

古典的ハミルトン系カオスの示す統計的性質*

堀田 武彦†

スタンダードマップ

$$\begin{aligned} J_{i+1} &= J_i - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_i) \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + J_{i+1} \pmod{1} \end{aligned} \quad (1)$$

($i = 0, 1, 2, \dots$) は、よく知られた 2 次元面積保存写像¹である。これは、2 自由度ハミルトン系のポアンカレ写像の典型例であると考えられることもできる。

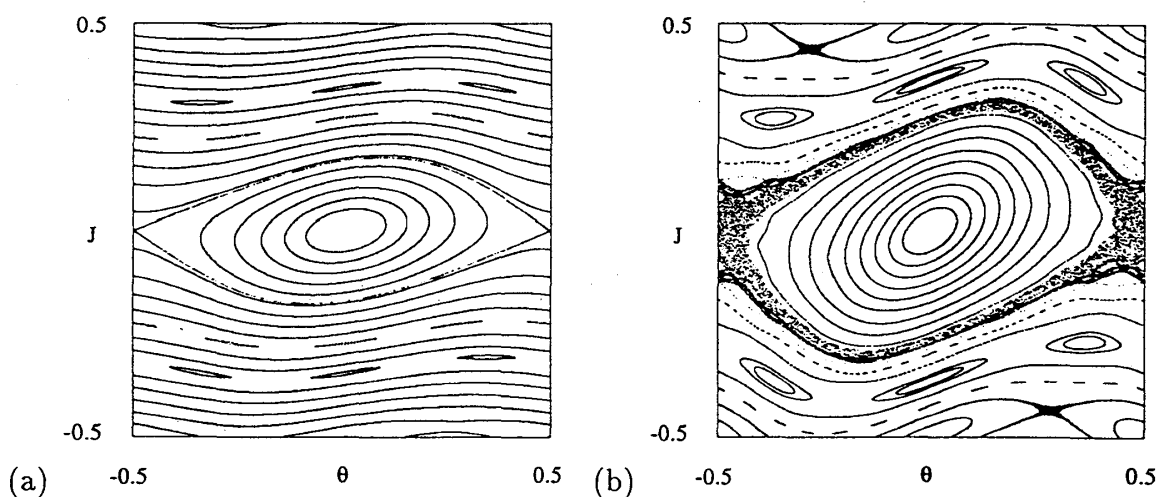


図 1: 相空間図 (a) $K=0.3$ (b) $K=0.8$

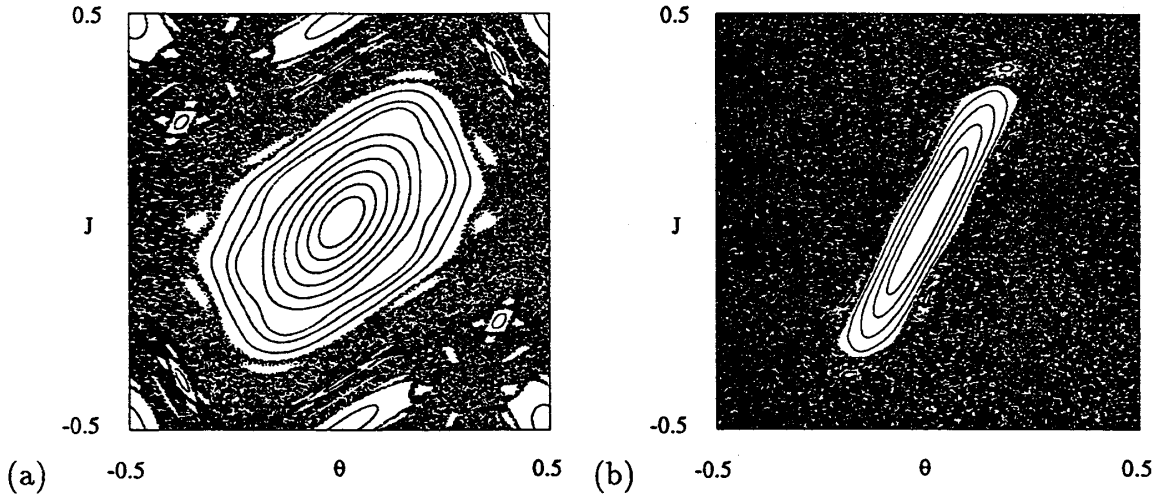
(1) は、 $J_i \rightarrow J_i \pm 1$ に対して不変である。また、逆写像は、

$$\begin{aligned} J_i &= J_{i+1} + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_i) \\ \theta_i &= \theta_{i+1} - J_{i+1} \pmod{1} \end{aligned} \quad (2)$$

