

Kähler 多様体の Chow variety の Kähler 性

— J. Varouchas の紹介 —
[10][11]

京大教養 藤木 明

§1. まず結果の紹介から始める.

(1.1) X を複素多様体とする. 整数 $g \geq 0$ に対し X 上のコンパクト g -サイクルとは形式的有限和 $\sum n_i A_i$ をいう. 但し n_i は正整数, A_i は既約かつコンパクトな X の g 次元解析的部分集合. $B_g(X) = \{X \text{ 上のコンパクト } g\text{-サイクル}\}$, $B(X) = \coprod_{g \geq 0} B_g(X)$ とおく. 次が知られている.定理 (Barlet [1]) $B(X)$ には自然な reduced 複素空間の構造がはいる.注. より正確には, $B(X)$ は, 関手 $B: (A_n)^o \rightarrow (\text{Sets})$, $B(S) = \{S \text{ をパラメタ空間とする } X \text{ 上のコンパクト } g\text{-サイクルの正則族}\}$, を represent する. $B(X)$ を X の Chow variety または Barlet 空間 と呼ぶ.

(1.2) さて Varouchas の結果は次の如くである.

定理. X が Kähler 多様体ならば, $B(X)$ には Kähler (複素)空間の構造がはいる.

Kähler 空間の定義は §2 で復習することにして重要な系をまず述べる.

系 1 X を連結 Kähler 多様体, Y を正規複素空間とする. $f: X \rightarrow Y$ と上の固有正則写像で, $g = \dim X_y$ は y によらないとする. このとき, Y は Kähler 空間である.証明 $X_y := f^{-1}(y)$ の定義する X のコンパクト g -サイクルを $[X_y]$ で表わすと, Y の正則性により (cf. [1]), $\{[X_y]\}_{y \in Y}$ は Y をパラメタ空間とする X 上のコンパクト g -サイクルの正則族とみなしうる. $\tau: Y \rightarrow B_g(X)$ を universal map とすると明らかにか τ は injective である. 故に embedding であることが容易にわか

る。したがって Kähler 空間 $B(X)$ の部分空間として Y も Kähler.

注 Y が正規でないとき系 1 は成立しない。(4.1) 参照.

例 X は Kähler 多様体, G は X に正則に作用する有限群とする. $Y = X/G$ は商空間, $f: X \rightarrow Y$ は自然写像とする. f は明らかに系 1 の条件を満たすから Y は Kähler 空間である. たとえば Kähler 多様体 S の n 次対称積 $S^{(n)} := S \times \cdots \times S / n$ 次対称群は Kähler 空間である.

(1.3) コムパクト Kähler 多様体の bimeromorphic structure を調べるため筆者は [5] に class $\mathcal{C}$ の多様体の概念を導入した.

定義 X は reduced なコムパクト複素空間とする. このとき X が "class $\mathcal{C}$ に属する" とは, X があるコムパクト Kähler 多様体の有理型写像になっているときをいう. すなわち $X \in \mathcal{C} \iff \exists$ コムパクト Kähler 多様体 Z , $\exists$ generically surjective な有理型写像 $h: Z \rightarrow X$.

次の結果は当初から期待されていた。(cf. [5][7])

系 2 X が class $\mathcal{C}$ に属するための必要(十分)条件は, X がコムパクト Kähler 多様体と双有理型同値であることである.

証明 定義にいう $h: Z \rightarrow X$ をとる. 必要ならば Z を blow up して h は正則であるとしてよい. また既約成分ごとに考えて X は既約, Z は連結, としてよい. さて X の Zariski 開集合 U 上 $h|_U: h^{-1}(U) \rightarrow U$ が flat, (したがって特にファイバー次元 $\delta = \dim Z_x, x \in U$, は一定, となるもの) をとる. 系 1 の証明と同様に (U を縮めて smooth としてよい) 埋め込み $\tau: U \rightarrow B_\delta(X)$ をとるが, τ は実は有理型写像 $\tau^*: X \rightarrow B_\delta(Z)$ に拡張される. (たとえば flattening を用いる.) τ^* の像は X と bimeromorphic な Kähler 空間である. (したがって X は $\mathcal{C}$ の Kähler な非特異モデルとも bimeromorphic である. q.e.d.)

class $\mathcal{C}$ の多様体の性質の多くは定義をこのことから導くことができるが, 次のような例外の一つである。(cf. [7])

系2の系 X がクラス $\mathcal{C}$ の多様体で, $h^{2,0}(X) := \dim H^0(X, \Omega_X^2) = 0$ とみにするならば X は Moishezon 空間である.

