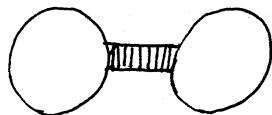


Scharlemann の定理について

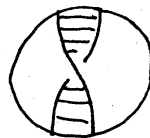
広大理

関根光弘 (Mitsuhiro Sekine)

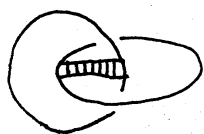
1983年, Scharlemannにより, two components の unknot unlink に band をつけて, one component の unknot となるならば, band は trivial band に isotopic であることが証明された。[S.]



さらに1985年, Bleiler - Scharlemann により, one component の unknot に band をつけて, one component の unknot になるならば, band は trivial band を half twist したものに isotopic であることが証明された。[B-S]



そこでその一般化として, S^3 内の Hopf link に band をつけて, one component の unknot になるならば, その band は,



に isotopic か? という問題が考えられる。

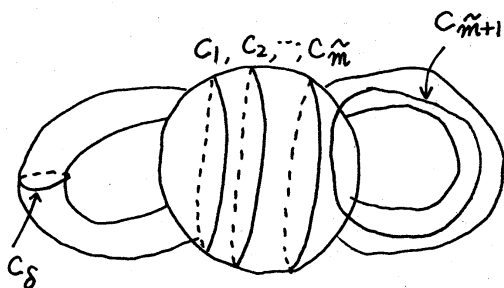
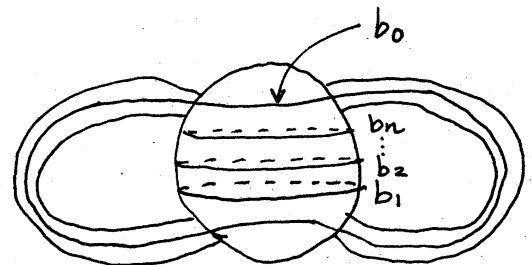
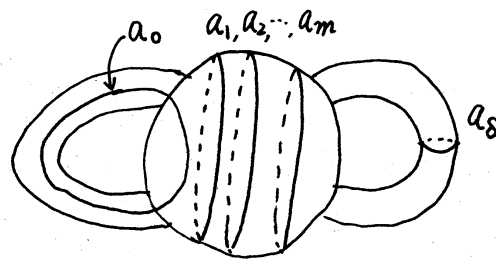
(Hopf link の場合, 以下この band を trivial band と呼ぶことにする。)

この問題について, Scharlemann らの方法を用いることにより, ある条件の下に, 解答を得たので報告する。

§ 1. Main Results

以下, C^∞ -category で考えることにする。

M を oriented, closed, 3-mfd とし, N を M に埋め込まれた a ball with two 1-handles とする。そこで, ∂N 上の simple closed curves $a_0, a_i (1 \leq i \leq m), a_s, b_0, b_j (1 \leq j \leq n), C_k (1 \leq k \leq \tilde{m}), C_{\tilde{m}+1}, C_s$ を 次の図のように定める。



ただし, $a_i \cap C_j = \emptyset$,
 $(0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \tilde{m}+1)$

$a_s \cap C_{\tilde{m}+1} \cap b_0 = \emptyset$,

$C_s \cap a_0 \cap b_0 = \emptyset$ とし,

$a_0, C_{\tilde{m}+1}, b_0$ は, それぞれ 1-handle の部分を何回か,

まいてあるかもしれないが、その数については問わないことにする。また、 $a_0 \cap b_0, (c_{\tilde{m}+1} \cap b_0)$ は、西の 1-handle (東の 1-handle) 上にあるとする。このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 1.1

$\overline{M-N}$ に埋め込まれた planar surfaces P, Q, R で、

$$\partial P = \left(\bigcup_{i=0}^m a_i \right) \cup a_s, \quad \partial Q = \bigcup_{i=0}^n b_i, \quad \partial R = \left(\bigcup_{k=1}^{\tilde{m}+1} c_k \right) \cup c_s \quad \text{及び}$$

条件(*) 「 $P \cap R = \text{a single arc}$, $P \cap Q \cap R = \emptyset$ 」

を満たすものが存在したと仮定する。

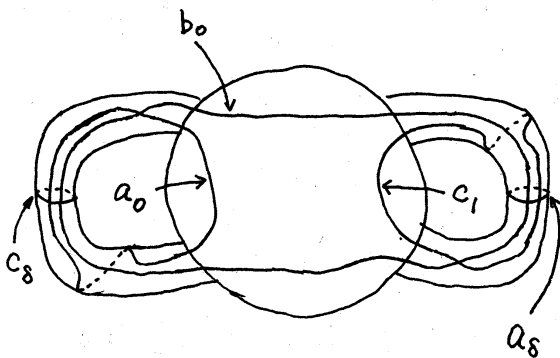
このとき、 P, Q, R を $\overline{M-N}$ に埋め込まれた planar surfaces P', Q', R' にとりかえて、