* 森 肇教授 (九州共立大)、石崎 龍二博士 (福岡県立大) との共同研究に基づいている。また、蔵本、森「散逸構造とカオス」(1994 岩波書店) を参照

† 東京大学工学部計数工学科 e-mail: horita@expm.t.u-tokyo.ac.jp

¹ J.D.Meiss, Rev. of Mod. Phys. 64 (1992)795 とその引用文献

図 2: 相空間図 (a) $K=1.3$ (b) $K=3.8$

で与えられ、 $(\theta, J) \rightarrow (\theta - J, -J)$ をほどこせば、(1)において $(J_{i+1} \leftrightarrow J_i)$ としたものと同形となり時間反転対称性を持つことがわかる。

$K = 0$ では、可積分であり、すべての初期値に対し運動は、 $J_i = \text{一定}$ の不変サークル上 (ポアンカレ写像であると考えれば2次元トーラス上) で行なわれる。図1は、 $K = 0.3, 0.8$ の場合にいくつかの初期値に対して軌道をプロットしたものである。

K が十分小さい場合には、 θ 方向につながった不変サークルが存在し、運動は J 方向に有界なものとなる。図1では、このような不変サークルと共鳴によって生まれた島トーラス、その島トーラスと対で存在する双曲的周期点近傍のカオス的な運動を示す領域がみられる。 K が増大するに従い、不変サークルは次々と壊れて、 $K > K_c = 0.971635 \dots$ では、不変サークルは存在しないことが知られている。図2に示すように、このような K の値では、 J 方向につながったカオスの海が現れる。

不変サークルの崩壊にともない、 J 方向には拡散的な運動が観測されるようになる。図3は、 $K = 3.8$ での運動を示したもので、双曲的な固定点近傍に初期にとった位相点の集団が拡がって行く様子がわかる。軌道の侵入がない空白部分は、島トーラスの部分である。このような拡散的な運動は、カオスによる不可逆性を端的に示す例である。 $K = 3.8$ の場合に、カオスの海の中にとった初期値のアンサンブルについて平均をとった J_n の分散 $\langle (J_n - J_0)^2 \rangle_0$ を n についてプロットすると、図4(a)のように $\langle (J_n - J_0)^2 \rangle_0 \propto n$ となり、

$$D \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle (J_n - J_0)^2 \rangle_0}{2n} \quad (3)$$