証明 " $h^{2,0} = 0$ のコンパクト Kähler 多様体は射影的である" という Kodaira の定理と系2の直ちに仕上がる.

(1.4) 関連した未解決の問題を述べておく.

問題 上記定理および系1において, X が必ずしも非特異でなく, 複素空間の場合にも結果が成立するか.

一方類似の問題として次がある.

問題 (Hironaka [8]) Kähler 空間 X の Douady 空間 D_X は再び Kähler 空間となるか. 特に $f: X \rightarrow Y \in$ Kähler 空間 X から複素空間 Y への faithfully flat な正則写像とするとき Y は再び Kähler 空間か.

X が非特異かつ連結のとき後者はもちろん系1の特殊な場合である. ついでにこの問題の当然な一般化を記しておく.

X を複素空間とし, $\text{Coh}(X) = \{X \text{ 上の解析的連接層}\}$, $\text{Coh}_0(X) = \{F \in \text{Coh}(X); F \text{ の台コンパクト}\}$ とおく. 任意の $E \in \text{Coh}(X)$ に対し

$$\text{Quot}(E/X) = \{F \in \text{Coh}_0(X); F \text{ は } E \text{ の商層}\}$$

と置く. このとき $\text{Quot}(E/X)$ は自然に (必ずしも reduced でない) 複素空間の構造をもつ (Douady). 特に $\text{Quot}(\mathcal{O}_X/X) = D_X$ (X の Douady 空間) である.

問題 X が Kähler 空間のとき $\text{Quot}(E/X)$ も Kähler 空間か.

(1.5) 上の問題を $B(X)$ の場合の結果に帰着させようとするのは自然であろう. 関連した問題を一つ定式化しておく.

$c = \text{cycl}: \text{Coh}_0(X) \rightarrow \Pi B_2(X)$ を, 任意の $F \in \text{Coh}_0(X)$ に対し同様のコンパクトサイクル $(\sum n_i^F A_i^F)_2$ と対応させる写像とする; ここに A_i^F は F の台の既約成分で g -次元のもの全体を動く. 残念ながら $c|_{\text{Quot}(E/X)}$ は一般に正則ではない. さて今 $\{D_{\alpha, \text{red}}\}$ を $D_{X, \text{red}}$ の既約成分の全体とし, 部分集合 $\mathcal{U}_g \subseteq \mathcal{U}$ と, 「 $\alpha \in \mathcal{U}_g$

$\longleftrightarrow Z_1 \subseteq X$ と $d \in D_\alpha$ に対応する部分空間とすると、 d が一般の Z_1 は reduced が「純次元 g 」で定義する。 $\bar{D}_g(X) = \bigcup_{d \in D_g} D_d$ とおく。このとき $\bar{c}_g := c|_{\bar{D}_g(X)}: \bar{D}_g(X) \rightarrow B_g(X)$ は正則写像となる (cf. [1]). 特 $g = 0$ のときは、 $B_0(X) = \coprod_{n \geq 1} X^{(n)}$, $X^{(n)} = X$ の n 次対称積、であるから、 $X^{(n)} = \bar{c}_0^{-1}(X^{(n)})$ とおく。 $\bar{c}_0^n: X^{(n)} \rightarrow X^{(n)}$ は誘導写像とする。

問題 任意の X に対し $\bar{c}_g$ は projective morphism か。 ($\bar{c}_0^n$ についてもこれは明らかではない。)

