

スチェクロフ固有値問題と結合解法 (その 2)

電気通信大学 情報工学科

牛島 照夫 (Teruo USHIJIMA)

網代 敦 (Atsushi AJIRO)

横松 大作 (Daisaku YOKOMATSU)

要旨

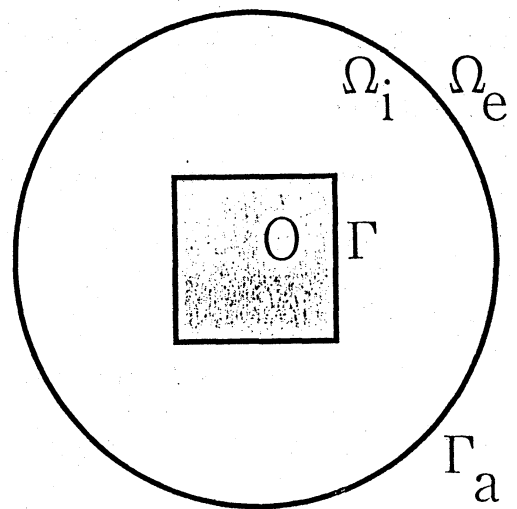
斉次ディリクレ条件の下で、外部領域におけるポアソン方程式の有限要素近似を考察する。方程式の非斉次項 f は、有界な台をもつ二乗可積分関数であるとする。仮想境界として f の台を内部に含む十分大きな円を用いて、問題を仮想境界上で非局所境界条件を持つ内部問題に変換する。この条件は、ラプラス方程式の外部ディリクレ問題に附随するスチェクロフ作用素を用いて表現される。この内部問題の有限要素近似の考察と、我々の数値計算結果の報告が本論文でなされる。

1. モデル問題

障害物 O は、区分的になめらかな境界 Γ をもった平面内の有界領域であるとし、その補集合を Ω とする。サポートが有界な $L^2(\Omega)$ の元 f に対して外部領域 Ω におけるポアソン方程式の斉次ディリクレ問題を取り上げる。

$$(E) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \sup_{|x| > a} |u| < \infty. \end{cases}$$

ここで、正数 a は十分大きくとって f のサポートが原点を中心とする半径 a の円の内部に含まれるものとしている。そのとき、原点を中心とする半径 a の円を Γ_a とし、その内部領域と Ω の共通部分を Ω_i 、外部領域を Ω_e とする。



$$\Omega = \Omega_i \cup \Gamma_a \cup \Omega_e$$

図 1.1 領域図

2. 外部スチェクロフ作用素

原点を中心とする半径 a の円周を Γ_a とし、ヒルベルト空間 $X = L^2(\Gamma_a)$ における自己共役作用素 Λ を次のように定める。まず円周 Γ_a と円の外部領域 Ω_e をそれぞれ次のように極座標を用いて表わすものとする。

$$\Gamma_a = \{ (a \cos \theta, a \sin \theta) : -\pi < \theta \leq \pi \},$$

$$\Omega_e = \{ (x, y) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > a, -\pi < \theta \leq \pi \}.$$

ヒルベルト空間 $X = L^2(\Gamma_a)$ の内積を

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma_a} \varphi \bar{\psi} d\Gamma = a \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a \cos \theta, a \sin \theta) \bar{\psi}(a \cos \theta, a \sin \theta) d\theta$$

で表す. 関数系

$$\left\{ C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}, C_n = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \cos n\theta, S_n = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sin n\theta, n = 1, 2, \dots \right\}$$

は, $X = L^2(\Gamma_a)$ における完全正規直交系である. 定義域 $D(\Lambda)$ を

$$D(\Lambda) = \left\{ \varphi \in L^2(\Gamma_a) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a} \right)^2 \{ |(\varphi, C_n)|^2 + |(\varphi, S_n)|^2 \} < \infty \right\}$$

とする自己共役作用素 Λ を,

$$\Lambda \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a} \right) \{ (\varphi, C_n) C_n + (\varphi, S_n) S_n \}, \quad \varphi \in D(\Lambda)$$

によって定めることができる. この作用素を外部スチュクロフ作用素と呼ぶ. この作用素の固有値は,

$$\lambda_n = \frac{n}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

である.