によって拡散係数を定義出来ることがわかる。

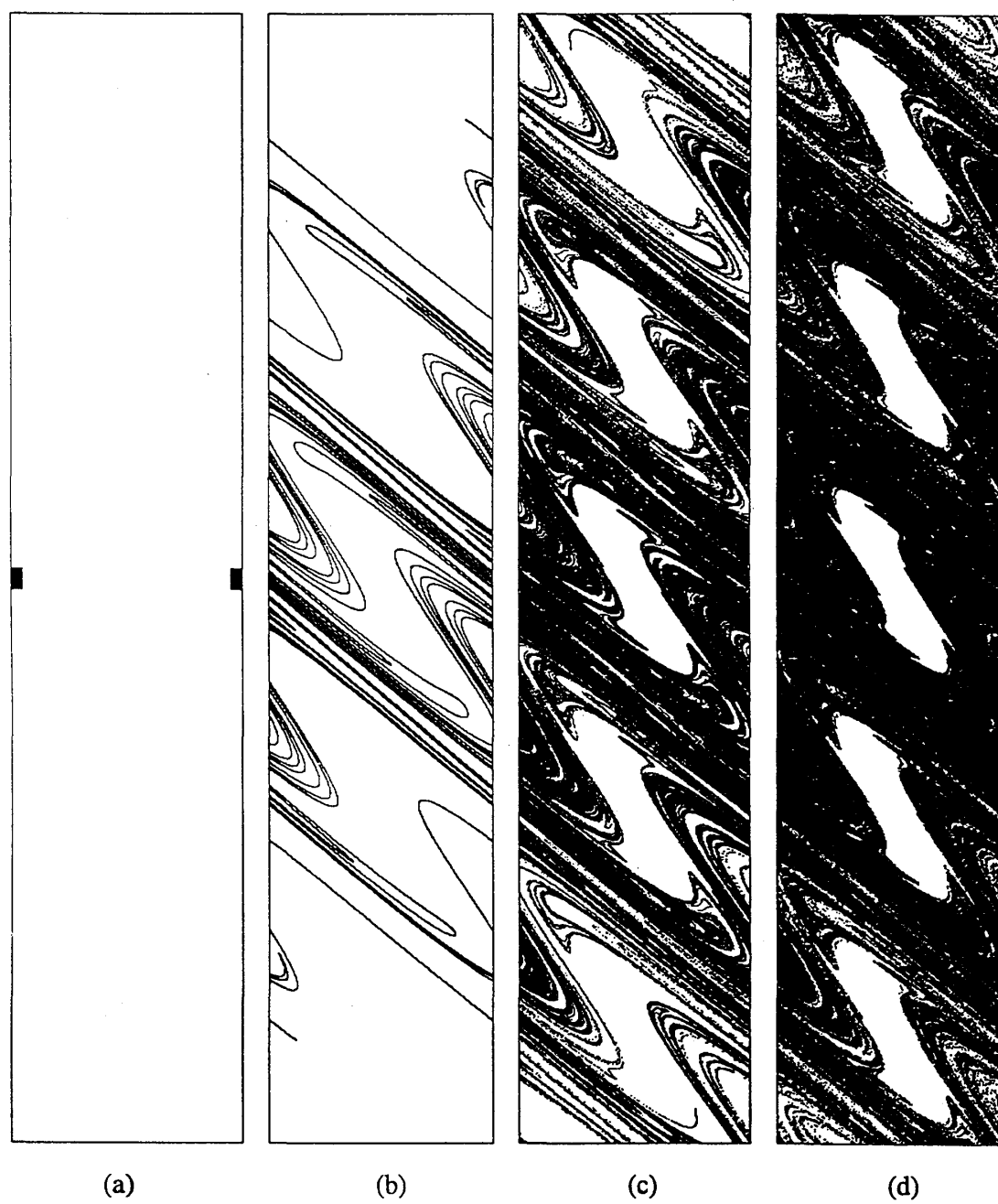


図 3: $K = 3.8$ での位相点集団の動き ($-0.5 \leq \theta < 0.5$, $-2.5 < J < 2.5$) (a) 初期値
(b),(c),(d) はそれぞれ 5, 10, 15 ステップ後