注 X が非特異かつ、 $\dim X = 2$ のときは、 $X^{(n)}$ も非特異であることが知られている。一方 $\bar{c}_0^n$ の exceptional divisor が既約であるという Briançon (Invent. math. 41) の結果を用いると $\bar{c}_0^n$ の projectivity が容易に示せる。したがって、この場合には、 X が Kähler なら $X^{(n)}$ も Kähler である。

一般の $\text{Quot}(E/X)$ の場合にも C の適当な variation を考えることにより、同様の問題を考えることは意味がある。 (X が projective の場合はこのような variation = 1 が Fogarty (J. Reine Angew. Math.) に与えられている。) いずれにせよ次のような問題が基本的と思われる：問題。 X を連結コンパクト複素多様体、 E を X 上の局所自由連接層、 r を正整数とする。このとき、 $\mathcal{G}_r(E) = \{ \mathcal{F} \in \text{Quot}(E/X) ; \mathcal{F} \text{ torsion free の階数 } r \}$ は $\text{Quot}(E/X)$ の subspace として projective な連結成分をもつか？

(1.6) X がコンパクトなときは、上記の諸問題は、双有理型同値を modulo として (上の系 2 参照) 正しい。すなわち

定理 X をクラス $\mathcal{C}$ に属するコンパクト複素空間とする。このとき (i) $B(X)$ の各既約成分 B_r は再びクラス $\mathcal{C}$ に属する。 (ii) 任意の $E \in \text{Coh}(X)$ に対し、 $\text{Quot}(E/X)_{\text{red}}$ の各既約成分 Q_α は再びクラス $\mathcal{C}$ に属する。

証明については [5][6][4][9] を参照。また $\bar{c}$ (cf. (1.5)) の Moishezon, すなわち projective morphism と bimeromorphic であるこ

とは [6] I の結果からしるがう。

(1.7) さて定理の証明は大きく次の I と II の証明に分解する。

I. 複素空間 Z 上に連続 Kähler コサイクルが存在すれば,
 Z は Kähler 空間である。

II $B(X)$ 上には連続 Kähler コサイクルが存在する。

これに応じて §3 で I の証明と §4 で II の証明を述べる。§2
 では必要な諸定義を述べる。

§2. 本節では主に Kähler 空間及び連続 Kähler コサイクル
 の定義を述べる (cf. (2.4)). 考える関数はすべて実数値とす
 る。

(2.1) $G \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n(z_1, \dots, z_n)$ の開集合, $\varphi \in G$ 上の C^∞ 関数とす
 る。このとき:

φ が strictly plurisubharmonic (resp. plurisubharmonic, resp. pluriharmonic)
 $\longleftrightarrow$ φ の ヘッシアン $H(\varphi) = (\partial^2 \varphi / \partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}$ が各点で positive
 definite (resp. positive semidefinite, resp. = 0)。

以後略して " φ は s. psh (resp. psh, resp. ph)" ということに
 する。特に φ が ph. $\longleftrightarrow \partial \bar{\partial} \varphi \equiv 0$ である。また $n=1$ のとき
 は psh は subharmonic function に他ならない。

psh の場合には条件はさらに次のように言い換えることが
 できる: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し, $H(\varphi)(\lambda) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\beta \partial^2 \varphi / \partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta$ と
 おく。また, $C_0^+(G) = \{ \text{台がコンパクトな } G \text{ 上の非負 } C^\infty \text{ 関数} \}$
 とおく。すると, φ が psh $\longleftrightarrow H(\varphi)(\lambda) \geq 0, \forall \lambda, \longleftrightarrow \int_G H(\varphi)(\lambda) u dV$
 $\geq 0, \forall \lambda, \forall u \in C_0^+(G) \longleftrightarrow H(\varphi)(\lambda)$ は G 上の positive distribution (超
 関数)。(但し dV は $\mathbb{C}^n$ の体積要素。) この関係を利用して
 定義を連続関数の場合に次のように拡張する。

(2.2) φ を G 上の連続関数とする。特に φ は G 上の超関数と
 みなしうる。そこで:

φ が psh $\longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}^n$ に対し $H(\varphi)(\lambda)$ が G 上の positive な超

関数. ただし $\partial\bar{\partial}\varphi/\partial z\partial\bar{z}$ は超関数の意味での導関数.

