

非線型 Boltzmann 方程式の初期値問題について

阪市大工 鶴飼正二

§ 1 問題と結果

希薄気体の基礎方程式である Boltzmann 方程式の初期値問題;

$$(1.1) \quad \begin{cases} f = f(t, x, \xi), & (t, x, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ f_t = -\xi \cdot \nabla_x f + Q[f, f], & (t, x, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ f|_{t=0} = f_0, & (x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

を考える。 $Q[f, f]$ は非線形項であり、2 気体の相互作用 (衝突)

を記述している。相互作用のポテンシャルにより、これは滑らかな

cut-off hard potential を仮定する (詳しくは [1] 参照)。

$g = g(\xi) = \alpha e^{-\gamma|\xi|^2}$, $\alpha > 0, \gamma > 0$ は気体の平衡状態を与え (Maxwell 分布)。 $\xi = \sqrt{2\gamma} \eta$ を任意に固定し, $f = g + g^{1/2}u$, とおけば, 新たな未知関数 $u = u(t, x, \xi)$ により 2 次の方程式を得る ([1]).

$$(1.2) \quad \begin{cases} u_t = -\xi \cdot \nabla_x u + Lu + P[u, u], & (t, x, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0, & (x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで $Lu = 2\gamma^{-1/2} Q[g, g^{1/2}u]$, $P[u, u] = g^{-1/2} Q[g^{1/2}u, g^{1/2}u]$ である。

cut-off hard potential の仮定の下では

$$(1.3) \quad (Lu)(x, \xi) = -v(\xi)u(x, \xi) + \int_{\mathbb{R}^3} K(\xi, \xi')u(x, \xi')d\xi'$$

と存在 (\$v(\xi)\$, \$K(\xi, \xi')\$, \$D\$ の性質によって) 2 は [1], [2] 参照)。

\$H^l(\mathbb{R}^3)\$ は \$l\$ 次の Sobolev 空間 (\$L^2\$ の意味で) とし,

$$(1.4) \quad \begin{cases} H_{l, \beta} = \{u(x, \xi); (1+|\xi|)^\beta u \in L^2_\xi(\mathbb{R}^3; H^l_x(\mathbb{R}^3))\}, \\ \|u\|_{l, \beta} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} (1+|\xi|)^\beta \|u(\cdot, \xi)\|_{H^l_x(\mathbb{R}^3)}, \end{cases}$$

$$(1.5) \quad S_{l, \beta, \varepsilon} = L^\infty_t([0, \infty); H_{l+1+\varepsilon, \beta+1+\varepsilon}) \cap C^0_t([0, \infty); H_{l+1, \beta+1}) \cap C^1_t([0, \infty); H_{l, \beta})$$

$$(1.6) \quad \|u\|_\beta = \sup_{t \geq 0} (1+t)^\beta \|u(t)\|_{l+1+\varepsilon, \beta+1+\varepsilon}, \quad u \in S_{l, \beta, \varepsilon},$$

$$(1.7) \quad L^{p, 2} = L^p_x(\mathbb{R}^3; L^2_\xi(\mathbb{R}^3))$$

と定義する。更に線型作用素 \$B\$ は

$$(1.8) \quad B = -\xi \cdot \nabla_x + L, \quad \mathcal{D}(B) = B \text{ の定義域} = H_{l+1, \beta+1},$$

と定義すれば, 我々の仮定の下では \$B\mathcal{D}(B) \subset H_{l, \beta}\$ かつ, \$l > \frac{1}{2}\$,

\$\beta \geq 1\$, \$u, v \in \mathcal{D}(B)\$ ならば \$I[u, v] \in H_{l, \beta}\$ かつ ([1], [2]) の \$v\$,

$$(1.2) \quad \text{に } H_{l, \beta}, (l > \frac{1}{2}, \beta \geq 1) \text{ の発展方程式}$$

$$(1.9) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Bu(t) + I[u(t), u(t)] & , t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

と見做せば次の定理が得られる。

定理 1. \$l > \frac{1}{2}\$, \$\beta \geq \frac{3}{2}\$, \$\varepsilon > 0\$, \$p \in [1, 2]\$, \$\gamma = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p})\$ とする。

この時次の様な定数 \$\alpha_1 > 0\$, \$\alpha_2 > 0\$ が存在する;

\$\|u_0\|_{l+1+\varepsilon, \beta+1+\varepsilon} + \|u_0\|_{L^{p, 2}} < \alpha_1\$ ならば, 方程式 (1.9) は唯一の解

$u = u(t) \in S_{\ell, \beta, \varepsilon}$ を持ち, $\|u\|_r \leq \alpha_2$.

