;  $F$  が加法標準形なるば、

- (i)  $F(a) = \frac{1}{2} \iff F(a^*) = \{0, 1\},$
- (ii)  $F(a) = 0 \iff F(a^*) = \{0\},$
- (iii)  $F(a) = 1 \implies F(a^*) = \{1\} //$

証明) 加法標準形は、いくつかの単項の和 ( $\vee$ ) で表現されているから、補題1より  $F(a) = 0 \iff F(a^*) = \{0\}$  が導

かれて定理4と合わせて (ii) が成立する。■

上記の定理4, 5より明らかなように,  $(a)$  に不確定を表わす真理値  $\frac{1}{2}$  が現われたとき, その  $\frac{1}{2}$  を 0 または 1 で置き換えたとき,  $F$  の値すなわち  $F((a^*))$  が 0 または 1 に限られていても, 必ずしも  $F((a))$  の値は 0 または 1 とはならず,  $\frac{1}{2}$  となることもある。すなわち, 情報が失われたと考えられる。

高岡氏の定義<sup>(5)</sup>に従い, 集合

$$\{(a) \mid (a) \in \mathcal{V}_3^n - \mathcal{V}_2^n, F((a)) = \frac{1}{2}\}$$

を情報損失集合と定義すれば, 情報損失集合最小の関数は, 定理4の (i), (ii), (iii) を必要十分条件とした  $B-3$  値論理関数である。

定義 9<sup>(2)</sup>; 3 値論理関数  $F$  が

$$(i) \quad F((a)) = \frac{1}{2} \iff F((a^*)) = \{0, 1\},$$

$$(ii) \quad F((a)) = 0 \iff F((a^*)) = \{0\},$$

$$(iii) \quad F((a)) = 1 \iff F((a^*)) = \{1\}.$$

を満たすとき,  $F$  を P 形論理関数 という。||

これに対して, 情報損失集合最大の関数は,  $\mathcal{V}_2^n$  の元以外のすべての元に対して  $\frac{1}{2}$  をとる関数である。

定義 10<sup>(4)</sup>; 3 値論理関数  $F$  が

$$(i) \quad (a) \in \mathcal{V}_2^n \text{ ならば } F((a)) \in \mathcal{V}_2,$$

$$(ii) \quad (a) \in \mathcal{V}_3^n - \mathcal{V}_2^n \text{ ならば } F((a)) = \frac{1}{2}$$

を満たすとき、 $F$  を C形論理関数 という。||

P形論理関数, C形論理関数は, 定義5の条件を満たすか  
B-3 値論理関数であり,  $V_2^n$  の値により一意に定まる。

$F$  と  $V$ -equivalent な P形論理関数を  $F_P$ , C形論理関数を  $F_C$  とすれば,  $V_{eq}(F)$  の集合は情報損失集合の演算に関してブール代数をなし,  $F_P, F_C$  がそれぞれ最小元, 最大元となる  
ことが, 高岡氏<sup>(6)</sup>により示されている。

## § 6. B-3 値論理関数の拡張

B-3 値論理代数は, 多値にまで拡張することができると、  
それは二つの方向に分けられる。

一つは,  $AND(\cdot), OR(\vee), NOT(\sim)$  の定義 1. の (1), (2), (3) 式をそのまま多値にまで拡張定義する方向である。§ 2 で述べた B-3 値論理代数の定義や公式は, なにも真理値を 0,  $\frac{1}{2}$ , 1 の3値に限る必要はない。  $V_3$  の代りに, 0, 1 を含み,

$$x \in A \text{ ならば } \neg x \in A$$

を満たす集合  $A$  ならばなんでもよいことになる。例えば,  $m\mathbb{Z}_4$  とするとき,

$$\frac{1}{m-1} i, (i=0, 1, \dots, m-1)$$

なる  $m$  個の真理値を持つ集合を考えてもよいし,  $0 \leq x \leq 1$  なる有理数の集合や実数の集合を考えてもよい。これは, 古

くから研究されている無限濃度をも有する命題論理<sup>(7)</sup>や、最近言われている Fuzzy 論理<sup>(8)</sup>と、全く同じものである。