φ が $s.psh \xleftrightarrow{\text{def}} G$ 上の任意の C^∞ 関数 μ と G の任意の相対コンパクト開集合 V に対し正数 ε が存在し $\varphi + \varepsilon\mu$ は V 上 psh .

φ が $psh \xleftrightarrow{\text{def}} \pm\varphi$ が共に $psh \longleftrightarrow$ 超関数として $\partial\bar{\partial}\varphi=0$.
このとき, 実は φ は C^∞ になる.

(2.3) Z を reduced な複素空間とする. Z の local chart とは, Z のある開集合 U から $\mathbb{C}^n$ の開集合 G への正則埋め込み $j: U \rightarrow G$, という. φ を Z 上の C^∞ 関数 (resp. 連続関数) とする. このとき:

φ が $s.psh$ (resp. psh , resp. psh) $\xleftrightarrow{\text{def}}$ 任意の $z \in Z$ に対し, z の近傍 V , Z の local chart $j: V \rightarrow G \subseteq \mathbb{C}^n$, G 上の C^∞ (resp. 連続) $s.psh$ (resp. psh , resp. psh) ψ が存在し, $\varphi = j^*\psi$ となる.

psh はさらに次のように言い換えられることができる.

補題 φ は Z 上連続とする. このとき φ が $psh \longleftrightarrow$ 単位円板 $H = \{ |t| < 1 \}$ からの任意の正則写像 $h: H \rightarrow Z$ に対し $h^*\varphi$ は H 上 subharmonic.

必要性は明白で十分性は本質的に Forneess-Narasimhan (Math. Ann. 248 (1980)) による. すなわち彼らは上の定義で ψ とし ψ 必ずしも連続でない, psh がとれることを示した. このとき φ がさらに連続なものでおきかえられることは Richberg [12] による.

(2.4) 定義 Y を reduced な複素空間とする.

(1) $\{U_i\}_{i \in I}$ を Y の開被覆, φ_i を U_i 上の C^∞ (resp. 連続) 関数とする. このとき $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ が Y 上 C^∞ (resp. 連続) Kähler コサイクルであるとは, 次の2条件 a) b) がみたされるとき:

- a) φ_i は U_i 上 $s.psh$
- b) $\varphi_i - \varphi_j$ は $U_i \cap U_j$ 上 psh .

(2) Y が Kähler 空間 $\xleftrightarrow{\text{def}}$ Y 上に C^∞ Kähler コサイクルが存在する.

注 Y が複素多様体のときは, $\omega_i = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi_i$ は $\omega|_{U_i} = \omega_i$ により, Y 上の Kähler form ω を定める. (但し Kähler form = real, d-closed, positive (1,1)-form) 逆に任意の Kähler form は, 適当な C^∞ Kähler コサイクルからこのようにして得られる. すなわち, Y が Kähler 多様体 $\iff Y$ は非特異 Kähler 空間.

§3. (1.7) の $I \in X$ がコンパクトの場合に次の強い形で証明する.

定理 A X をコンパクト reduced 複素空間とする. $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $i \in I$, を X 上の連続 Kähler コサイクルとする. このとき X 上の C^∞ Kähler コサイクル $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ で $U_i \cap U_j$ 上 $\varphi_i - \varphi_j = \varphi_i - \varphi_j$ をみたすものが存在する.

注 X がコンパクトでない場合でも, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ を適当にこれにコホモロークの コサイクルでおきかえれば同じ結果が成立する.

(3.1) 証明は実は次の Richberg [12] の結果から formal にしたがう.

定理 (Richberg) U を reduced 複素空間, $V, W, \Omega \subset U$ の開集合で $V \subset\subset W \subset\subset U$ (相対コンパクト) とするものとする. φ を U 上の連続関数とする. φ は s.psh かつ Ω 上 C^∞ とする. このとき U 上の連続 s.psh ψ で $U - W$ 上 $\psi = \varphi$ かつ $V \cup \Omega$ 上 C^∞ とするものが存在する.