注意 1. 初期値 $u_0 = u_0(x, \xi)$ が更に条件

$$(1.10) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i(\xi) u_0(x, \xi) d\xi = 0, \quad \text{a.a. } x \in \mathbb{R}^3, \quad 1 \leq i \leq 5,$$

但し $\psi_i = k_i g^{1/2}$, $\{k_i\}_{i=1}^5 = \{1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, |\xi|^2\}$, ε が満たす $\sigma = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p})$ とし, 定理 1 が成り立つ。

注意 2. $p=2$ ならば $H_{\ell, \beta} \subset L^{p, 2}$, $(\ell \geq 0, \beta > \frac{3}{2})$ であるが, $p=2$ の時, [3] に於て $\|u(t)\|_{0,3} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) が示された。実は $H_{\ell+\ell\varepsilon, \beta+\beta\varepsilon}$ としても成り立つ ([4])。

注意 3. 定理 1 から半空間に於ける解の存在定理が導かれる ([5])。 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\mathbb{R}_+^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$ とする。

$$(1.11) \quad \begin{cases} u_t = -\xi_1 \nabla_x u + L u + \Gamma[u, u], & (t, x, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0, & (x, \xi) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}^3, \\ u(t, x_1, x_2, 0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = u(t, x_1, x_2, 0, \xi_1, \xi_2, -\xi_3), & (t, x_1, x_2, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

この境界条件は完全反射境界条件と呼ばれるものがある。 $\tilde{u}$, $\tilde{u}_0$ を次の様に定義する。

$$(1.12) \quad \tilde{u}(t, x, \xi) = \begin{cases} u(t, x, \xi), & x_3 \geq 0, \\ u(t, x_1, x_2, -x_3, \xi_1, \xi_2, -\xi_3), & x_3 < 0, \end{cases}$$

$$(1.13) \quad \tilde{u}_0(x, \xi) = \begin{cases} u_0(x, \xi), & x_3 \geq 0, \\ u_0(x_1, x_2, -x_3, \xi_1, \xi_2, -\xi_3), & x_3 < 0. \end{cases}$$

L 及び Γ は変換 $\xi_3 \rightarrow -\xi_3$ に関して不変, 更に一般には

$$(1.14) \quad L \text{ 及び } \Gamma \text{ は } \xi \text{ の任意の回転に関して不変}$$

である ([1]) ので, u が (1.11) の解であれば $\hat{u}$ は ($u_0 \in \hat{u}_0$ を置き代
えた) (1.2) の解でもある。逆に (1.13) を初期値と可する (1.2) の解 ^{u} (二
存在と一意性は定理 1 で保証される) は, (1.14) と解の一意性から,

$$(1.15) \quad u(t, x_1, x_2, -x_3, \xi_1, \xi_2, -\xi_3) = u(t, x, \xi), \quad (t, x, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

を満たしていることがわかる。(1.15) で $x_3=0$ とおけば結局この解
 u は (1.11) の境界条件を満たしていることがわかる。

注意 4. 条件 (1.10) の仮定

$$(1.16) \quad \exists \nu_0 > 0, \quad \nu_0(1+|\xi|) \leq \nu(\xi),$$

(調子 *hard ball model* に対して成り立つ), の下での定理 1 は [5] で,
これと独立に, 同じ時期に一般の *cut-off hard potential* に対す
る定理 1 は Nishida [3] で, 与えられた。[3] は B のスペクトルに
関する [6] の結果を利用している。

§2. 定理 1 の証明

[2] と同じ逐次近似法によって (1.9) の解を構成するのである
が, この時次の定理が重要である。

定理 2. $H_2 = L^2_{\xi}(\mathbb{R}^3; H^1_x(\mathbb{R}^3))$ とする。 $u_0 \in H_2 \cap L^{p,2}$ ならば

$$(2.1) \quad \exists C > 0, \quad \|e^{tB} u_0\|_{H_2} \leq C(1+t)^{-\gamma} (\|u_0\|_{H_2} + \|\hat{u}_0\|_{L^{p',2}}), \quad 1 \leq p \leq 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