もう一方は、§3の定義4を保持するような多値論理への拡張であり、これは、多値 Fuzzy-Sat 論理<sup>(9)</sup>である。すなわち、定義4の多値への自然な拡張は次のようになる。

いま、 $m$ 値論理代数(その真理値を  $a_1, \dots, a_m$  とする)において、真理値が  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$  のいずれであるか不明であることを表わす新たな真理値  $a_{i_1 \dots i_k}$  をつけ加える。真理値の集合  $V = \{a_1, \dots, a_m\}$  に、これらの真理値をつけ加えた集合を  $V$  とするとき、 $V$  は  $2^m - 1$  個の元を有する。 $V$  に、次のような半順序関係  $\succ$  を定義する。

定義11;  $\{i_1, \dots, i_k\} \supset \{j_1, \dots, j_l\}$  のとき

$$a_{i_1 \dots i_k} \succ a_{j_1 \dots j_l}$$

とある。||

このとき、 $V^n$  の集合にもこの半順序関係  $\succ$  を拡張定義する。

定義12;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in V^n$  において

$$\alpha_i \succ \beta_i, i=1, \dots, n \text{ なるとき } \alpha \succ \beta$$

とある。||

このとき、定義4は次のように拡張される。

定義13;  $2^{m-1}$  値論理関数  $F$  が

(i)  $\alpha \in V_m^n$  ならば  $F(\alpha) \in V_m$ ,

(ii)  $\alpha \wedge \beta$  ならば  $F(\alpha) \wedge F(\beta)$

なるとき,  $F$  を 多値-Fail-Safe 論理関数 と言う。||

B-3 値論理関数は, Fuzzy 論理関数から見ると真理値の集合を  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$  に限, たものだし, 多値-Fail-Safe 論理関数から見ると 2 値の場合の Fail-Safe 論理関数になっている。

B-3 値論理代数では, 3 番目の真理値として  $\frac{1}{2}$  を用いたが, これは Fuzzy 論理代数の演算 (§ 2, 定義 1) をそのまま用いられるようにしたためである。Fail-Safe 論理として見たとき, 真理値  $\frac{1}{2}$  は 0 か 1 か不明ということを表わしているのであるから,  $\frac{1}{2}$  を用いるより  $U$  (Undefine, 土屋氏<sup>(10)</sup>), や  $N$  (Null, 高岡氏<sup>(6)</sup>) や  $\phi$  (0 と 1 の合併, 浦野氏<sup>(11)</sup>) を用いるのが適当と思われる。

とにかく, B-3 値論理代数は, Fuzzy 論理と Fail-Safe 論理の共通部分に位置し, 定理 1, 2 についてはそのまま多値-Fail-Safe 論理へも拡張できるし, § 4 の標準形は Fuzzy 論理に拡張できる。Fuzzy 論理関数について,  $NOT(\sim)$  を含む関数の標準形は今までないようであるが<sup>(8)</sup>, B-3 値論理関数の標準形はそのまま  $NOT(\sim)$  を含む一般の Fuzzy 論理関数の標準形を与えろ。

## § 7. B-3 値論理関数の応用

### 7-1. Fail-Safe 論理<sup>(2)</sup>

真理値  $\frac{1}{2}$  を故障状態に対処させることにより, Fail-Safe 論理回路網の理論に, この B-3 値論理代数, B-3 値論理関数が応用される。すなわち, B-3 値論理関数のものは (2 値) Fail-Safe 論理関数である。ある 2 値論理関数  $f$  には, 一つの  $\nabla$ -equivalent な B-3 値論理関数の集合  $V_{\nabla}(f)$  が対応し, これを  $f$  の Fail-Safe 論理関数ともいう。  $V_{\nabla}(f)$  の中の  $P$  形論理関数が情報損失集合最小の,  $C$  形論理関数が最大の Fail-Safe 論理関数である。これらの Fail-Safe 論理の応用については前報<sup>(2)</sup>に詳しいので, ここでは省略する。