(3.2) 定理 A の証明. 簡単のために I を有限集合とする. $I = \{1, \dots, n\}$ としてよい. X の開集合 $V_i, W_i, 1 \leq i \leq n$, を, $V_i \subset\subset W_i \subset\subset U$, $X = \bigcup_{i=1}^n V_i$, とするようにとる. $A_0 = \emptyset$, $A_\nu = V_1 \cup \dots \cup V_\nu, 1 \leq \nu \leq n$, とおく. $A_n = X$ に注意する.

さて $0 \leq \nu \leq n$ に関する帰納法で次の条件 1) - 4) をみたす X 上の連続 Kähler コサイクル $\{(U_i, \varphi_i^\nu)\}_{i \in I}$ を構成する;

1) $\varphi_i^0 = \varphi_i$ (初期条件)

2) φ_i^ν は $U_i \cap A_\nu$ 上 C^∞

$$\text{h)} \quad U_i \cap U_j \text{ 上 } \varphi_i^\nu - \varphi_j^\nu = \varphi_i - \varphi_j.$$

実際このとき φ_i^ν は $U_i = U_i \cap A_n$ 上 C^∞ となるから, $\psi = \varphi_i^\nu$ とおけば $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ が求めるコサイクルである.

さて $\mathcal{U}^\nu$ に $\{(U_i, \varphi_i^{\nu-1})\}$, $1 \leq \nu \leq n$, が構成されていくとする. まず $(\varphi_i^{\nu-1}, U_i \subset W_\nu \subset U_\nu, \Omega_{\nu-1})$ に Richberg の定理を適用すると (但し $\Omega_{\nu-1} = A_{\nu-1} \cap U_\nu$), U_ν 上連続な s. psh φ_i^ν で, $U_\nu - W_\nu$ 上 $\varphi_i^\nu = \varphi_i^{\nu-1}$ かつ $A_\nu \cap U_\nu = \Omega_{\nu-1} \cup W_\nu$ 上 C^∞ となるものが存在することがわかる. すなわち, $\xi := \varphi_i^\nu - \varphi_i^{\nu-1}$ は $U_\nu - W_\nu$ 上 $\equiv 0$ であるから W_ν の外側で $\xi \equiv 0$ と定義することにより ξ を X 上の連続関数とみなせる. このとき U_i 上 φ_i^ν は

$$\varphi_i^\nu = \varphi_i^{\nu-1} + \xi$$

で定義する. (これは $i = \nu$ のとき上の定義と一致する.) ξ は i によらないから $\{\varphi_i^\nu\}$ が h) をみたすことは明らかである.

o) および φ_i^ν が s. psh をチェックする. $i = \nu$ に関してはこのことは明白であるから $i \neq \nu$ とする. $U_i = (U_i \cap U_\nu) \cup (U_i - W_\nu)$ と考える. まず $U_i \cap U_\nu$ 上では $\varphi_i^\nu = (\varphi_i^\nu - \varphi_i^\nu) + \varphi_i^\nu$ で, $\varphi_i^\nu - \varphi_i^\nu$ は psh, 特に関 C^∞ で, φ_i^ν は s. psh かつ A_ν 上 C^∞ だから φ_i^ν は s. psh かつ A_ν 上 C^∞ . 次に $U_i - W_\nu$ 上では $\xi \equiv 0$ であるから $\varphi_i^\nu = \varphi_i^{\nu-1}$. 故に φ_i^ν は s. psh かつ $A_\nu \cap (U_i - W_\nu) = A_{\nu-1} \cap (U_i - W_\nu)$ 上 C^∞ . q. e. d.

§ 4. (1.7) の II の証明の概略を述べる.

(4.1) 系 1 において応用上重要な場合として $f: X \rightarrow Y$ が有限次 (分岐) 被覆 (finite covering) とする場合がある. この場合は証明が本質的に簡単になるのでまずこれを独立に証明しておく. この場合は X は特異点をもつてもよいことに注意する.

