

Inner Product Formula for Kudla Lift

村瀬 篤 (京都産業大学・理)

菅野 孝史 (金沢大学・理)

はじめに

$U(1,1)$ 上の正則尖点形式 f からテータリフトにより, $U(2,1)$ 上の正則尖点形式 $\mathcal{L}f$ が構成される ([1]). $\mathcal{L}f$ を f の Kudla lift という. この稿では, $\mathcal{L}f$ の Petersson ノルムが, f の保型 L 関数の特殊値と f の局所的データによって記述されることを報告する.

§1. 保型形式と保型 L 関数

1.1 K を, 判別式 D の虚 2 次体とする. $\mathcal{O}_K$ を K の整数環, σ を $K/\mathbb{Q}$ の非自明な自己同型とする. $\mathbb{Q}$ の各素点 v に対し, $K_v = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v$ とおく. また, 有限素点 p に対し,

$$\mathcal{O}_{K,p} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p & \cdots K_p = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p \\ K_p \text{ の整数環} & \cdots K_p \text{ は体} \end{cases}$$

とおき, $\mathcal{O}_{K,f} = \prod_{p < \infty} \mathcal{O}_{K,p}$ および $K^1 = \{t \in K^\times \mid t\sigma = 1\}$ とする. K の 0 でない分数イデアルを単にイデアルとよぶ. K に含まれる 1 のべき根の個数を $w(K)$ により表わす. $X \in M_{mn}(K)$ に対し, $X^* = {}^t X^\sigma$ とおく. K の量指標で, $\mathbb{Q}_A^\times$ への制限が 2 次拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対応する $\mathbb{Q}$ の量指標に一致するものの集合を $\mathcal{X}$ と書く. $\chi \in \mathcal{X}$ に対し, 整数 $w_\infty(\chi)$ を $\chi(z_\infty) = (z_\infty/|z_\infty|)^{w_\infty(\chi)}$ ($z_\infty \in K_\infty^\times$) で定める.

1.2 $H = U(T)$ を, 歪エルミート行列 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対するユニタリ群とする:

$$H_{\mathbb{Q}} = \{h \in GL_2(K) \mid h^* T h = T\}.$$

H の元を

$$\mathbf{d}(a) = \begin{pmatrix} a^\sigma & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{n}(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{n}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$(a \in K^\times, b \in \mathbf{Q})$ により定める. 有限素点 p に対し, $\mathcal{U}_p = H_p \cap GL_2(\mathcal{O}_{K,p})$ および

$$\mathcal{U}_0(D)_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_p \mid c \in D \cdot \mathcal{O}_{K,p} \right\}$$

とおく. 以下, $w_\infty(\chi) = -1$ なる $\chi \in \mathcal{X}$ を1つ固定する. $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_0(D)_p$ に対し,

$$\tilde{\chi}_p(u) = \begin{cases} \chi(a) & \cdots & c \in p\mathcal{O}_{K,p} \\ \chi(c) & \cdots & c \in \mathcal{O}_{K,p} - p\mathcal{O}_{K,p} \end{cases}$$

とおく. このとき, $\tilde{\chi} = \prod_{p < \infty} \tilde{\chi}_p$ は $\mathcal{U}_0(D)_f = \prod_{p < \infty} \mathcal{U}_0(D)_p$ のユニタリ指標を定める. $H_\infty = H(\mathbf{R})$ の $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ への作用と正則保型因子 $j: H_\infty \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を通常のように定義し, $\mathcal{U}_\infty$ を $z_0 = \sqrt{-1} \in \mathfrak{H}$ の H_∞ における固定化部分群とする.

1.3 以下, $w(K)$ で割り切れる正の偶数 l を固定する. S_{l-1} を, 次の3条件を満たす $H_{\mathbf{Q}} \backslash H_{\mathbf{A}}$ 上の smooth な関数 f のなす空間とする:

$$(i) \quad f(hu_f u_\infty) = (\det u_\infty)^{l-1} j(u_\infty, z_0)^{-(l-1)} \tilde{\chi}(u_f) f(h)$$

$$(h \in H_{\mathbf{A}}, u_f \in \mathcal{U}_0(D)_f, u_\infty \in \mathcal{U}_\infty).$$

$$(ii) \quad \text{任意の } h_f \in H_f \text{ に対し, } (\det h_\infty)^{-(l-1)} j(h_\infty, z_0)^{l-1} f(h_f h_\infty) \text{ は } h_\infty \langle z_0 \rangle \in \mathfrak{H} \text{ に関して正則である.}$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbf{Q} \backslash \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}} f(\mathbf{n}(x)h) dx = 0 \quad (h \in H_{\mathbf{A}}).$$

また $\mathcal{Y}_l$ を, $K_{\mathbf{A}}^1/K^1$ のユニタリ指標 Ω で $\mathcal{O}_{K,f}^1 = \prod_{p < \infty} \mathcal{O}_{K,p}^1$ 上 trivial かつ $\Omega(z_\infty) = z_\infty^l$ ($z_\infty \in K_\infty^1$) を満たすものの集合とすると, $S_{l-1} = \bigoplus_{\Omega \in \mathcal{Y}_l} S_{l-1}(\chi_0 \Omega^{-1})$ と分解する. ここに, 各成分は中心指標 $\chi \Omega^{-1}$ をもつ S_{l-1} の元のなす空間である.