円 Γ_a 上の周期的な連続関数 φ が与えられたとき, ラプラス方程式の外部境界値問題 (E_e) の解 u_e は, Ω_e で有界とすれば一意に存在する ([7]).

$$(E_e) \quad \begin{cases} -\Delta u_e = 0 & \text{in } \Omega_e, \\ u_e = \varphi & \text{on } \Gamma_a, \\ \sup_{\Omega_e} |u_e| < \infty. \end{cases}$$

領域 Ω_e からみた境界 Γ_a における外向き法線微分を $\frac{\partial}{\partial n_e}$ で表す. 問題 (E_e) において

$\varphi \in D(\Lambda)$ であれば, $\frac{\partial u_e}{\partial n_e} = \Lambda \varphi$ である. この事情は [8] で紹介した.

3. 非局所境界条件をもつ内部問題への変換

モデル問題 (E) において, $\Omega - \Omega_e$ の内部を Ω_i とし, (E) の解 u を Ω_i および Ω_e に制限したものを, それぞれ, u_i および u_e と書く.

$$(1) \quad u_i = u|_{\Omega_i}, \quad u_e = u|_{\Omega_e}.$$

また, 仮想境界 Γ_a における u の境界値と, Ω_i から見た外向き法線導関数値をそれぞれ φ と q とする.

$$(2) \quad u = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{on } \Gamma_a.$$

このとき u_i は、つぎの Ω_i における混合境界条件付きのポアソン方程式 (E_i) の解である。

$$(E_i) \quad \begin{cases} -\Delta u_i = f & \text{in } \Omega_i, \\ u_i = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = q & \text{on } \Gamma_a. \end{cases}$$

円 Γ_a 上の連続関数 φ が与えられたとき、ディリクレ境界条件付きラプラス方程式の解 u_e は、 Ω_e で有界とすれば一意である。ところで、 $q = -\frac{\partial u_e}{\partial n_e}$ であるから、前述の Λ を用いると、(3) のように書ける。

$$(3) \quad q = -\Lambda \varphi.$$

したがって問題 (E_i) の解 u_i は、次の問題 $(\mathcal{E})$ の解である。

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega_i, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\Lambda u & \text{on } \Gamma_a. \end{cases}$$

逆に $(\mathcal{E})$ の解 u で、 Γ_a における境界値 φ が $D(\Lambda)$ の元であるならば、

$$(4) \quad u_e = (\varphi, C_0) C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \{ (\varphi, C_n) C_n + (\varphi, S_n) S_n \}$$

と定めると u_e は (E_e) を満たし、

$$(5) \quad u = \begin{cases} u_i & \text{in } \Omega_i, \\ u_e & \text{in } \Omega_e \end{cases}$$

とおくと、 u は (E) の解である。大略このような考えで (E) と $(\mathcal{E})$ が等価であることがわかる。

4. 弱形式問題とその離散化

まず、次の記法を導入する。

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad F(v) = \int_{\Omega_i} f v \, dx, \\ l(\varphi, \psi) &= \int_{\Gamma_a} (\Lambda \varphi) \psi \, d\Gamma. \end{aligned}$$

ここで、 γ は $H^1(\Omega_i)$ から $H^{1/2}(\Gamma_a)$ 上へのトレース作用素であるとする。関数空間 V を

$$V = \{ v \in H^1(\Omega_i) : v|_{\Gamma} = 0 \}$$

とし、 V における二次形式 $a_{\infty}(u, v)$ を

$$a_{\infty}(u, v) = a(u, v) + l(\gamma u, \gamma v), \quad u, v \in V$$

によって定める. このような設定の下で, 問題 (E) の弱形式問題 (II) は,

$$(II) \quad \begin{cases} a_{\infty}(u, v) = F(v), & v \in V, \\ u \in V \end{cases}$$

と書ける. 二次形式 $a_{\infty}(u, v)$ は, V 上強圧的であるから, (II) は一意可解である.