(i) $m = \tilde{m} = 0$ かつ $n = 0$ あるいは

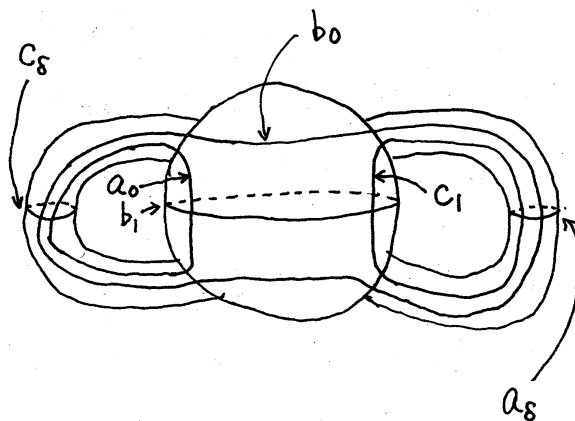
(ii) $m = \tilde{m} = 0$ かつ $n = 1$ で、

それぞれ条件(*) を満たすようにできる。

(i)



(ii)



Corollary 1.2

$\gamma_P \cup \gamma_R$ を S^3 内の Hopf link とする。

γ_P と γ_R をつなぐ band b で, $\gamma_P \#_b \gamma_R$ が unknot になり, (ただし, $\gamma_P \#_b \gamma_R$ は b による band sum)

更に, 条件(*) 「 S^3 に埋め込まれた disks D_P, D_Q, D_R で, それぞれ $\gamma_P, \gamma_P \#_b \gamma_R, \gamma_R$ によって bound され, $D_P \cap D_R = \text{a single arc}$, $D_P \cap D_Q \cap D_R = \emptyset$ を満たすものが存在する。」 を満たすと仮定する。

このとき, b は trivial band に isotopic である。

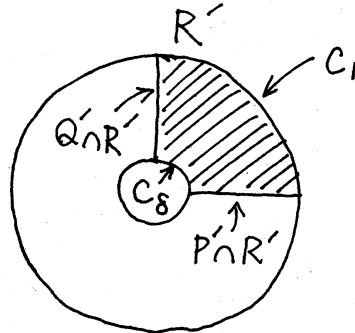
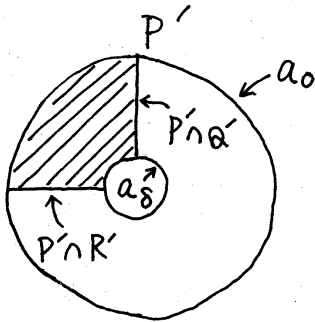
Th. 1.1 を用いた Cor 1.2 の証明

$\gamma_P \cup b \cup \gamma_R$ の tubular nbd を N とする。そこで, $\overline{D_P - N}, \overline{D_Q - N}, \overline{D_R - N}$ をそれぞれあらたに P, Q, R と書く。 $a_0, b_0, c_{\hat{m}+1}$ をそれぞれ $\gamma_P, \gamma_P \#_b \gamma_R, \gamma_R$ を ∂N 上に平行移動したもの, a_i ($1 \leq i \leq m$), b_j ($1 \leq j \leq n$), c_k ($1 \leq k \leq \hat{m}$) をそれぞれ b の tub. nbd と P, Q, R の交わりとする。条件(*)により, 一つずつであることが保証された γ_P, γ_R の tub. nbd と $R, (P)$ の交わりを $a_s, (c_s)$ とすると, Th 1.1 の仮定を満たす。従って (i) あるいは (ii) が成り立つ。

(i) が成り立つとすれば, Q は disk である。 $X = Q \cup b$ は, S^1 上の I-bundle であり, $\partial X = \gamma_P \cup \gamma_R$ 。ここで γ_P, γ_R はそれぞれ unknot なので, X の base space としての S^1 は unknot。

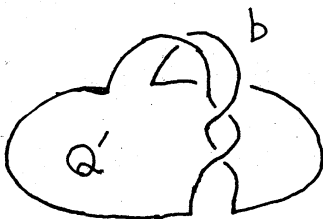
従って X はねじれにより決まるが, $\gamma_P \cup \gamma_R$ が Hopf link であることにより, Cor. の結果が成り立つ。

