

項書き換えシステムの簡約化戦略について

豊橋技科大

直井 徹 (Tohru Naoi)

山下雅史 (Masafumi Yamashita)

茨木俊秀 (Toshihide Ibaraki)

本多我雄 (Namio Honda)

1. はじめに

あいまいでない線形項書き換えシステムに対する正規化戦略として call by need が知られている [2]。本報告では、適当な十分条件のもとでは、あいまいさを許しても依然 call by need が正規化戦略であることを示す。

2. 基本概念

2.1 諸定義

関数記号の有限集合 $\mathcal{F}$ と、変数記号の可算集合 $\mathcal{V}$ から生成される項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ とかく ($\in \mathcal{T}$ し, $\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)。 $\mathbb{P}^*$ を正整数の列全体の集合とし、その元を出現と呼ぶ。 $\mathbb{P}^*$ の空列は ε で表す。 $\mathbb{P}^*$ 上の順序 $\leq$ を, $u \leq v$ iff $\exists w \text{ } uw = v$ で定義し, $u < v$ iff $u \leq v$ かつ $u \neq v$ とする。また, 関係 $\perp$

ε , $u \perp v$ iff $u \not\geq v$ かつ $v \not\geq u$ と定義し, このとき, u と v は独立であるという [1].

項 M の部分項の出現の集合 $\mathcal{O}(M)$ と, 出現 $u \in \mathcal{O}(M)$ における M の部分項 M/u を次で定義する [1]:

$$(i) M = x \in \mathcal{V} \text{ のとき, } \mathcal{O}(x) = \{\varepsilon\}, \quad x/\varepsilon = x,$$

$$(ii) M = f(M_1, \dots, M_m) \text{ のとき, } \mathcal{O}(M) = \{\varepsilon\} \cup \{i.v \mid i=1, 2, \dots, m, v \in \mathcal{O}(M_i)\}, \\ M/\varepsilon = M, \quad M/i.v = M_i/v.$$

項 M の出現 u における部分項 M/u を, N で置き換えで得らる項を $M[u \leftarrow N]$ とかく [1].

代入とは, 写像 $\sigma: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ である。その定義域を次により, $\mathcal{F}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ へと拡張する:

$$\sigma(f(M_1, \dots, M_m)) = f(\sigma(M_1), \dots, \sigma(M_m))$$

代入を用いて, $\mathcal{F}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の擬順序 $\sqsubseteq$ と関係 $\uparrow$ を次で定義する: $M \sqsubseteq N$ iff $\exists \sigma \quad M = \sigma(N)$, $M \uparrow N$ iff $\exists P \quad P \sqsubseteq M$ かつ $P \sqsubseteq N$.

2.2 項書き換えシステム

集合 $\Sigma = \{A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_m \rightarrow B_m\} \subset \mathcal{F}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \times \mathcal{F}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ が, $\mathcal{V}(A_i) \supset \mathcal{V}(B_i)$ をみたすとき ($1 \leq i \leq m$), Σ を項書き換えシステムといい, Σ の元を書き換え規則という。ただし, $\mathcal{V}(M)$ は項 M に現れる変数記号の集合である。

代入 σ , 出現 $u \in \mathcal{O}(M)$, 規則 $A \rightarrow B \in \Sigma$ があつて, $M/u = \sigma(A)$, $N = M[u \leftarrow \sigma(B)]$ とするとき, M は (u に $A \rightarrow B$ を用いて) N に書き換えるという。このとき, 3項組 $\xi = \langle M, u, A \rightarrow B \rangle$ をリダクションと呼び,

$$\xi: M \xrightarrow{\Sigma} N (u; A \rightarrow B)$$

と表す。 ξ と $(u; A \rightarrow B)$ は各々省略することがある。

リダクション列 $\xi = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$ ($\xi_i: M_{i-1} \xrightarrow{\Sigma} M_i$, $1 \leq i \leq m$) が項 M_0 に始まり項 M_m に終わることを, $\xi: M_0 \xrightarrow{\Sigma^*} M_m$ と表す。 $\xi: M \xrightarrow{\Sigma^*} N$; $\eta: N \xrightarrow{\Sigma^*} P$ の連接を $\xi\eta$ とかく。

項 M の書き換え可能な部分項を M のリデックスという。 M にリデックスが存在しないとき, M を正規形という。また, このときリダクション列 $N \xrightarrow{\Sigma^*} M$ があるなら, N は正規形 M をもつという。