さて V_h を V の有限次元部分空間とすると (II) の標準的なガレルキン近似問題は,

$$(\Pi_h) \quad \begin{cases} a_{\infty}(u_h, v_h) = F(v_h), & v_h \in V_h, \\ u_h \in V_h \end{cases}$$

である. しかし, 通常の有限要素空間を V_h にとった場合には, $l(\gamma u_h, \gamma v_h)$ を正確に計算することは一般にはできないので, 計算可能な連立一次方程式に (Π_h) を帰着できない. そこで, 若干の工夫をする. $\varphi \in L^2(\Gamma_a)$ に対して,

$$P_M \varphi = (\varphi, C_0) C_0 + \sum_{n=1}^{M-1} \{ (\varphi, C_n) C_n + (\varphi, S_n) S_n \} + (\varphi, C_M) C_M$$

とおく. $P_M \varphi$ は φ の有限フーリエ展開である. そこで,

$$\begin{aligned} a_M(u, v) &= a(u, v) + l_M(\gamma u, \gamma v), \\ l_M(\varphi, \psi) &= l(P_M \varphi, \psi) \end{aligned}$$

と新たな記法を導入して, 次の離散化問題 (Π_h^M) を導入する.

$$(\Pi_h^M) \quad \begin{cases} a_M(u_h, v_h) = F(v_h), & v_h \in V_h, \\ u_h \in V_h. \end{cases}$$

ここで V_h は V の有限次元部分空間であり, M と h は独立なパラメータである. (問題 (II) への帰着に, 著者達の考えが及んだのは, [3] 及び [2] によるところが大であったことを附記する.)

5. 実際の計算における離散化問題

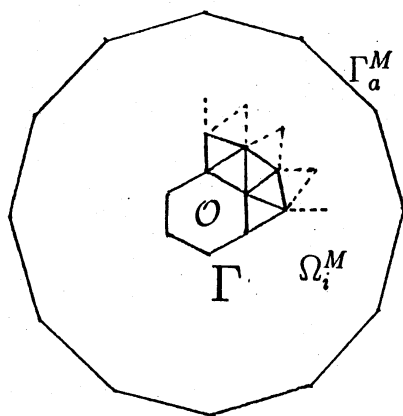


図 5.1 領域 Ω_i^M の三角形分割

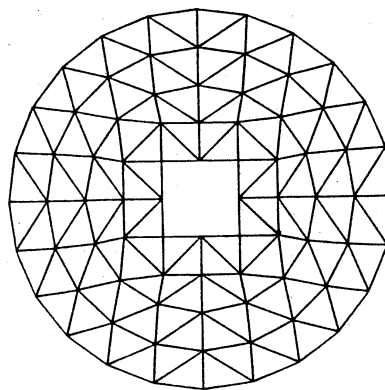


図 5.2 数値計算に用いた基本三角形分割

内部境界 Γ は、多角形であるとする。円周 Γ_a を $2M$ 個に等分して、各等分点を頂点とする正多角形の内部から、障害物 $\mathcal{O}$ を取り除いた領域を Ω_a^M とし、正多角形の周を Γ_a^M とする。領域 Ω_a^M を三角形分割する。ただし、 Γ_a^M 上の節点は正多角形の頂点の全てよりなり、それ以外の点は節点ではないように分割する。この分割に対応する区分一次連続要素の作る空間で、 Γ 上では 0 になるものの全体を $\hat{V}_h$ とする。