### 7-2. ハザードの検出と除去<sup>(15)</sup>

ハザードの検出と除去においては, 真理値  $\frac{1}{2}$  に, 0 から 1 または 1 から 0 への推移状態, すなわち遷移状態という意味づけをすることにより, B-3 値論理代数, B-3 値論理関数が利用される。

Yoeli, Rinon<sup>(12)</sup>により, B-3 値論理代数を適用することにより組み合わせ回路における静的ハザードの検出が行なわれ, 双入力変数の変化および順序回路におけるハザードの検出へと拡張したのは Eichelberger<sup>(13)</sup>であり, これらの結果

を用いて杉野, 稲垣, 福村<sup>(14)</sup> はブール方程式を解くことにより入力変数変化の静的ハザードの検出方法を示した。

ある2値論理回路網がAND, OR, NOT 回路の組合で構成されているとする<sup>\*2</sup>。これをB-3 値論理関数の式として表現できる。このとき, この2値論理回路網が表現しているB-3 値論理関数Fについて次のことが成立する。

定理6<sup>(13)</sup>; ある2値論理回路網を表現しているB-3 値論理関数Fにおいて,  $F(a) = \frac{1}{2}$  となるのは,  $a$ のうちの $\frac{1}{2}$ に相当する入力変数が変化したときに, この回路網の出力が変化する可能性を含むときおよびそのときに限る。||

証明) AND, OR, NOT の真理値表(表1~表3)より, これらの基本回路の出力が $\frac{1}{2}$ となるのは,  $\frac{1}{2}$ に割り当てられた入力変数が変化するとき出力が変化する可能性を含むときおよびそのときに限る。論理回路網はこれらの基本回路の出力が次の基本回路の入力となっており, 最終出力についても上のことがふえて, 定理が成立する。||

よって, 静的ハザードは次のように定義される。

定義14<sup>(14),(15)</sup>; FをB-3 値論理関数,  $(a, b) \in V_2^n$ を二つの入力状態とする。次の条件を満たすとき,  $(a \rightarrow b)$  の変化において,

\*2: NOR, NAND などの基本回路で構成されている論理回路網でもまったく同様である。

$F$ に静的ハガードが存在する\*3 という。

$$(i) \quad F(a) = F(b),$$

$$(ii) \quad F(a \cup b) = \frac{1}{2} \quad ||$$

ここで、 $(a \cup b)$  は半順序関係  $\gamma$  における上限を表わし、二つの入力状態  $a, b$  で変化しているところを  $\frac{1}{2}$  と置き換えて得られる  $\mathcal{V}_3^n$  の元である。

静的ハガードは定義 14 の (i) が

$$F(a) = F(b) = 0$$

のとき 0ハガード、

$$F(a) = F(b) = 1$$

のとき 1ハガード といわれる。また、静的ハガードは次のようにも分類される。

定義 15;  $B=3$  値論理関数  $F$  は、 $(a \rightarrow b)$  の入力変化において静的ハガードが存在して

$$F((a \cup b)^*) = \{0, 1\}$$

なるとき、これを関数ハガード、

$$F((a \cup b)^*) \neq \{0, 1\}$$

なるとき、これを論理ハガードという。||

\*3: ここで、ハガードが存在するとは、ハガードが発生する可能性があるということ、すなわち時間遅延要素をとう入すればハガードを生じさせることができるという意味である。

B-3 値論理代数, B-3 値論理関数の理論を用いると, 関数ハガードが除去できないこと, 論理ハガードが除去できることなどが簡単に示される。すべての論理ハガードが除去された関数は, P 形論理関数である。また, B-3 値加法標準形は, 相補項を含まない部令の加法標準形と, 相補項を含む部令の相補加法標準形に分けられたが, このとき, 次のことがいえる。