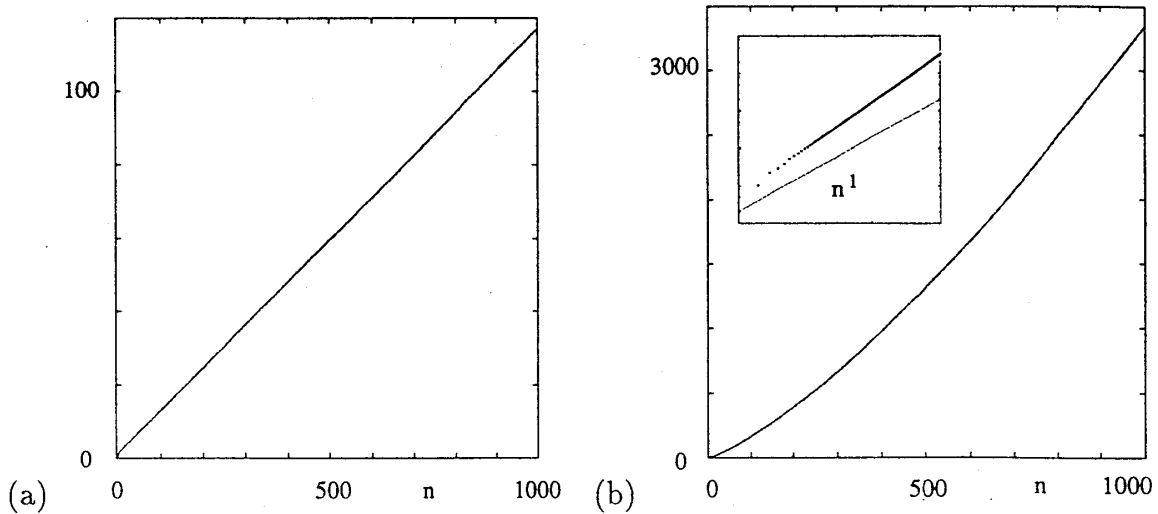
図 4: J_n の分散 (a) $K=3.8$ (b) $K=6.9115$

図 4(b) に示すような、加速モード²と呼ばれる

$$\theta_i = \theta_0 \quad (4)$$

$$J_i = J_0 + li \quad (5)$$

(l は 0 でない整数) のような軌道を持つ場合には、 $\langle (J_n - J_0)^2 \rangle_0 \propto n^\eta$ ($\eta > 1$) となり、拡散係数 D が定義できなくなることがおこる。これは、一定速度で走る加速モードのまわりに形成される島トーラスの近傍で、カオスの海の中の軌道が引きずられるためである。いま、カオスの海のなかにある軌道のうち、加速モード近傍に n ステップ以上滞在するような軌道のセグメントを見出す確率を $W(n)$ とする。もし、 $W(n) \sim n^{-(\beta-1)}$ ($1 < \beta < 2$) のように振舞うとすれば、 J_n の分散に対する寄与は、 $(nl)^2 W(n)$ であるので、

$$\langle (J_n - J_0)^2 \rangle_0 \simeq (nl)^2 W(n) \sim n^{3-\beta} \quad (6)$$

となり、 $\eta = 3 - \beta$ となる。図 5 は、 $K = 6.9115$ での相空間の様子を示したものである。箱で囲った中に加速モードがある。図 5(b) は、箱を拡大してみたもので、加速モード近傍での島トーラスの様子がわかる。

実際に、加速モードの近傍への軌道の滞在の様子をみるために、 J についても mod 1 をとり、1 本の長いカオス軌道について、2 つの箱のうちどちらかに軌道点 X_i があれば、1 なければ 0 として $\chi(X_i)$ を定義し、1 の継続時間の頻度分布を $f(t)$ 、さらに 0 の継続時間の頻度分布を $f^c(t)$ として数値実験によって求めた。