さて $\hat{V}_h$ の元 $\hat{v}_h$ を Γ_a^M に制限した関数を $\gamma_M(\hat{v}_h)$ とすると、これは Γ_a^M 上の連続な周期関数で、隣接する節点の間ではその節点値を直線で結んでできる関数値を持っている。このような関数の一つを $\hat{\varphi}_M$ と書く。 $\hat{\varphi}_M$ を Γ_a の上で集中化したものを $\bar{\varphi}_M$ とする。この手続きを説明する。記法を簡単にするために Γ_a^M 上の節点 b_j と、 Γ_a 上の点 b を、それぞれ次の (a), (b) のように極座標表示する。

$$(a) \quad b_j = (a \cos \theta_j, a \sin \theta_j), \quad \theta_j = \frac{j\pi}{M}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm(M-1), M,$$

$$(b) \quad b = (a \cos \theta, a \sin \theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Γ_a 上の階段関数 $\bar{w}_j$ を

$$\bar{w}_j(b) = \begin{cases} 1 & : |\theta - \theta_j| < \frac{\pi}{2M}, \\ 0 & : |\theta - \theta_j| > \frac{\pi}{2M}, \end{cases} \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm(M-1),$$

$$\bar{w}_M(b) = \begin{cases} 1 & : \pi - \theta < \frac{\pi}{2M} \text{ or } \theta + \pi < \frac{\pi}{2M}, \\ 0 & : \text{else} \end{cases}$$

によって定める。 $\hat{\varphi}_M$ の集中化 $\bar{\varphi}_M$ は、

$$\bar{\varphi}_M = \sum_{j=-(M-1)}^M \hat{\varphi}_M(b_j) \bar{w}_j$$

によって定める。これを用いて P_M に対応する $\hat{P}_M$ を次のようにおく。

$$\begin{aligned} \hat{P}_M \hat{\varphi}_M &\equiv (\bar{\varphi}_M, \bar{C}_0^M) C_0 \\ &+ \sum_{n=1}^{M-1} \{ (\bar{\varphi}_M, \bar{C}_n^M) C_n + (\bar{\varphi}_M, \bar{S}_n^M) S_n \} + (\bar{\varphi}_M, \bar{C}_M^M) C_M. \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{C}_n^M$ と $\bar{S}_n^M$ はそれぞれ次のように定められる Γ_a 上の階段関数である。

$$\bar{C}_n^M = \sum_{j=-(M-1)}^M C_n(\theta_j) \bar{w}_j, \quad \bar{S}_n^M = \sum_{j=-(M-1)}^M S_n(\theta_j) \bar{w}_j.$$

$\hat{P}_M \hat{\varphi}_M$ の展開係数 $a_n^M = (\bar{\varphi}_M, \bar{C}_n^M)$, $b_n^M = (\bar{\varphi}_M, \bar{S}_n^M)$ は、本質的には離散フーリエ変換である。今定義した $\hat{P}_M$ は、 Γ_a^M 上の折れ線関数 $\hat{\varphi}_M$ を、 $L^2(\Gamma_a)$ 上の関数に写していることに注意すると次の $\hat{V}_h$ 上の二次形式 $\hat{I}_M(\hat{u}_h, \hat{v}_h)$ が定まることがわかる。

$$\hat{l}_M(\hat{u}_h, \hat{v}_h) \equiv \int_{\Gamma_a} \{\Lambda \hat{P}_M(\gamma_M \hat{u}_h)\} \hat{P}_M(\gamma_M \hat{v}_h) d\Gamma, \quad \hat{u}_h, \hat{v}_h \in \hat{V}_h.$$

さらに,

$$a^M(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = \int_{\Omega_i^M} \nabla \hat{u}_h \nabla \hat{v}_h dx, \quad F^M(\hat{v}_h) = \int_{\Omega_i^M} f \hat{v}_h dx, \quad \hat{u}_h, \hat{v}_h \in \hat{V}_h$$

とおく. ここで, M は十分大きくて Ω_i^M が f のサポートを含んでいるものとする. 二次形式

$$\hat{a}_M(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = a^M(\hat{u}_h, \hat{v}_h) + \hat{l}_M(\hat{u}_h, \hat{v}_h)$$

を導入すれば, 我々は次のような計算可能な離散化問題 $(\hat{\Pi}^M)$ を得る.

$$(\hat{\Pi}^M) \quad \begin{cases} \hat{a}_M(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = F^M(\hat{v}_h), & \hat{v}_h \in \hat{V}_h, \\ \hat{u}_h \in \hat{V}_h. \end{cases}$$

二次形式 $\hat{a}_M(\hat{u}_h, \hat{v}_h)$ は, $\hat{V}_h$ 上強圧的であるから, $(\hat{\Pi}^M)$ は一意可解である. 我々は, この問題 $(\hat{\Pi}^M)$ を当面数値計算の対象として, 理論的かつ数値的にその妥当性を調べていくことにしている.