(ii) が成り立つとすれば, Q' は annulus であり, b が Q' を 1 回貫いている状況である。そこで Q' を $(Q' \cap P') \cup (Q' \cap R')$ によって, 2つの部分に分け, 一方を $\tilde{Q}$ とし, それに対応する b の部分を $\tilde{b}$ とすると, $X = \tilde{Q} \cup \tilde{b}$ は S^4 上の I -bundle であり ∂X は, one component の unknot である。(下図において, 斜線をひいた2つの disks を $P' \cap R'$ でくっつけることによってできる disk $\tilde{D}$ は ∂X に bound されている。) 従って [B-S] により,

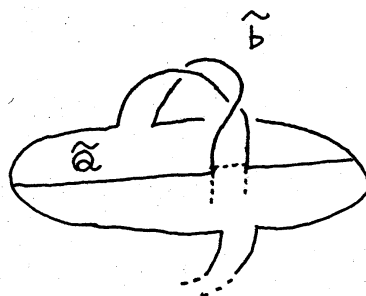


$\tilde{b}$ は, trivial band を half-twist したものである。しかも, $(\text{Int } \tilde{D}) \cap X = \emptyset$ なのと, S^3 に P^2 が埋め込まれることになってしまう! 従って, この場合は起こらない。■

(i) の場合



(ii) の場合



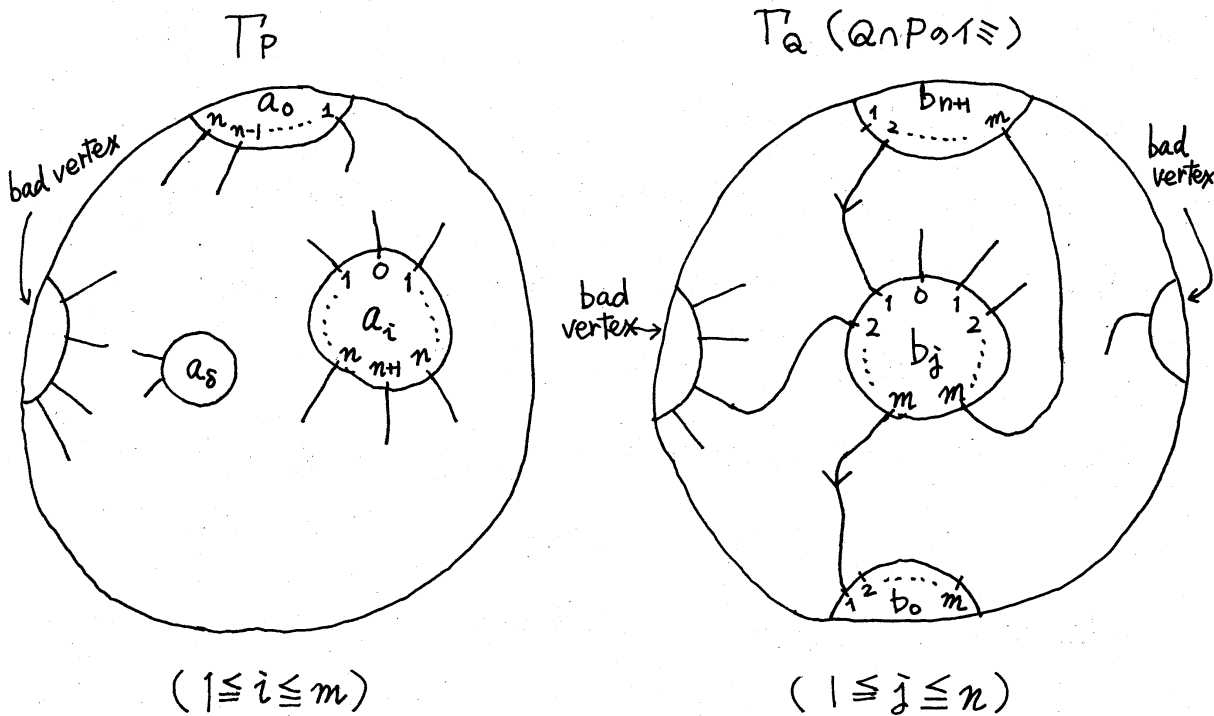
§ 2. Graph の構成及び用語の定義

$Th. 1.1$ を証明するために P, Q, R の交わりの状況を graph 化する。まず P, Q, R を一般の位置に動かすことにより, $P \cap Q, Q \cap R, R \cap P$ は arcs と circles であるとしてよい。そこで "arcs" の部分のみに着目する。このとき, P の上に書かれる Q, R との交わりの様子を次のように graph T_P としてみる。 P を a_0 が外側になるように平面上に置き, $a_i (1 \leq i \leq m)$ と a_s については, それらによってできた穴が, それぞれ太った vertices a_i, a_s であると思う。また, a_0 の ball 部分での $b_j (1 \leq j \leq n)$ 達との交わり全体をあらたに a_0 という vertex であると思い, handle 部分での b_0, c_s との交わり全体を一つの vertex と思う。(この vertex を bad vertex と呼ぶことにする。) Q の上に書かれる R, P との交わりを表す graph T_Q についても, Q を b_0 が外側になるように平面上に置き, $b_j (1 \leq j \leq n)$ については, それらによってできた穴が, それぞれ太った vertices b_j であると思い, b_0 の ball 部分での $a_i, c_k (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq \tilde{m})$ 達との交わりのうち, ∂N 上で南にある部分を b_0 という vertex, 北にある部分を b_{m+1} という vertex, 西(東)の handle 部分にある $a_0, c_s (c_{\tilde{m}+1}, a_s)$ との交わりの部分をそれぞれ一つの bad vertex と思うことにする。 T_R についても同様。さらに各 graph の edges は, 交わりの arcs であると思う。

次に, T_P 上の vertex $a_i (0 \leq i \leq m)$ において, a_i からでている