命題 A X, Y は reduced かつ既約な複素空間, $f: X \rightarrow Y$ は finite covering とする. このときもし X が Kähler 空間で Y が正規ならば Y は再び Kähler 空間である.

証明 X 既約, Y は正規であるから, finite ガロワ covering $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$, と正則写像 $h: \tilde{X} \rightarrow X$ が存在し $\tilde{f} = fh$ とする.
 X と同様 $\tilde{X}$ も Kähler であるから $f \in \tilde{f}$ でおきかえてはいいから f はガロワとしてよい. G は Y のガロワ群とする.

さて Y の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ を適当に取ると $\tilde{U}_i = \pi_i^{-1}(U_i)$ に対し X 上の C^∞ Kähler コサイクル $\{(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)\}$ が存在するとしてよい.
 $\tilde{U}_i$ は G -不変で $\tilde{U}_i/G = U_i$ である. $\tilde{\varphi}_i = \sum_{g \in G} g^* \varphi_i$ とおくと, $\tilde{\varphi}_i$ は G -不変だから U_i 上の連続関数 φ_i で $\pi^* \varphi_i = \tilde{\varphi}_i$ となるものが一意的に存在する. 定理 A により, (1) φ_i が s.p.s.h., (2) $\varphi_i - \varphi_j$ が ph を示せばよい. 明らかに $\tilde{\varphi}_i$ は s.p.s.h. で, $\tilde{\varphi}_i - \tilde{\varphi}_j$ は ph である. すると (1) は φ_i の定義と補題から容易に示せる. (命題 C の証明参照) ところで Y が非特異なら補題を用いる必要はない. (2) Y が非特異なら $\pi^*(\partial\bar{\partial}(\varphi_i - \varphi_j)) = \partial\bar{\partial}(\pi^*(\varphi_i - \varphi_j)) = \partial\bar{\partial}(\tilde{\varphi}_i - \tilde{\varphi}_j) = 0 \rightarrow \partial\bar{\partial}(\varphi_i - \varphi_j) = 0$, である. 一般の場合は, 「ph $\leftrightarrow$ 正則関数の実部」の関係を, $\pi_* \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$ ($\pi_* = G$ -不変 direct image) を思い合わせればよい.

注 既約性は実際は不要である. また Y が正規であること(よく知られているように) 命題は成立しない. 例: $X = \mathbb{P}^2$, l は $\mathbb{P}^2$ の line, C は $\mathbb{P}^2$ の非特異 conic とする. 同型 $\varphi: l \rightarrow C$ をとる. Y は, X にあって l と C を φ により同一視して得られる非正規複素空間とすると, Y は Kähler である. (l の像はホモログ 0 になる.)

(4.2) 一般の場合はまず次の命題を示す.

命題 B. X は複素多様体, A は X の g 次元コンパクト解析的部分集合とする.

(1) α は X 上の実, d -closed, C^∞ , $(g+1, g+1)$ -form とする. このとき A の近傍 U に, U 上の実, C^∞ , (g, g) -form β が存在し, $\alpha = \sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \beta$ と書ける.

(2) γ は X 上の実, C^∞ , (g, g) -form で $\partial\bar{\partial} \gamma = 0$ をみたすものと

する。この時 A の近傍 U と U 上の $C^\infty, (g, g)$ -form γ_1, γ_2 で、
 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\partial\gamma_1 = \bar{\partial}\gamma_2 = 0$, をみたすものが存在する。