M の互いに独立なリデックスの出現 $u_1, \dots, u_m$ ($m \geq 0$) を同時に書き換えて項 N が得られるとき, $\xi: M \xrightarrow{\Sigma} N$ とかくとき ξ を並列リダクションと呼ぶ。

項 M の非変数部分項の出現の集合を $\mathcal{C}(M) = \{u \mid M/u \notin \mathcal{D}\}$ とし, Σ の危険性を定義する:

[定義 2.1] $A \rightarrow B$, $A' \rightarrow B' \in \Sigma$ と $u \in \mathcal{C}(A)$ に対し, 代入 σ, σ' があつて $\sigma(A/u) = \sigma'(A')$ とするとき, リダクションの対,

$$\langle \sigma(A) \xrightarrow{\Sigma} \sigma(A)[u \leftarrow \sigma'(B')], \sigma(A) \xrightarrow{\Sigma} \sigma(B) \rangle$$

を Σ の危険対という(注1)。ただし, σ, σ' とし Σ は, $\sigma(A/u) = \sigma'(A')$ を成り立たせる代入のうち最も一般のものを選ぶ。
また, $A \rightarrow B$ と $A' \rightarrow B'$ が同一の規則で, $u = \varepsilon$ である場合は除く。■

Σ が危険対をもつとき, Σ はあいまいであるという。

項 M の中に同一の変数が2度以上現れたいとき, M を線形であるという。また, Σ のどの規則の左辺 A_i も線形であるとき, Σ は線形であるという。

以下では, Σ の線形性と, Σ のどの規則の左辺も変数記号でないことを仮定する。

なお, 以後では混同の無い限り添字 Σ を省略する。

2.3 リダクションによる出現の伝達

リダクション $\xi: M \rightarrow N(u; A \rightarrow B)$ に対し, $\mathcal{O}(M)$ から $\mathcal{O}(N) \wedge$ の対応 τ_ξ を次の定義し, ξ による出現の伝達とよぶ(注2):
 $v \in \mathcal{O}(M)$ に対し,

(注1) 通常, 危険対とは項の対 $\langle \sigma(A)[u \leftarrow \sigma'(B')], \sigma(B) \rangle$ をいう[1, 3]。しかし, ここでは上のようには定義しておく。

(注2) residual の概念[2, 4]を修正したものである。

$$\tau_{\xi}(v) = \begin{cases} \{v\} & \text{if } v < u \text{ または } v \perp u, \\ \{u\} & \text{if } \exists w \in \mathcal{C}(A) \ v = uw, \\ \{uw_2v' \mid v = uw_1v', A/w_1 = x \in \mathcal{V}, B/w_2 = x\} & \\ \text{otherwise.} \end{cases}$$

リダクシヨニ列 $\xi = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$ に対しては, $\tau_{\xi} \in \tau_{\xi_1}, \tau_{\xi_2}, \dots, \tau_{\xi_m}$ の合成対応として定義する。ただし, ξ が空列のときは ξ が生ずる項 M に対し, $\tau_{\xi} \in \mathcal{O}(M)$ 上の恒等写像としておく。また, 並列リダクシヨニに対しては, 上の定義に準ずるものとする。

2.4 τ 伝流性

伝流性 (Church-Rosser 性) [1, 3] を強めた次のような性質を定義しておく。

〔定義 2.2〕 Σ が τ 伝流性をもつとは, 次の成立すること
をいう: $\forall \xi: M \rightarrow N \quad \xi': M \rightarrow N' \quad \exists \eta: N \rightarrow P \quad \eta': N' \rightarrow P \quad \tau_{\xi}\eta = \tau_{\xi'}\eta'.$

■

τ 伝流性の判別には, 伝流性の十分条件として知られる種々のものが [1, 3], ほぼ同様の形で適用できる。次はその一例でもある。

[補題 2.1] Σ が線形であり, その任意の危険対 $\langle \xi: M \rightarrow P, \eta: M \rightarrow Q \rangle$ に対し, $\xi': P \rightarrow Q$ があって $\tau_{\xi\xi'} = \tau_\eta$ となるならば, Σ は τ 合流性をもつ。■

[系] あいまいでない線形項書き換えシステムは, τ 合流性をもつ。■

[例 2.1] $\Sigma_{or} = \{or(ff, x) \rightarrow x, or(x, ff) \rightarrow x, or(tt, tt) \rightarrow tt\}$ は, 上の補題より, τ 合流性をもつ。■