かつ $\gamma = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p})$ とし成り立つ。但し $\hat{u}_0$ は u_0 の x に関するフー

リエ変換である。 u_0 が更に (1.10) を満たせば $\gamma = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p})$ とし

(2.1) が成り立つ。

他方 $\Gamma[u, u]$ に対する [1] の評価から

$$(2.2) \quad \|\widehat{\Gamma}[u, u]\|_{L^{p,2}} \leq C \|u\|_{L^{\beta+1}}^2, \quad \beta > 1.5, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad \beta \geq \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p}),$$

が従う。更に $\Gamma[u, u]$ は任意の u に対して (1.10) を満たしている [1]。

評価 (2.1) (2.2) から [2] の逐次近似法 (1.9) に対して収束する
こと加 [2] と同様に L^2 証明できる。

§3 定理 2 の証明

$\hat{u}(\eta, \xi), \eta, \xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi = u(\eta, \xi)$ の x に関する η -変換とする。 $(B_\eta \hat{u})(\eta, \xi)$
 $= -i\eta \cdot \xi \hat{u} + L \hat{u}$ であるので, B_η は

$$(3.1) \quad B_\eta = -i\eta \cdot \xi + L, \quad \mathcal{D}(B_\eta) = \{u = u(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^3), B_\eta u \in L^2(\mathbb{R}^3)\},$$

と定義する。 $\eta \in \mathbb{R}^3$ はパラメータである。Plancherel より,

$$(3.2) \quad \|e^{tB} u\|_{H_L}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\eta|^2)^{2L} \| (e^{tB_\eta} \hat{u})(\eta, \cdot) \|_{L_\xi^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\eta, \quad u \in H_L$$

が成り立つ。

$A_\eta = -i\eta \cdot \xi - \nu(\xi)$, $\mathcal{D}(A_\eta) = \mathcal{D}(B_\eta)$, $K = \int_{\mathbb{R}^3} K(\xi, \xi') \cdot d\xi'$ と定義すれば [2]
 と同様に L^2

補題 1. $\operatorname{Re} \lambda \geq -\nu_0 = \inf \nu(\xi) > 0$ ならば

(i) $K(\lambda - A_\eta)^{-1}$ は $L^2 = L_\xi^2(\mathbb{R}^3)$ から L^2 へのコンパクト作用素,

(ii) $\exists C \geq 0, \exists \delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0, \|K(\lambda - A_\eta)^{-1}\| \leq \frac{C}{(\operatorname{Re} \lambda + \nu_0)^{1/2} (1 + |\operatorname{Im} \lambda| \delta_1 + |\eta|^2 \delta_2)},$

が成り立つ。 $\sigma(B_\eta)$ は B_η のスペクトル, $\sigma_d(B_\eta)$ は B_η の重複度有限の離散固有値の全体とする。上の補題より, $\sigma(B_\eta) \cap \{\operatorname{Re} \lambda > -\nu_0\} \subset \sigma_d(B_\eta)$ であるが更に

補題 2. $\forall \eta_0 > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta, |\eta| \geq \eta_0, \sigma(B_\eta) \subset \{\operatorname{Re} \lambda < -\varepsilon\},$

を示す。このことは補題より [2] の定理 3.3 と同様にし

補題 3. $\forall \eta_0 > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta, |\eta| \geq \eta_0, \|e^{tB_\eta} u\|_{L^2} \leq C e^{-\varepsilon t} \|u\|_{L^2},$

を得る。ここで $L^2 = L^2_{\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3).$

$|\eta| < \eta_0$ に対する e^{tB_η} の評価を求めよう。 $\omega_0 \in S^2$ を固定し

$$(3.3) \quad B(\kappa) = -\kappa \omega_0 \cdot \xi + L, \quad \sigma(B(\kappa)) = \sigma(B_\eta), \quad \kappa \in \mathbb{R}^3,$$

と定義する。 $\omega \in S^2$ に対し, $\tilde{R}_\omega \in O(3), \omega_0 = \tilde{R}_\omega \omega, (R_\omega u)(\xi) = u(R_\omega \xi)$