1.4 各素数 p に対し, $S_{l-1}(\chi_0 \Omega)$ に作用する Hecke 作用素を定義する. $f \in S_{l-1}(\chi_0 \Omega)$ とする.

(i) p が $K/\mathbf{Q}$ で inert のとき:

$$\begin{aligned} T_p f(h) &= -f(hd(p^{-1})) - \sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / p\mathbf{Z}_p} f(hn(p^{-1}x)) \\ &\quad - \sum_{x \in \mathbf{Z}_p / p^2\mathbf{Z}_p} f(hn(x)d(p)). \end{aligned}$$

(ii) p が $K/\mathbf{Q}$ で分岐するとき (Π を K_p の素元とする) :

$$T_p f(h) = \chi_p^{-1}(\Pi) \sum_{x \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} f(h \bar{n}(Dx) d(\Pi^{-1})) \\ + \chi_p(\Pi) \sum_{x \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} f(h n(x) d(\Pi)).$$

(iii) p が $K/\mathbf{Q}$ で分解するとき ($\Pi_1 = (p, 1), \Pi_2 = (1, p) \in K_p$ とおく) :

$$T_{p,1} f(h) = \chi_p^{-1}(\Pi_1) \{f(h d(\Pi_1^{-1})) + \sum_{x \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} f(h n(x) d(\Pi_2))\}, \\ T_{p,2} f(h) = \chi_p^{-1}(\Pi_2) \{f(h d(\Pi_2^{-1})) + \sum_{x \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} f(h n(x) d(\Pi_1))\}.$$

1.5 $f \in S_{l-1}(\chi_0 \Omega)$ が, 各 p に対して T_p (p が分解するときは $T_{p,i}$ ($i = 1, 2$)) の固有関数であるとき, f を Hecke eigenform という. Hecke eigenform f に対し, 保型 L 関数 $L(f; s)$ を次のように定義する.

$$L(f; s) = \prod_{p < \infty} L_p(f; s), \\ L_p(f; s)^{-1} = \begin{cases} 1 - (p^{-1} \lambda_p + 1 - p^{-1}) p^{-2s} + p^{-4s} & \cdots p \text{ は } K/\mathbf{Q} \text{ で inert} \\ 1 - p^{-1/2} \lambda_p p^{-s} + p^{-2s} & \cdots p \text{ は } K/\mathbf{Q} \text{ で分岐} \\ \prod_{i=1}^2 (1 - p^{-1/2} \lambda_{p,i} p^{-s} + \Omega_p(\Pi_i/\Pi_i^\sigma) p^{-2s}) & \cdots p \text{ は } K/\mathbf{Q} \text{ で分解.} \end{cases}$$

ここに, λ_p (resp. $\lambda_{p,i}$) は T_p (resp. $T_{p,i}$) に対する f の固有値である.

注意 K の類数を 1 とする. このとき, f は weight $l-1$, 指標 $\left(\frac{D}{*}\right)$ の $\Gamma_0(D)$ 上の正則尖点形式 f_{dm} に対応している. f_{dm} の Fourier 展開を $f_{dm}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}$ とするとき, $L(f; s)$ は, $K/\mathbf{Q}$ で分岐する p における局所因子を除いて, Rankin L 関数

$$\zeta(2s) \sum_{\mathfrak{a}} c(N(\mathfrak{a})) \alpha^l N(\mathfrak{a})^{-(s+l-1)}$$

に一致する. ここに, $\mathfrak{a} = (\alpha)$ は K の 0 でない整イデアルをわたる.

§2. 主結果

2.1 $\kappa = \sqrt{D}$ とし,

$$S = \begin{bmatrix} & & \kappa^{-1} \\ & 1 & \\ -\kappa^{-1} & & \end{bmatrix}$$

とおく. S のユニタリ群を G と書く. G 上の正則保型形式については [5] を参照されたい.