²たとえば、Y.H.Ichikawa, T.Kamimura, T.Hatori, Physica D29 (1987) 247

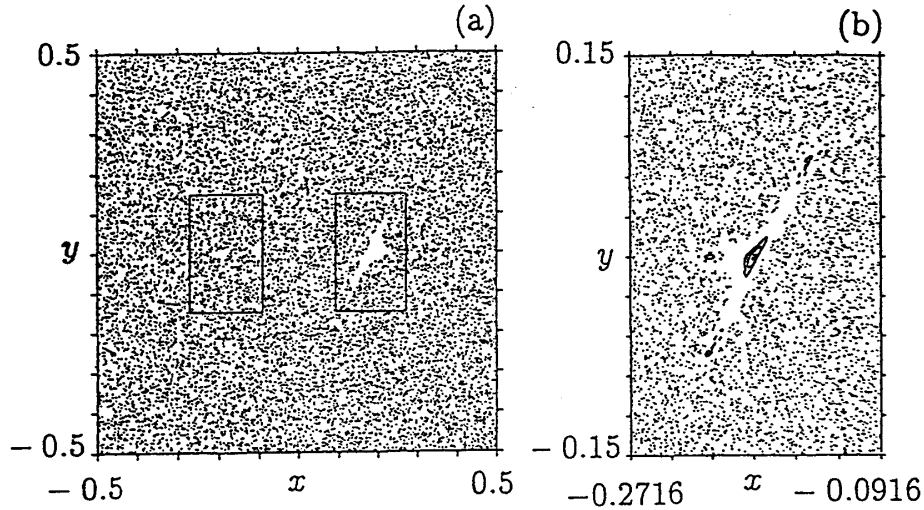


図 5: 相空間図 $K=6.9115$ (b) は (a) の箱で示された右側の領域を拡大したもの

図 6 に示すように、 $f(t) \sim t^{-1-\beta}$, $f^c(t) \propto e^{-\gamma t}$ のように振舞うことがわかる。ここで、 β は、 $\sum_{t=1}^{\infty} f(t) = 1$, $\sum_{t=1}^{\infty} f^c(t) = 1$ と規格化しておけば、 $W(n)$ が、

$$W(n) = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{(t-n+1)f(t)}{\tau + \tau_c} \propto n^{-(\beta-1)} \quad (7)$$

(ただし $\tau = \sum_{t=1}^{\infty} tf(t)$, $\tau_c = \sum_{t=1}^{\infty} tf^c(t)$) のようにあたえられるためである。このようなベキ分布は、さまざまな特性量の時間相関関数に長時間相関をもたらす。たとえば、 $\langle \dots \rangle$ を、長時間平均

$$\langle G(X_0) \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} G(X_i) \quad (8)$$

で定義し、

$$C^x(t) \equiv \langle (\chi(X_t) - \langle \chi(X_0) \rangle)(\chi(X_0) - \langle \chi(X_0) \rangle) \rangle \quad (9)$$

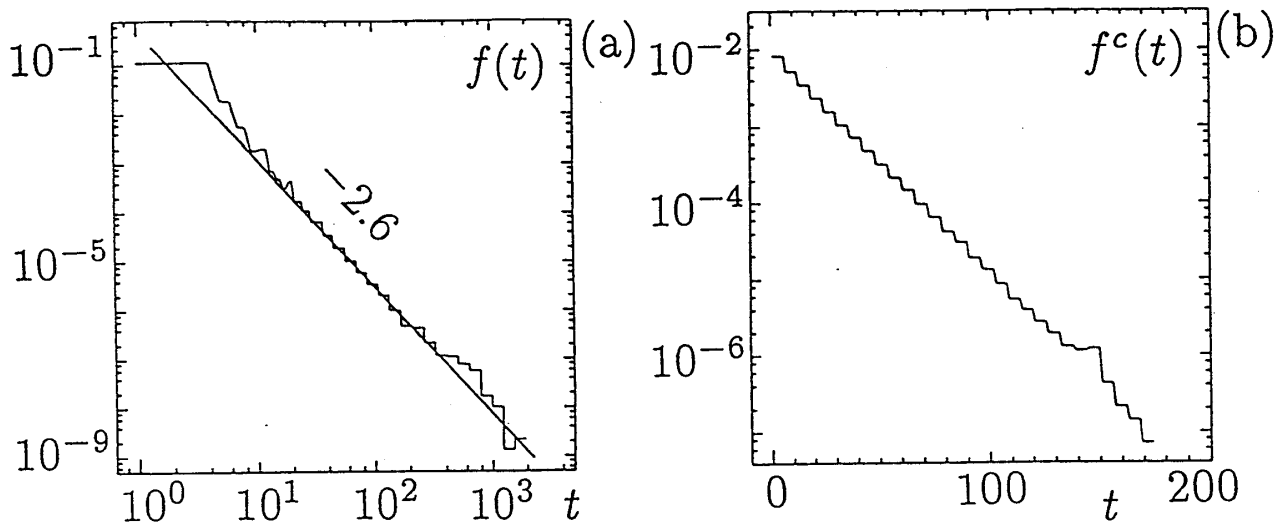
について、箱の中に滞まるものだけの寄与を考えると、箱の中では、 χ は 1 をとるため、

$$C^x(t) \sim (1 - \langle \chi \rangle)^2 W(t) \sim t^{-(\beta-1)} \quad (10)$$

のようにベキ的な長時間相関³をもつ。 $f(t) \sim t^{-1-\beta}$ は、島トーラスのまわりの島トーラスという入れ子状の階層構造によると考えられており、 β を理論的に導出する試みもなされている⁴。