6. 離散化問題 $(\hat{\Pi}^M)$ の行列表現

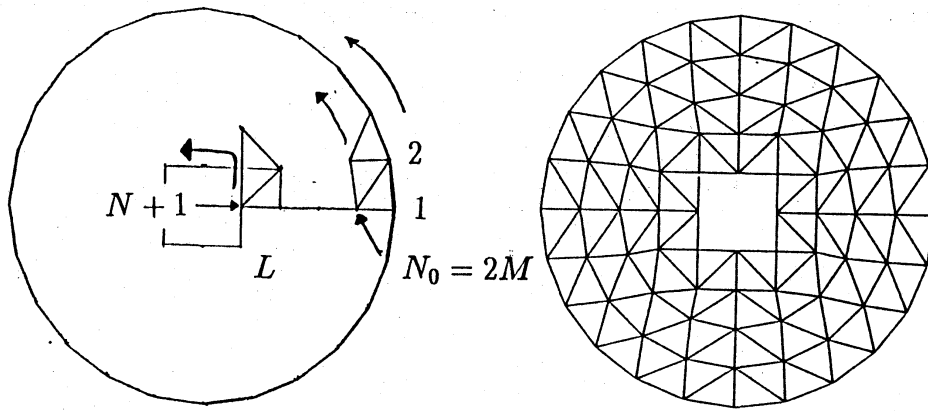


図 6.1 基本三角形分割の場合の節点番号付け

内部領域 Ω_i^M の三角形分割による節点を $\{b_j : 1 \leq j \leq L\}$ とする. ただし, $N_0 = 2M$ と $N_0 < N < L$ に対して,

$$b_j \in \Gamma_a : 1 \leq j \leq 2M, \quad b_j \in \Gamma : N+1 \leq j \leq L$$

となっているものとする. ここで, $1 \leq j \leq M$ のとき b_j は §5 の b_j と一致し, $M+1 \leq j \leq 2M$ のとき, b_j は §5 の b_{j-2M} と一致させる. 標準的な $\hat{V}_h$ の基底を $\{\hat{w}_j : 1 \leq j \leq L\}$ とする. すなわち w_j は, $\hat{w}_j \in \hat{V}_h$ であって, $\hat{w}_j(b_k) = \delta_{jk}$ をみたすものである. $\hat{V}_h$ の任意の元 $\hat{v}_h$ は,

$$\hat{v}_h = \sum_{j=1}^L V(j) \hat{w}_j, \quad V(j) = \hat{v}_h(b_j)$$

と表わされる。さて、

$$\alpha_{ij} = a^M(\hat{w}_j, \hat{w}_i), \quad \lambda_{ij} = \hat{l}_M(\hat{w}_j, \hat{w}_i): \quad 1 \leq i, j \leq L$$