ある edge の一端が T_Q 上でみたとき, $b_j (1 \leq j \leq n+1)$ にある場合, T_P 上の, その edge の端に, j と labelling する。(bad vertex につながる edge には labelling はしない。) T_Q, T_R の edge についても同様に, 両端に labelling する。そのうえ, 両端に labelling された edge に対し, 大きい数から小さい数の方へ向きをつける。両端の数が同じであるとき, それを level edge と呼ぶことにする。

また, edge の少なくとも一端が bad vertex である場合, それを bad edge と呼び, それ以外の edge を good edge と呼ぶ。(図参照)



(T_Q には同様に $Q \cap R$ の意味での edge, label も書かれている。
 T_R の様子も同様。)

ここで, $\Gamma (= \Gamma_P \text{ or } \Gamma_Q \text{ or } \Gamma_R)$ についての用語を準備する。

Γ 内の a circuit とは, *an embedded circle* となる *sub graph* とする。

a loop とは, 1つの *edge* から成る *circuit* のこととする。

a level loop とは, *loop* かつ *level edge* であるものとする。

a cycle とは, *circuit* であり, その全ての *edges* に向きがついていて, しかも, その向きが *circuit* 全体に拡張するものとする。

さらに, Γ_P (Γ_R) の場合, その全ての *edges* が $P \cap Q$ ($Q \cap R$) に属するものとし, Γ_Q の場合, $P \cap Q$ or $Q \cap R$ のどちらか一方に属するものとする。

a semi-cycle とは, *circuit* であり, 少なくとも一つの *edge* に向きがついていて, しかもその向きが *circuit* 全体に, 自然に拡張するもので, さらに *cycle* の場合と同じく, *edges* の属する集合に関する条件を満たすものとする。

a good cycle とは, *cycle* の全ての *edges* が *good edges* であるものとする。 a good semi-cycle についても同様。

a uni cycle とは, *cycle* かつ *loop* のこととする。

a source (sink) とは, ある一つの *vertex* で, そこに入ってくる向き, (そこから出ていく向き) の *edge* が, ないものとする。

すると, 簡単な考察により, 次の事実が示される。

(証明略)

Fact 1 T_P, T_Q, T_R には level loop がない。

Fact 2 an innermost good semi-cycle が内部に vertices をもつならば, それらの中には, source あるいは, sink が必ずある。

§ 3. Th. 1. 1 の証明の方針

まず, 次の事実を示す。

Proposition 3.1

$m = 0$ or $n = 0$ or $\tilde{m} = 0$ のとき, Th. 1. 1 は成り立つ。

(証明の方針)

$m = n = \tilde{m} = 0$ あるいは, $m = \tilde{m} = 0$ かつ $n = 1$ のとき, Th が成り立つのは明らか。従って, 次の3つの claim を示せばよい。

claim. 1 $m = 0 \implies n = 0$ or $n = 1$

($\tilde{m} = 0 \implies n = 0$ or $n = 1$)

claim. 2 $n = 0 \implies m = 0$ ($n = 0 \implies \tilde{m} = 0$)

claim. 3. $m = 0$ かつ $n = 1 \implies \tilde{m} = 0$

($\tilde{m} = 0$ かつ $n = 1 \implies m = 0$)