2.2 ψ を $\mathbf{Q}_A/\mathbf{Q}$ の加法指標で, $\psi(x_\infty) = e^{2\pi i x_\infty}$ ($x_\infty \in \mathbf{R}$) なるものとする. K_A^3 上の Schwartz-Bruhat 関数の空間 $\mathcal{S}(K_A^3)$ 上実現されるユニタリ表現 $\mathcal{M}_\chi: G_A \times H_A \rightarrow GL(\mathcal{S}(K_A^3))$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\chi(g \times 1_2)f(z) &= \chi(\det g)f(g^{-1}z) \quad (g \in G_A), \\ \mathcal{M}_\chi(1_3 \times d(a))f(z) &= \chi^{-3}(a)|N(a)|_A^{3/2}f(az) \quad (a \in K_A^\times), \\ \mathcal{M}_\chi(1_3 \times n(b))f(z) &= \psi(bz^*Sz)f(z) \quad (b \in \mathbf{Q}_A), \\ \mathcal{M}_\chi(1_3 \times w_v)f(z) &= \lambda_{K_v}(\psi_v) \int_{K_v^3} \psi(\mathrm{Tr}(z^*Sz'))f(z')dz' \end{aligned}$$

で定める. ここに, $f \in \mathcal{S}(K_A^3)$, $z \in K_A^3$ で, $\mathbf{Q}$ の素点 v に対し, $w_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in H_v$ とする. また, $|\cdot|_A$ は idele norm を表し, $\lambda_{K_v}(\psi_v)$ は Weil 定数である.

2.3 テータ核 $\theta_\chi: G_{\mathbf{Q}} \backslash G_A \times H_{\mathbf{Q}} \backslash H_A \rightarrow \mathbf{C}$ を

$$\theta_\chi(g, h) = \chi^{-1}(\det g) \chi^{-2}(\det h) \sum_{X \in K^3} \mathcal{M}_\chi(g \times h) \varphi(X) \quad (g \in G_A, h \in H_A)$$

により定義する. ここに, 試験関数 $\varphi \in \mathcal{S}(K_A^3)$ を

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \left(\frac{2}{\sqrt{D}} x_{1,\infty} + x_{3,\infty} \right)^i \exp \left(-2\pi \left\{ -\frac{2}{D} |x_{1,\infty}|^2 + |x_{2,\infty}|^2 + \frac{1}{2} |x_{3,\infty}|^2 \right\} \right) \\ &\quad \times \prod_{p < \infty} \varphi_p(X_p) \end{aligned}$$

($X = (X_v) \in K_A^3$, $X_\infty = {}^t(x_{1,\infty}, x_{2,\infty}, x_{3,\infty}) \in \mathbf{C}^3$, φ_p は $\mathcal{O}_{K,p}^3$ の特性関数) で定める. テータリフト

$$S_{l-1}(\chi\Omega) \ni f \mapsto \mathcal{L}_\chi f(g) = \int_{H_{\mathbf{Q}} \backslash H_A} \theta_\chi(g, h) f(h) dh \quad (g \in G_A)$$

を f の Kudla lift という.

$\mathcal{L}_\chi f$ は, weight l , level 1, central character Ω^{-1} の正則尖点形式であり, f が Hecke eigenform ならば $\mathcal{L}_\chi f$ も Hecke eigenform となる ([1], [2], [3]).

2.4 主結果を述べるために, $f \in S_{l-1}(\chi\Omega)$ に対し, 次を仮定する.

(2.1) f は Hecke eigenform である.

(2.2) D の各素因子 p に対し, $f(hw_{D,p}) = \epsilon_p(f)f(h)$ ($\epsilon_p(f) = \pm 1$).

ここに, $w_{D,p} = \begin{pmatrix} \sqrt{D}^{-1} \\ \sqrt{D} \end{pmatrix} \in H_p$ である.

D の各素因子 p に対し,

$$C_p(f, \chi) = 1 + \epsilon_p(f) \lambda_{K_p}(\psi_p) \chi_p^{-1}(\sqrt{D}) \frac{\nu_p^{\delta_p} + \nu_p^{-\delta_p}}{2}$$

とおく. ここに, $\nu_p^\pm \in \mathbb{C}^\times$ を $\nu_p + \nu_p^{-1} = p^{-1/2} \lambda_p$ により定め, $\delta_p = \text{ord}_p D$ とする. この稿の主結果は次のとおりである ([4]).

定理 2.5 上のような $f \in S_{l-1}(\chi\Omega)$ に対し,

$$\int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}} |\mathcal{L}_\chi f(g)|^2 dg = c \cdot w(K)^{-1} \pi^{-l} |D|^{5/2} (l-1)! \prod_{p|D} C_p(f, \chi) \cdot L(f; 1) \int_{H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbb{A}}} |f(h)|^2 dh.$$

ここに, c は Haar 測度 dh, dg の取り方によって explicit に定まる正定数である.

References

- [1] S. Kudla, On certain Euler products for $SU(2, 1)$, *Compositio. Math.* **42** (1981), 321–344.
- [2] A. Murase and T. Sugano, Fourier-Jacobi expansion of Kudla lift, I. Primitive components, preprint.
- [3] A. Murase and T. Sugano, Fourier-Jacobi expansion of Kudla lift, II. Non-Primitive components, preprint.
- [4] A. Murase and T. Sugano, Inner product formula for Kudla lift, in preparation.
- [5] 村瀬篤, 菅野孝史, 3 次ユニタリ群上の保型形式について, 「数学」, in press.