とおく。明らかに、

$$\lambda_{ij} = 0, \quad i > N_0 \text{ or } j > N_0$$

である。行列 $\mathbf{A}$ 、非斉次ベクトル $\mathbf{F}$ 及び、未知ベクトル $\mathbf{V}$ を次のように導入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_0}, & \mathbf{F} &= (F_j)_{1 \leq j \leq N}, \\ \mathbf{A}_1 &= (\alpha_{ij})_{N_0+1 \leq i, j \leq N}, & F_j &= F^M(\hat{w}_j), \\ \mathbf{A}_2 &= (\alpha_{ij})_{N+1 \leq i, j \leq L}, & \mathbf{F}_0 &= (F_j)_{1 \leq j \leq N_0}, \\ \mathbf{A}_{10} &= (\alpha_{ij})_{N_0+1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N_0}, & \mathbf{F}_1 &= (F_j)_{N_0+1 \leq j \leq N}, \\ \mathbf{A}_{01} &= \mathbf{A}_{10}^T, & \mathbf{V} &= (V(j))_{1 \leq j \leq N}, \\ \mathbf{A}_{21} &= (\alpha_{ij})_{N_0+1 \leq i \leq L, N_0+1 \leq j \leq N}, & \mathbf{V}_0 &= (V(j))_{1 \leq j \leq N_0}, \\ \mathbf{A}_{12} &= \mathbf{A}_{21}^T, & \mathbf{V}_1 &= (V(j))_{N_0+1 \leq j \leq N}. \\ \mathbf{A} &= (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_0}. \end{aligned}$$

これらの行列とベクトルを用いれば、 $(\hat{\Pi}_M)$ は次の (E) の形になる。

$$(E) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A} & \mathbf{A}_{01} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \end{pmatrix}.$$

ここで、 α_{ij} は、節点座標を用いて解析的に表示される。さらに F_j は、必要があれば数値積分公式を用いて任意精度で近似計算できる。残った問題は λ_{ij} である。ここで、 C_n と S_n は Λ の固有関数で、その固有値が $\lambda_n (= \frac{n^2}{a})$ であることに注意する。 $1 \leq j \leq 2M$ のとき、

$$\hat{P}_M \gamma_M \hat{w}_j = (\bar{w}_j, \bar{C}_0^M) C_0 + \sum_{n=1}^{M-1} \{(\bar{w}_j, \bar{C}_n^M) C_n + (\bar{w}_j, \bar{S}_n^M) S_n\} + (\bar{w}_j, \bar{C}_M^M) C_M$$

である。そこで、

$$\begin{aligned} c_{jn} &= (\bar{w}_j, \bar{C}_n^M) : 1 \leq j \leq 2M, \quad 0 \leq n \leq M, \\ s_{jn} &= (\bar{w}_j, \bar{S}_n^M) : 1 \leq j \leq 2M, \quad 1 \leq n \leq M-1 \end{aligned}$$

とおく。計算すると次のようになる。

$$c_{jn} = a \int_0^{2\pi} \bar{w}_j \sum_{k=1}^{2M} C_n(\theta_k) \bar{w}_k d\theta = a C_n(\theta_j) \int_0^{2\pi} \bar{w}_j^2 d\theta = \frac{a\pi}{M} C_n\left(\frac{jn\pi}{M}\right).$$

同様に、

$$s_{jn} = \frac{a\pi}{M} S_n\left(\frac{jn\pi}{M}\right).$$

したがって,

$$\begin{aligned} \Lambda \hat{P}_M(\gamma^M \hat{w}_j) &= c_{j0} \Lambda C_0 + \sum_{n=1}^{M-1} \{ c_{jn} \Lambda C_n + s_{jn} \Lambda S_n \} + c_{jM} \Lambda C_M \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} \{ c_{jn} \Lambda C_n + s_{jn} \Lambda S_n \} + c_{jM} \Lambda C_M. \end{aligned}$$

一方,

$$\hat{P}_M(\gamma^M \hat{w}_i) = c_{i0} C_0 + \sum_{n=1}^{M-1} \{ c_{in} C_n + s_{in} S_n \} + c_{iM} C_M.$$

関数系 $\{C_n, S_n\}$ は $L^2(\Gamma_a)$ での完全正規直交系であるから,

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \hat{l}_M(\hat{w}_i, \hat{w}_j) = \int_{\Gamma_a} \{ \Lambda \hat{P}_M(\gamma_M \hat{w}_j) \} \hat{P}_M(\gamma_M \hat{w}_i) d\Gamma \\ &= \frac{\pi a}{M^2} \times \left\{ \sum_{n=1}^{M-1} \lambda_n \cos\left(\frac{(i-j)n\pi}{M}\right) + \lambda_M \cos(i\pi) \cos(j\pi) \right\}. \end{aligned}$$

さらに計算を進めると,

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{M+1}{M} & : i = j, \\ \frac{\pi}{2M^2} \left[(-1)^{(i-j)} M - \frac{1 - (-1)^{(i-j)}}{1 - \cos \frac{(i-j)\pi}{M}} \right] & : i \neq j \end{cases}$$

を得る ([1]).