³C.F.F.Karney, Physica 8D(1983)360

⁴J.D.Meiss, E.Ott, Physica D20(1986)387, J.D.Meiss, Physica D74(1994)254

図 6: (a) $f(t)$ (b) $f^c(t)$

次に、カオスの構造と統計性を捉えるのに有効であると思われる拡大率スペクトル⁵が、このように長時間相関がある場合にどのようなになるのか調べてみた。

写像を $X_{i+1} = F(X_i)$ のようにあらわし、 X_i での不安定多様体に沿った単位ベクトルを $u_1(X_i)$ とすると、局所軌道拡大率は、

$$\lambda_1(X_i) = \log |DF(X_i)u_1(X_i)| \quad (11)$$

となる。ただし、 $DF(X)$ は、Jacobi 行列をあらわす。これを、 n ステップ足しあわせて、 $S_n(X_0)$, $\Lambda_n(X_0)$ を次のように定義する。

$$\Lambda_n(X_0) \equiv S_n(X_0)/n, \quad S_n(X_0) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1(X_i) \quad (12)$$

さらに、

$$P(\Lambda; n) \equiv \langle \delta(\Lambda_n(X_0) - \Lambda) \rangle \quad (13)$$

$P_{max}(n) \equiv \max_{\Lambda} P(\Lambda; n)$ とし、

$$\psi(\Lambda) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} -(1/n) \log[P(\Lambda; n)/P_{max}(n)] \quad (14)$$

により $\psi(\Lambda)$ を導入する。

まず、 S_n の分散について考える。島トーラスの近傍では、 $\lambda_1 \sim 0$ 、それ以外では、ある有限の値をとると考えると、 S_n は $M_n(X_0) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \chi(X_i)$ とちょうど対応

⁵たとえば、H.Mori et. al, Prog. Theor. Phys. Suppl. 99 (1989) 1

がつく。さらに、 J_n の分散の場合と同様の考察によれば、

$$\langle (S_n - \langle S_n \rangle)^2 \rangle \sim \langle (M_n - \langle M_n \rangle)^2 \rangle \sim n^{3-\beta} \quad (15)$$

となる。図7に S_n と M_n の分散を n に対してプロットしたものをそれぞれ示してある。 $f(t)$ のプロットから求めた β とよい一致を示している。