証明 (1) U を A の管状近傍とする。特に $H^{2g+2}(U, \mathbb{R}) \cong H^{2g+2}(A, \mathbb{R}) = 0$ である。したがって $\alpha = d\gamma$ とある実 $C^\infty(2g-1)$ -form γ が存在する。 γ の (s, t) 成分を $\gamma_{s,t}$ で表す。一方 $\dim A = g$ であるから Ruffen (C.R. Acad. Sci. 259 (1964)) により、任意の $s > g$ に対し $\lim_{A \ni U} H^s(U, \Omega_X^{2g+1-s}|_U) \cong H^s(A, \Omega_X^{2g+1-s}|_A) = 0$, である。これと Dolbeault 同型を用いて s に関する descending induction を示すのは容易である: 「 U と γ をとりかえて、 $\gamma_{s, 2g+1-s} = 0$, $g+2 \leq s \leq 2g+1$, と仮定する」つまり $\gamma = \gamma' + \bar{\gamma}'$, $\gamma' = \gamma_{g+1, g}$, としよ。するとさらに同じ論法で、適当 $C^\infty, (g, g)$ -form β' をとれば $\gamma' = \partial\beta'$ とできる。然らば $\beta := (1/\sqrt{-1})(\beta' - \bar{\beta}')$ が命題の条件をみたす。(2) の証明も同様である。 g. e. d.

注 §1 の定理で、「 X : 非特異」の仮定を用いるのはここだけである。(明らかに、 X が特異点をもつ場合には上の議論は適用できない — Poincaré, および Dolbeault の補題を用いてみる。) しかし、この命題が一般の場合に成立すれば定理もまた正しい。

(4.3) 次に (4.2) を用いて系 1 の直接証明をしておく。まず次の一般的結果に注意する (cf. King, Acta Math. 127, (1971)).

命題 C. $f: X \rightarrow Y$ を reduced な複素空間の間の固有写像とし、 $g = \dim X_y$ は y によるものとする。さらに Y は正規とする。 β を任意の X 上の連続 (g, g) -form とし $\lambda(y) = \int_{[X_y]} \beta_y$ とおく。このとき次の成立する:

- (1) $\lambda(y)$ は Y 上連続
- (2) $\partial\beta = 0$ (resp. $\bar{\partial}\beta = 0$) ならば $\partial\lambda = 0$ (resp. $\bar{\partial}\lambda = 0$), したがって特に λ は C^∞ .

(3) $\sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\beta$ が Lelong の意味で positive (たとえはある Kähler form ω に対し $\sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\beta = \omega^{g+1}$) ならば $\lambda(y)$ は Y 上 ps.h.

注 'King' は (3) において「 γ : 非特異」と仮定してゐるが、補題により一般の場合には非特異な場合に帰着できる。

系 1 の証明 ω を X 上の Kähler form とし $\alpha = \omega^{g+1}$ とおく。命題 B により任意の $\gamma \in \gamma$ に対し、近傍 V と $U := f^{-1}(V)$ 上の C^∞ (g, g) -form β をとり $\alpha = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \beta$ とできる。このとき $\varphi_V(\gamma) = \varphi_V^p(\gamma) := \int_{[C_\gamma]} \beta_\gamma$ は命題 C により V 上の連続関数である。さらに任意の V 上の C^∞ 関数 μ と任意の V の相対コンパクト開集合 V' に対し ε を十分小にとると $\beta' = \beta + \varepsilon(f|_U)^* \mu \omega^g$ は $f^{-1}(V')$ 上の (g, g) -form となる。故に $\varphi_V'(\gamma) := \int_{[C_\gamma]} \beta_\gamma'$ は命題 C により psh である。一方 $d = \int_{[C_\gamma]} \omega_\gamma^g$ は γ によらずに定数で、 $\varphi_V'(\gamma) = \varphi_V(\gamma) + \varepsilon d \mu$ である。よって φ_V は V 上 $s.psh$ である。

次に β' を $\alpha = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \beta'$ なる別の (g, g) -form とし、 $\gamma = \beta - \beta'$ とおくと U 上 $\partial \bar{\partial} \gamma = 0$ 。 V を縮めて $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, γ_i : (g, g) -form, $\partial \gamma_1 = 0$, $\bar{\partial} \gamma_2 = 0$, としてよい。(命題 B) 故に命題 C により $\varphi_V^p(\gamma) - \varphi_V^p(\gamma) = \int_{[C_\gamma]} \gamma_\gamma = \int_{[C_\gamma]} \gamma_{1\gamma} + \int_{[C_\gamma]} \gamma_{2\gamma}$ は psh 。以上から γ 上に連続 Kähler コサイクルを構成することからできる。定理 A から系 1 がしるがう。(4.4) 最後に一般の場合、つまり定理の証明を命題 C に対応する Barlet の結果に帰着させておく。