なお, Γ において非斉次境界データ g を与える場合の対応する離散化問題は,

$$(E) \quad \begin{pmatrix} A_0 + \Lambda & A_{01} & 0 \\ A_{10} & A_1 & A_{12} \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ G \end{pmatrix}$$

の形に帰着される. ただし, 境界データ g は,

$$g = \sum_{j=N+1}^L G(j) \hat{w}_j, \quad G = (G(j))_{N+1 \leq j \leq L}$$

なる形であるとした. 行列 I_2 は, $L - N$ 次単位行列である.

7. 離散問題 (Π_h^M) の解の誤差の事前評価について

はじめに実ヒルベルト空間 $L^2(\Gamma_a)$ における自己共役作用素 Λ^s を次のように定める. 指数 s は正数である.

$$D(\Lambda^s) = \left\{ \varphi \in L^2(\Gamma_a) : \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{a}\right)^{2s} \{ |(\varphi, C_n)|^2 + |(\varphi, S_n)|^2 \} < \infty \right\},$$

$$\Lambda^s \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a}\right)^s \{ (\varphi, C_n) C_n + (\varphi, S_n) S_n \} \text{ for } \varphi \in D(\Lambda^s).$$

あきらかに $\Lambda^1 = \Lambda$ である. $L^2(\Gamma_a)$ のノルムを $|\cdot|$ で表わす.

$$|\varphi| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = \left(\int_{\Gamma_a} |\varphi|^2 d\Gamma \right)^{1/2}.$$

集合 $D(\Lambda^s)$ は, ノルム:

$$|\varphi|_s = (|\varphi|^2 + |\Lambda^s \varphi|^2)^{1/2}, \quad \varphi \in D(\Lambda^s)$$

によって完備なヒルベルト空間になる. この空間を $H^s(\Gamma_a)$ と表わす. 原点を中心とする半径 a の円の内部を Ω_a と表わす. 正整数 m に対して, ソボレフ空間 $H^m(\Omega_a)$ を

$$H^m(\Omega_a) = \{ v \in L^2(\Omega_a) : D^\alpha v \in L^2(\Omega_a), |\alpha| \leq m \}$$

で定義する. ここで $D^\alpha v$ は超関数的導関数:

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0$$

を表わしている. 補間空間論 (Lions-Magenes[5]) にしたがって, $s \in [0, 1]$ に対して,

$$H^{1+s}(\Omega_a) = [H^2(\Omega_a), H^1(\Omega_a)]_{1-s}$$

と定める. ([5] に厳密にしたがうためには, $H^m(\Omega)$ の元 v を複素数値関数として取り扱うべきであるが, 記述が煩瑣になるので, 便宜的な導入をした.) 領域 Ω_a の近傍で, 無限回微分可能な関数の全体を $C^\infty(\overline{\Omega_a})$ で表わす. $C^\infty(\overline{\Omega_a})$ の元 v を境界 Γ_a に制限すると, 境界 Γ_a での無限回微分可能な関数が得られる. この対応を γ で表わす:

$$C^\infty(\overline{\Omega_a}) \ni v \rightarrow \gamma v \in C^\infty(\Gamma_a).$$

当然の事ながら, $C^\infty(\Gamma_a)$ の元は, θ に関してその全ての導関数と共に周期 2π を持つものである. 関数解析の基本事項である次の事実を補題 1 とする.