本章では, 無あいまい性より緩い制約, τ 合流性を仮定する。

3. Call by need

3.1 必須リデックス

項 M の u にあける部分項が, $\forall \xi: M \rightarrow N \quad \tau_\xi(u) \neq \phi$ をみたすとき, 必須部分項であるという。 M の必須部分項の出現の集合を $N(M)$ とかく。特に, 必須部分項がリデックスであるとき, M を必須リデックスという(注3)。必須リデックスを書き換えるリダクションを必須リダクションと呼ぶ。

(注3) この定義は, [2] の M よりやや緩い。

正規形をもつ任意の項 M に対し, M から始まる無限必須リダクシヨニ則が存在しないとき, (Σ にあいて) call by need は正規化戦略であるという。これに代する十分条件を 2 つ示す。

[定理 3.1] Σ は線形で, τ 合流性を見たとする。このとき任意の危険対 $\langle M \rightarrow P, M \rightarrow Q \rangle$ にあいて $P = Q$ となるならば, call by need は正規化戦略である。■

[系] Σ があいまいでなく, 線形ならば, call by need は正規化戦略である。■

上記の系は [2] の結果に相当する。

[例 3.1] 例 2.1 の Σ_{or} はあいまいであるが, 上の定理より, call by need が正規化戦略になると判る。一方, τ 合流性を見たとない次の例では, そうでない: $\Sigma'_{or} = \{ or(tt, x) \rightarrow tt, or(x, tt) \rightarrow tt, or(ff, ff) \rightarrow ff \}$ 。■

[定理 3.2] Σ による, ある空でない必須リダクシヨニ則 $\xi: M \rightsquigarrow N$ に対し, $\eta: M \rightarrow N$ ($\varepsilon; M \rightarrow N$) とし ε と η と $\tau_\xi = \tau_\eta$ とする

とする。このとき、 Σ について call by need が正規化戦略であるならば、 $\Sigma \cup \{M \rightarrow N\}$ についてもそうである。■

[例 3.2] $\Sigma = \{f(x) \rightarrow g(x, f(x)), g(a, x) \rightarrow a\}$ について、 $f(a) \rightarrow g(a, f(a)) \rightarrow a$ 。そこでまず Σ に定理 3.1 の系を用い、次に $\Sigma' = \Sigma \cup \{f(a) \rightarrow a\}$ に定理 3.2 を用いれば、あいまいな Σ' についても call by need は正規化戦略であることが導かれる。

4. 必須リテックスの計算

前章の定理が適用できる場合、与えられた項に対しその必須リテックスを少なくともひとつ発見できる手段を与えておけば、必ず正規形に到達できる（もし、存在するならば）ことになる。Huet と Lévy は、あいまいでない線形項書き換えシステムが strong sequentiality をみたすとき、必須リテックスを線形時間で計算できることを導いた [2]。本章では、その結果があいまいさを許しても成立していることを示す。

新しい変数記号の可算集合 $\mathcal{V}'$ ($\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$) を加えて生成される項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$ の元 $\bar{M}$ に対し、 $\text{null}(\bar{M}) = \{u \mid \bar{M}/u \in \mathcal{V}'\}$ を $\bar{M}$ の欠損した部分項の出現の集合という。代入 σ を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$ 上に拡張しておく。

[定義 4.1] Σ の左辺の集合を $\mathcal{L} = \{A \mid A \rightarrow B \in \Sigma\}$, 欠損左辺の集合を $\mathcal{L}^{\text{null}} = \{A[u_i \leftarrow \bar{x}_i \mid 1 \leq i \leq m] \mid A \in \mathcal{L}, \{u_1, \dots, u_m\} \subset C(A) \text{ は互いに独立な出現の集合}, \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\} \subset \mathcal{V}'\}$ とする。また, 拡張左辺の集合 $\mathcal{L}^{\text{ext}}$ を次で定義する:

$$(i) \mathcal{L} \subset \mathcal{L}^{\text{ext}},$$

$$(ii) \bar{A} \in \mathcal{L}^{\text{null}}, \text{null}(\bar{A}) = \{u_1, \dots, u_m\}, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m \in \mathcal{L}^{\text{ext}} \text{ のとき, } \bar{A}[u_i \leftarrow \tilde{A}_i \mid 1 \leq i \leq m] \in \mathcal{L}^{\text{ext}}.$$

ただし, $\mathcal{V}(\bar{A}) \cap \mathcal{V}(\tilde{A}_i) = \emptyset \ (1 \leq i \leq m)$, $\mathcal{V}(\tilde{A}_i) \cap \mathcal{V}(\tilde{A}_j) = \emptyset \ (i \neq j; 1 \leq i, j \leq m)$ とするようにする。■