それぞれの claim の証明には, 各 graph の中に, innermost unicycle or outermost bad edge があれば, それらを用いて P or Q or R を surgery して, boundary の components を減らす

ことができて, induction にのる, という議論を用いる。
その為, combinatoric な議論により, それらを探し出してやる。

Prop 3.1 により, $m, n, \tilde{m} \geq 1$ と仮定し, なおかつ, $m, n, \tilde{m}$ が, これ以上減らないという仮定の下に, T_h を証明すればよい。
ところが, この仮定をおくと矛盾がでることを以下で示すことにより, T_h の証明が完結するわけである。

Proposition 3.2

$T_P(P_R)$ の innermost good cycle は, 内部に vertices をもつ。
(略証)

もたないと仮定して, n が減ることを示す。

Prop. の cycle を γ とする。 γ が内部に vertices をもたないと仮定すると, γ の内部に innermost good semi-cycle γ_0 が存在して, γ_0 は, もはや, 内部に label さえも, もたない状況であるとしてよい。
すると, ある i ($1 \leq i \leq n+1$) が存在して, γ_0 を構成する edges の両端の label は, 全て i と $i-1$ になってしまう。(LS の議論参照)

そこで, γ_0 が囲む P 内の disk を D とする。

$2 \leq i \leq n$ のとき, $\partial A = b_i \cup b_{i-1}$, かつ $A - \partial A \subset \text{Int}(M - N)$ なる annulus A をはる。そして, D に平行な 2 枚の disk D_1, D_2 を用いて, Q を surgery する。得られたものを $\tilde{Q}$ とする。

すると, D_1, D_2 の内部には, P, R との交わりはなく, A 上には, P, R との交わりはあるが, そこでは $P \cap R = \emptyset$ である。しかも, $\tilde{Q}$ と Q で変化した所は, b_i と b_{i-1} のごく付近のみであるから, $P \cap R = 1\text{-arc}$ の部分は, はずれていると思ってよい。従って, $\tilde{Q}$ は, planar surface で, n が 2 つ減ったばかりでなく, (*) という条件を満たしている。

$i = 1$ or $n+1$ のとき. A のかわりに, band B をはって, Q を surgery すると, 同様に, (*) という条件を満たしつつ n が 1 つ減る。■

Prop. 3.2 と同様にして, 次の事実が示される。

Proposition 3.3

T_Q の $P \cap Q$ の意味での innermost good semi-cycle は, 内部に vertices をもつ。($Q \cap R$ の意味でも, 同様)

ただし, この場合, Prop 3.2 と同様に, D を見い出す所までは, よいが, その後, D を用いて surgery をすると, m は減るが, 条件 (*) がくずれてしまう場合がある。それは, Y_0 の内部に, $Q \cap R$ の意味での label が存在する場合である。このときには, 次の Lemma が必要になる。(証明略)

Lemma 3.4

D の内部に, $Q \cap R$ の意味での, good semi-cycle が存在する。

Lemma 3.4により, 存在の保証された $\tilde{\gamma}$ の内部にある inner-most good semi-cycle $\tilde{\gamma}_0$ をとり, その囲む Q 内の disk $\tilde{D}$ を用いて, surgery をすれば, 条件(*)を満たしつつ, $\tilde{m}$ を減らすことができる。

話が前後してしまったが, good cycle の存在を示す次の事実も重要である。

Proposition 3.5

次の二つの事実のうち, 少なくとも一方は成り立つ。

- (1) T_Q に, $P \cap Q$ の意味での good cycle が存在する。
- (2) T_Q に, $Q \cap R$ の意味での good cycle が存在する。

以下, (1) が成り立ったと仮定する。そして, T_Q の $P \cap Q$ の意味での graph のみを考えることにする。すると, Fact 2 により, vertices には, source or sink が含まれていることになるが, combinatoric な議論を用いると, 両方は含まないことが示される。

従って, Case. 1 sink のみを含み source を含まない
あるいは, Case. 2 source のみを含み sink を含まない
となる。

Case 1 の場合, [S, §6] の議論により, Case 2 の場合,
[B-S §5-§9] の議論により, 矛盾が示される。

参考文献

[B-S] Bleiler S. and Scharlemann M.

A projective plane in $\mathbb{R}^4$ with three critical
points is standard, Strongly invertible
knots have property P preprint

[S] Scharlemann M.

Smooth spheres in $\mathbb{R}^4$ with four critical
points are standard.

Invent. Math. 79, 125-141 (1985)