と定義すれば (1.14) より,

$$(3.4) \quad e^{tB_\eta} = R_\omega e^{tB(i|\eta|)} R_\omega^{-1}, \quad \omega = \eta/|\eta|,$$

が成り立つ。故に $e^{tB(\kappa)}$ の評価より e^{tB_η} の評価が得られる。

命題 1. $\mu \in \sigma_d(B(0)), \mu$ の代数的重複度 $= m$ とする。

(i) $\exists j_0 \leq m, \exists \lambda_j(\kappa), 1 \leq j \leq j_0, \lambda_j(\kappa) = \mu + \lambda_j^{(1)} \kappa + \lambda_j^{(2)} \kappa^2 + O(\kappa^3), \kappa \rightarrow 0,$

(ii) $\lambda_j(\kappa)$ の eigenprojection $= P_j(\kappa) = P_j^{(0)} + \kappa P_j^{(1)} + O(\kappa^2), \kappa \rightarrow 0,$

かつ $P = \sum_{j=1}^{j_0} P_j^{(0)}$ は $\mu \in \sigma_d(B(0))$ の eigenprojection,

(iii) $\lambda_j(\kappa)$ の幾何学的重複度と代数的重複度は一致する。

注意 1. この命題は [6] に依る。一般に $\lambda_j(\kappa), P_j(\kappa)$ は C^∞ であるが (1.16) が成り立つのは解析的である ~~=[5][6]~~ [5][6]。

[1][2] より $\sigma_d(B(0)) = \sigma_d(L) \subset (-\nu_0, 0],$ かつ $0 \in \sigma_d(L)$ である固有空間は $\{\psi_i\}_{i=1}^5$ ((1.10) 参照) であることは知られている。 $\lambda_j(\kappa),$

$P_j(\kappa)$ を $\mu = 0 \in \sigma_d(B(0))$ に対する命題 1 のものとすると、故に $j_0 \leq 5.$

補題 1 と命題 1 から、[2] の定理 3.3 と同様にし

補題 4. $\exists C > 0, \exists \alpha > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall \kappa, |\kappa| < \eta_0,$

$$e^{tB(\kappa)} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j(\kappa)t} p_j(\kappa) + z(\kappa, t), \quad \|z(\kappa, t)\|_{L^2} \leq C e^{-\alpha t} \|u\|_{L^2},$$

が得られる。他方 L は nonpositive self-adjoint ([1][2]) であるから

より $\lambda_j^{(2)} < 0$ が容易に示せるので命題 1, (i) より

$$(3.5) \quad \exists \delta > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall |\eta| < \eta_0, \operatorname{Re} \lambda_j(i|\eta|) \leq -\delta |\eta|^2,$$

を得る。故に Hölder の不等式より

$$(3.6) \quad \int_{|\eta| < \eta_0} (1+|\eta|^2)^{2\ell} \|e^{\lambda_j(i|\eta|)t} p_j(i|\eta|) \hat{u}(\eta, \cdot)\|_{L^2}^2 d\eta \\ \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\delta |\eta|^2 t} d\eta \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|\hat{u}(\eta, \cdot)\|_{L^2}^{2p'} d\eta \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

$$\leq C t^{-\frac{3}{2}} \|\hat{u}\|_{L^{p',2}}^2, \quad p = 2p', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad \gamma = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

を得る。もし u が (1.10) を満たすならば $\|p_j(i|\eta|) \hat{u}(\eta, \cdot)\|_{L^2} \leq C |\eta| \|\hat{u}(\eta, \cdot)\|_{L^2}$

(命題 1, (ii)) であるから、同様の計算より $\gamma = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ を得る。

(3.2), 補題 3, (3.4), 補題 4, (3.6) を合せれば定理 2 を得る。

参考文献

- [1] Grad, H; Proc. Sym. in Appl. Math. 17, 154-183 (1965)
- [2] Ukai, S; Proc. Japan Acad. 50, 179-184 (1974)
- [3] Nishida, T and Imai, K.; (to appear)
- [6] Ellis, S. and Pinsky, M.A.; J. Math. Pures et Appl. 54, 125-156 (1975)
- [5] Ukai, S; (to appear)
- [4] Shizuta, Y; (to appear)