定理 7; 加法標準形に 0 ハガードが存在すれば, それは必ず関数ハガードである。||

証明) 0 ハガードの存在条件は

$$F(1a) = F(1b) = 0 \text{ ----- (4)}$$

$$F(1a \cup 1b) = \frac{1}{2} \text{ ----- (5)}$$

である。しかるに, 定理 5 より加法標準形  $F$  において (5) 式は

$$F((1a \cup 1b)^*) \neq \{0\}$$

を意味している。すなわち  $F((1a \cup 1b)^*)$  は  $\{1\}$  か  $\{0, 1\}$  である。ところで, (4) より  $\{1\}$  ではあり得ない。さて,

$$F((1a \cup 1b)^*) = \{0, 1\}$$

すなわち関数ハガードである。||

定理 8; 相補加法標準形には, 1 ハガードおよび関数ハガードは存在しない。||

証明) 相補加法標準形  $F$  では,

すべての  $(a \in T_3^n)$  について  $F(a^*) = \{0\}$

であるから定義より明らか。■

なお、次のことが成り立つのもほとんど明らかである。

定理 9;  $B-3$  値論理関数  $F$  において,  $F(a) = F(b)$  で,

$(a \rightarrow b)$  の入力変化で静的ハガードが存在しないならば,

$$a \cup b \text{ と } (a' \cup b)$$

なるすべての  $(a' \rightarrow b)$  においても静的ハガードは存在しない。||

(証明) 略。

定理 10;  $B-3$  値論理関数  $F$  において,  $(a \rightarrow b)$  の入力変化で静的ハガードが存在すれば,

$$F(a') = F(b') \text{ で } (a' \cup b) \text{ と } (a \cup b)$$

なるすべての  $(a' \rightarrow b')$  においても静的ハガードが存在する。||

(証明) 略。

### 7-3. 素項 (prime Implicant) 展開を求める方法<sup>(16)</sup>

ある 2 値論理関数  $f$  を表現する論理式  $\psi$  が素項展開であるとは,  $\psi$  を  $B-3$  値論理関数として見たとき,  $\psi$  が  $P$  形論理関数の  $B-3$  値主加法標準形になっていることに等しい。<sup>(16)</sup>

よって,  $f$  の素項展開を求める問題は,  $\psi$  と  $V$ -equivalent な  $P$  形論理関数の  $B-3$  値主加法標準形を求めることに帰着させられる。

$f$  を表現している論理式  $\psi_0$  が加法標準形ならば,  $\psi_0$  が表現している  $B-3$  値論理関数  $F$  は

$$F(1a) = 0 \iff F(1a^*) = \{0\} \text{-----} (6)$$

が成立している (定理 5)。さて, まず,  $\sim\psi_0$  の  $B-3$  値主加法標準形を求めて, すべての相補項をとり去った式  $\psi_1$  では,  $\psi_1$  が加法標準形であるから  $\psi_1$  が表現する  $B-3$  値論理関数  $F'$  は

$$F'(1a) = 0 \iff F'(1a^*) = \{0\} \text{-----} (7)$$

を満たす。また, 否定をとったから, 0-set は 1-set に変り, 相補項の消去は 1-set に影響を及ぼさないし,  $B-3$  値主加法標準形への変形は関数の値を変えないから, (6) 式より

$$F'(1a) = 1 \iff F'(1a^*) = \{1\} \text{-----} (8)$$

となる。(7), (8) より  $F'$  は  $P$  形論理関数である (定義 9)。故に,  $\psi_1$  は  $P$  形論理関数の  $B-3$  値主加法標準形であるから素項展開で,  $\psi_1$  が表現している 2 値論理関数は明らかに  $\sim\psi_0$  である。この手順を再びくり返して  $\psi_2$  を求めれば,  $f$  に対する素項展開が求まる。

$$[例] \psi_0 = x_2 \sim x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$\begin{aligned} \sim\psi_0 &= (\sim x_2 \vee x_3 \vee \sim x_4) \cdot (\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_4) \cdot (x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3) \\ &= (\sim x_2 \vee \sim x_4 \vee \sim x_1 \cdot x_3) \cdot (x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3) \\ &= \sim x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_4 \vee \sim x_3 \cdot \sim x_4 = \psi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sim \psi_1 &= x_2 \cdot (\sim x_1 \vee x_4) \cdot (x_3 \vee x_4) \\
 &= x_2 \cdot (x_4 \vee \sim x_1) \cdot x_3 \\
 &= x_2 \cdot x_4 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \psi_2 \quad \parallel
 \end{aligned}$$