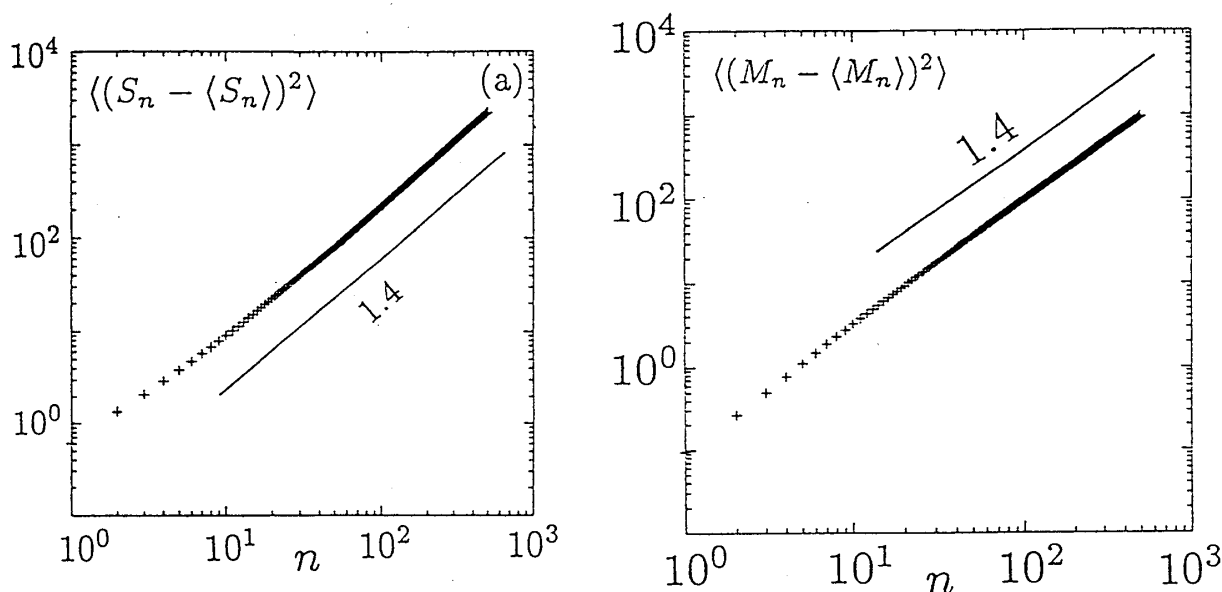


図7: (a) S_n の分散 (b) M_n の分散

図8(a)は、 $\psi(\Lambda)$ についての数値実験を示したものである。 $n \rightarrow \infty$ では、図8(b)のような形になると思われる。 $\psi(\Lambda) = 0$ の部分は、長時間相関によるものである。 $\Lambda < 0$ のスロープ -2 の部分は、接構造によるもの⁶である。 $\psi(\Lambda) = 0$ をあたえる Λ は、平均値を意味しているが、これが長時間相関のためにこれが縮退してしまうかのようにみえる。実際には n と共に変化しており、 $\psi(\Lambda)$ による記述では、長時間相関の特性が表現されていない。

再び、 M_n と S_n の振舞いの類似性に着目すると、次の Feller の再帰事象の定理をあてはめることが出来る⁷。

互いに独立な再帰事象について再帰時間が t 以上である確立 $F(t)$ が

$$1 - F(t) \sim t^{-\alpha} \quad (1 < \alpha < 2)$$

⁶T.Horita, H.Mori, Prog. Theor. Phys. 91(1994)677

⁷W.Feller, Trans. Am. Math. Soc. 67 (1994)98; X.-J.Wang, Phys. Rev. A40 (1989) 6647