まず任意の $b \in B_g(X)$ に対し $C(b)$ に対応する X のコンパクト g -サイクルを表し、 $|C(b)|$ でその underlying な analytic subset を表す。 $\alpha = \omega^{g+1} = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ ($g+1$ 個) とおく。命題 B により任意の $b \in B_g(X)$ に対し $|C(b)|$ の近傍 U と U 上の実、 C^∞ , (g, g) -form β が存在し $\alpha = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \beta$ と書ける。 b の近傍 V を適当にとると任意の $b' \in V$ に対し $|C(b')| \subseteq U$ となる。 V 上の関数 φ_V^p と $\varphi_V^p(b) = \int_{[C(b)]} \beta$ (サイクル $C(b)$ 上の β の積分) とおく。すると φ_V^p は、 V 上の連続関数である。(cf. [2][5]) 一方 $\alpha = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \beta'$ とする別の実、 C^∞ , (g, g) -form をとり $\gamma = \beta - \beta'$ とおく。 φ_V^p, φ_V^p と φ_V^p と同様に定義する。然らば示すべきことは、系 1 の証明の場合と同様に、「 φ_V^p が $s.psh$ 」および「 φ_V^p が psh 」の 2 つである。実

際これらは命題 C に対応する Barlet の結果 (cf. [3]) からしに
 かう. ただし, b の $B_g(X)$ の正規変形ならば, 主張の命題 C の
 証明は次のようにして得られる. $Z_g(X) \subseteq B_g(X) \times X$ は universal
 cycle を表す解析的部分集合. $f_g: Z_g(X) \rightarrow B_g(X)$, $\pi_g: Z_g(X) \rightarrow X$ は
 自然射影とする. X 上の C^∞ form δ に対し, $\tilde{\delta} = \pi_g^* \delta$ と置く.
 この時, $f_g, V, \tilde{\omega}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}'$ 等に系 1 の議論を適用すれば,
 ($\tilde{\alpha}$ のやはり Lelong positive) 望みの主張を得る.

文 献

- [1] Barlet, D., *Espaces analytiques réduits des cycles analytiques complexes de dimension finie*, Sem. F. Norguet, Lecture Notes in Math., 482, (1975), 1-158.
- [2] Barlet, D., *Familles analytiques des cycles et classes fondamentales relatives* Sem. F. Norguet, Lecture Notes in Math., 807 (1977-79), 1-24.
- [3] Barlet, D., *Convexité de l'espace des cycles*, Bull. Soc. Math. France, 106 (1978), 373-397.
- [4] Campana, F., *Algébricité et compacité dans l'espace des cycles d'un espace analytique complexe*, Math. Ann., 251 (1980), 7-18.
- [5] Fujiki, A., *Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 14 (1978), 1-52.
- [6] Fujiki, A., *On the Douady space of a compact complex space in the category $\mathcal{C}$* , Nagoya Math. J., 85 (1982), 189-211, II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20.
- [7] Fujiki A., *On a compact complex manifold in $\mathcal{C}$ without holomorphic 2-form*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 19 (1983), 193-202.
- [8] Hironaka, H., *Fundamental problems on Douady spaces*, Report of the symposium at Kinoshita, 1977, 253-262.
- [9] Lieberman, D., *Compactness of Chow scheme*; Seminaire F. Norguet, Lecture Notes in Math., 670 (1978), 140-186.
- [10] Varouchas, J., *Stabilité des variétés Kähleriennes par certains*

morphismes propres, to appear.

[11] Varouchas, J., On the image of a compact Kähler manifold under a holomorphic mappings, to appear

[12] Ricberg, R., Stetige streng pseudo-konvexe Funktionen, Math. Ann., 175, (1968), 257-286.