$\mathcal{L}^{\text{ext}} \subset \mathcal{I}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ である。また, Σ の稜形性より, $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{\text{null}}, \mathcal{L}^{\text{ext}}$ の全ての元が稜形である。

項 M の共有するリテラルの出現の集合 $\mathcal{S}(M)$ を次で定義しておく: $u \in \mathcal{S}(M) \text{ iff } \forall v \in \mathcal{O}(M) \ \forall \tilde{A} \in \mathcal{L}^{\text{ext}} \ M/v \models \tilde{A} \text{ かつ } u = v w \text{ ならば } w \in C(\tilde{A})$ 。すなわち, u のリテラルは M の自身よりさらにマックする全ての拡張左辺に (その非変数部分項として) 共有されている。 $\mathcal{S}(M)$ は左辺の情報のみから計算できることに注意する。

[補題 4.1] $\mathcal{S}(M) \subset \mathcal{N}(M)$. ■

ここで、欠損左辺 $\bar{A} \in \mathcal{L}^{\text{null}}$ に対し、その共有する欠損部分項の出現の集合を $S^{\text{null}}(\bar{A}) = \{u \in \text{null}(\bar{A}) \mid \forall A \in \mathcal{L} \ A \uparrow \bar{A} \Rightarrow u \in C(A)\}$ とする。また、真の欠損左辺の集合を $\underline{\mathcal{L}}^{\text{null}} = \{\bar{A} \in \mathcal{L}^{\text{null}} \mid \nexists A \in \mathcal{L} \ \bar{A} \triangleright A\}$ とする。次の性質(注4)は可解である:

[性質 4.1] 任意の $\bar{A} \in \underline{\mathcal{L}}^{\text{null}}$ に対し、空でない集合 $\Delta(\bar{A}) \subset S^{\text{null}}(\bar{A})$ があって次をみたす: $\forall u \in \Delta(\bar{A}) \ \forall \bar{A}' \in \underline{\mathcal{L}}^{\text{null}}$
 $\bar{A}[u \leftarrow \bar{A}'] \in \underline{\mathcal{L}}^{\text{null}}$ ならば,

(i) $\exists v \quad uv \in \Delta(\bar{A}[u \leftarrow \bar{A}'])$, かつ

(ii) $\forall v \quad uv \in \Delta(\bar{A}[u \leftarrow \bar{A}']) \Rightarrow v \in \Delta(\bar{A}')$. ■

[補題 4.2] 線形な Σ において性質 4.1 が成立するとき、正規形でない任意の項 M において $S(M) \neq \emptyset$ (注5)。 ■

[定理 4.1] 線形な Σ において性質 4.1 が成立するとき、

(注4) この性質は、[2] の matching dag の存在条件を我々の記法で表わしたものであり、あいまいでない場合には、strong sequentiality と同値であることを示している [2]。

(注5) Huet と Lévy のアルゴリズムを使えば、項のサイズに対し線形時間で $S(M)$ の元をひとつ計算できる。

正規形でない任意の項 M に対し、少なくともひとつの必須リ
 テックスを計算できる。■

[例 4.1] 例 3.2 の Σ' には定理 4.1 が適用できる。例えば、
 $g(f(a), a)$ の必須リテックスは $f(a)$ と求まり、 $f(a) \rightarrow a$ およ
 び $f(x) \rightarrow g(x, f(x))$ のいずれの規則を用いるかは任意である。

5. おわりに

Call by need が正規化戦略であるクラス、および必須リテ
 ックスを計算できるクラスは、ともにあいまいさを許す場合
 へと真に拡張された。なお、後者に関して、strong sequen-
 tiality が共有リテックス $S(M)$ の存在の十分条件であること
 が判っているが、同時に必要条件でもあることを予想してい
 る。

最後に、著者のひとりが日本電信電話公社で実習を行った
 際、討論をいただいた武蔵野電気通信研究所の外山芳人氏に
 謝意を表します。

文献

- [1] Huet, G. "Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems," J. ACM 24-4 (1980).
- [2] Huet, G. and Lévy J.-J. "Call by need computations in non-ambiguous linear term rewriting systems," Rab. Lep. 359, IRIA (1979).
- [3] Knuth, D.E. and Bendix, P.B. "Simple word problems in universal algebras," Computational problems in abstract algebra, Ed. J. Leech, Pergamon Press (1970), pp. 263-297.
- [4] O'Donnel, M. "Computing in systems described by equations," LNCS 58, Springer-Verlag (1977).
- [5] Toyama, Y. "On reduction strategies: abstract approaches," L.A. Symp. (Aug. 1983).