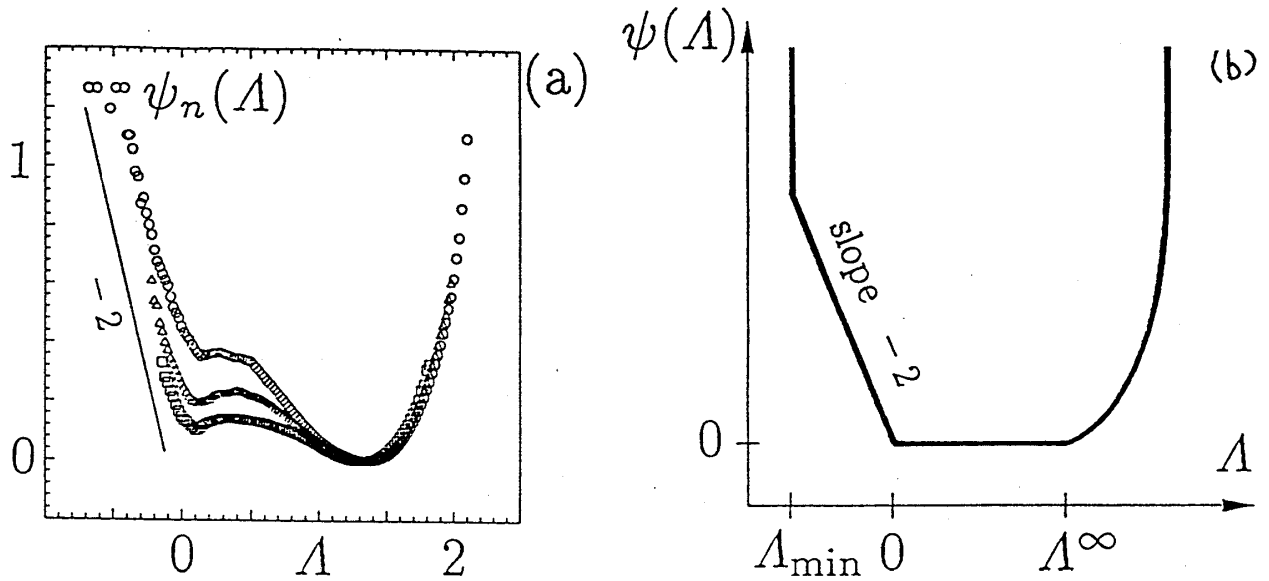


図 8: (a) $\psi(\Lambda)$ $n = 10, 20, 40$ にとってある。(b) 概形

に従うとき、時間間隔 n の間におこる事象の回数 N_n は、

$$Pr\{N_n \geq (n/\mu) - (b_n x)/\mu^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\} \rightarrow G_\alpha(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

に従う。ただし、 $1 - F(b_n) \simeq 1/n$, μ は平均再帰時間、 G_α の特性関数は、

$$\gamma_\alpha = \exp\{-|z|^\alpha e^{-i(\text{sgn } z)\pi\alpha/2} \Gamma(1-\alpha)\}$$

である。

ここで、

$$\alpha \leftrightarrow \beta$$

$$N_n \leftrightarrow M_n \leftrightarrow S_n$$

の対応関係に着目すると、

$$P(\Lambda; n)/P_{\max}(n) \rightarrow g_\beta(-cn^\delta(\Lambda - \bar{\Lambda}_n)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (16)$$

となる。ただし、 $c > 0$ は定数、 $\delta \equiv \frac{\beta-1}{\beta}$, $\bar{\Lambda}_n$ を $P(\Lambda; n) = P_{\max}(n)$ となる Λ の値、 $g_\beta \equiv dG_\alpha/dx|_{\alpha=\beta}$ である。図 9 は、数値実験の結果である。Feller の定理を適用できることがわかる。

- ベキ的な減衰をする長時間相関がある。(島トーラス近傍では長時間相関を持つが、カオスの海の只中では相関は急速に減衰する。)

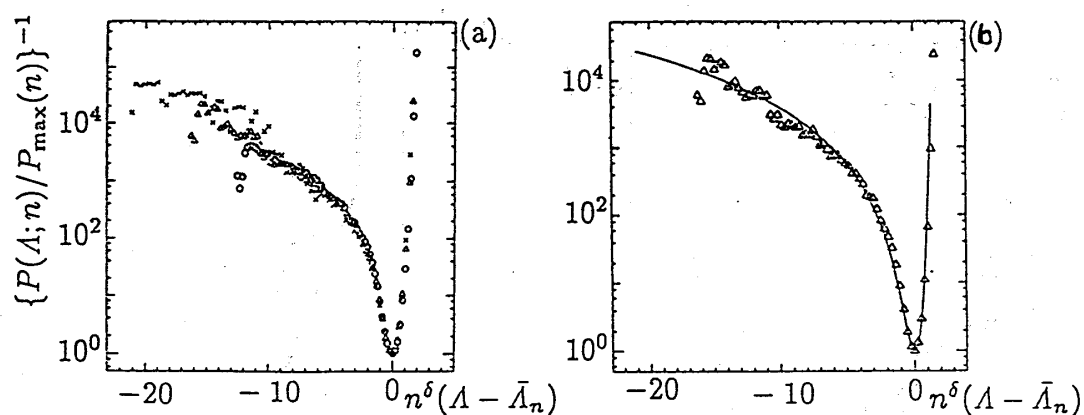


図 9: $P(\Lambda; n)$ のスケーリング (a) $n = 500, 1000, 2000$ にとってある。 (b) 実線は G_α より求めたもの

- $\psi(\Lambda)$ によるカオスの統計熱力学的記述のみでは不完全である。

ことを述べた。さらに以下の点について明らかにする必要があるように思われる。

- 指数 β は、どのようにきまるのか?
 - 普遍的な β の値は存在するのか?
 - 数値的に正しい β を求めることは可能なのか? トーラスの領域が多い場合の解析が困難
- 拡散係数 D とカオスを形づくる不変集合との関係は?
- 自由度を大きくしていったどうなるのか? 統計力学
 - 時間相関関数?
 - 統計熱力学的形式による記述?