### § 8. あとがき

B-3 値論理代数, B-3 値論理関数について考察し, これを用いたいくつかの応用例を示した。これ以外にも非同期回路網理論, 故障検出, パターン認識などへの応用もあるが, ここでは省略する。

ここで定義された演算 AND ( $\cdot$ ), OR ( $\vee$ ), NOT ( $\sim$ ) のみでは, 閉包的な完全性の条件を満たさないが, これらの演算は2値論理にかける演算の最も自然な拡張であり, かつ基本的で回路的にも作りやすい。AND, OR にかける演算を加えたら閉包的に完全になるかという点については田原氏<sup>(17)</sup>の研究がある。

B-3 値論理代数の基本的なこと柄については古くから研究されており, また, Fault-Safe 論理, ハザードの検出など多くの分野でその応用例が(ほとんど個別的に)見られている。本報告では, B-3 値論理代数, B-3 値論理関数について統一的に考察し, 応用例などについてもいくつかの新しい事実を示した。ここに述べたことは, かなり有用な手段と

してこれからも用いられること、思われる。

最後に、日頃御指導いただき、明治大学、後藤以弘教授、電子技術総合研究所、駒宮安男電子デバイス部長、長田正情報制御研究室長に感謝致します。また、電子技術総合研究所での研究に御便宜を計っていただいている上境制御部長、佐藤システム制御研究室長、その他制御部の方々に感謝致します。

## § 9. 参考文献

- (1) 井関; 記号論理学, 槇書店, 1968.
- (2) 向殿; 3値を用いた Fail-Safe 論理回路, 数理解析研究所講究録 81, 1970-3.
- (3) 向殿; B-3 値論理関数について, 通信学会オートマトン研究会資料, 1970-12.
- (4) 向殿; C形 Fail-Safe 論理の数学的構造について, 通学会誌, Vol. 52-C, 1969-12.
- (5) 三根, 高岡; 非対称故障論理回路を用いた 2重系の一構成法, 作学会電算機研究会資料, 1967-9.
- (6) 高岡; ある Fail-Safe 論理系について, 数理解析研究所講究録 81, 1970-3.
- (7) 駒宮; 命題値が連続的精度を有する命題論理学とその応用

- 用について, 電研研究報告 498, 1949-12.
- (8) 水本・他; Fuzzy 代数, 数理解析研究所講究録 81, 1970-3.
- (9) 高岡; 多値論理に対するフェイルセーフシステムの構成, 通信学会 Vol. 54-C, 1971-01.
- (10) 土屋; 抵抗-半導体発振器によるフェイルセーフ 3 値論理回路, 通学会電算機研究会資料, 1968-1.
- (11) 渡辺, 浦野; Fail-Safe 論理系の構成理論, 信学会誌, Vol. 52-C, 1969-1.
- (12) M. Yoeli, S. Rinon; Application of Ternary Algebra to the Study of Static Hazards, J.ACM, 11, 1, 1964.
- (13) E. B. Eichelberger; Hazard Detection in Combinational and Sequential Circuits, IBM.J., 9, 2-1965
- (14) 杉野, 稲垣, 福村; 多入力変数の変化による静的ハザードの 3 値論理を用いた一検出法, 通信学会誌, 50, 2, 1967.
- (15) 向殿; 静的ハザードの定式化について, 明治大学科学研究紀要, 9, 1970.
- (16) 向殿; B-3 値論理関数による素項展開の求め方, 通学会誌・オートマトン研究会資料, 1971-3.
- (17) 田中, 田原; 三値論理関数の完全性について, 数理解析研究所講究録 81, 1970-3.