補題 1

- (L 1) γ は $H^1(\Omega_a)$ から $H^{1/2}(\Gamma_a)$ への作用素として連続的に拡張される.
 (L 2) (L 1) の拡張を又 γ で表わすと,

$$H^{1/2}(\Gamma_a) = \gamma(H^1(\Omega_a)) = \{ \gamma v : v \in H^1(\Omega_a) \}$$

である.

- (L 3) γ は $H^2(\Omega_a)$ から $H^{3/2}(\Gamma_a)$ への連続作用素とみなせる. ■

補題 1 の証明は, 例えば, Nečas[6] などにゆだねる. 補間空間の定義から,

$$H^{1/2+s}(\Gamma_a) = [H^{3/2}(\Gamma_a), H^{1/2}(\Gamma_a)]_{1-s}, \quad 0 \leq s \leq 1$$

である ([5] p.10 (2.7)). 補題 1 の (L 1) と (L 3) と, [5] Chapt.1 Theorem 5.1 (p.27) により, 次の命題 1 を得る.

命題 1

$$\gamma \in L(H^{1+s}(\Omega_a), H^{1/2+s}(\Gamma_a)), \quad 0 \leq s \leq 1$$

であり, 作用素ノルム:

$$\|\gamma\|_{L(H^{1+s}(\Omega_a), H^{1/2+s}(\Gamma_a))}$$

は, $s \in [0, 1]$ に関して一様に有界である. ■

上の命題において, バナッハ空間 X からバナッハ空間 Y への連続線形作用素の全体を $L(X, Y)$ で表わすものとして,

$$L(H^{1+s}(\Omega_a), H^{1/2+s}(\Gamma_a)) = L(X, Y)|_{X=H^{1+s}(\Omega_a), Y=H^{1/2+s}(\Gamma_a)}$$

である. 次の記法を準備する.

$$\begin{aligned} a(v) &= a(v, v)^{1/2}, \\ l(\varphi) &= l(\varphi, \varphi)^{1/2}. \end{aligned}$$

すなわち, $v \in H^1(\Omega_i)$ に対して,

$$a(v) = \left(\int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

であり, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_a)$ に対して,

$$l(\varphi) = |\Lambda^{1/2}\varphi| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a} \right) \{ |(\varphi, C_n)|^2 + |(\varphi, S_n)|^2 \} \right]^{1/2}$$

である.

命題 2

障害物 $\mathcal{O}$ と仮想境界の半径 a のみに依存する定数 $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\mathcal{O}, a)$ が存在して,

$$l(\gamma v) \leq \bar{\lambda} a(v), \quad v \in V$$

が成立する.

証明

Γ_a の近傍で恒等的に 1 であり, $\mathcal{O}$ の近傍で恒等的に 0 である $C^\infty(\overline{\Omega_a})$ の元 θ を一つ固定する. あきらかに,

$$(7.1) \quad \gamma(\theta v) = \gamma v$$

である。補題1の(L1)より, ある C が存在して,

$$(7.2) \quad |\gamma(\theta v)|_{1/2} \leq C \|\theta v\|_{H^1(\Omega_a)}$$

である。 θ に依存する定数 C_θ が存在して,

$$(7.3) \quad \|\theta v\|_{H^1(\Omega_a)} \leq C_\theta \|v\|_{H^1(\Omega_i)}$$

である。ところで,

$$V = \{v \in H^1(\Omega_i) : v|_\Gamma = 0\}$$

上では, $H^1(\Omega_i)$ のノルムと $a(v)$ とは同値である。すなわち Ω_i に依存する定数 C_i が存在して

$$(7.4) \quad \|v\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_i a(v), \quad v \in V$$

である。(7.1), (7.2), (7.3), (7.4) より,

$$|\gamma v|_{1/2} \leq C C_\theta C_i a(v)$$

である。ところで $|\varphi|_s$ の定義から,

$$l(\gamma v) = |\Lambda^{1/2} \gamma v| \leq |\gamma v|_{1/2}$$

である。したがって,

$$\bar{\lambda} = C C_\theta C_i$$

ととれば, 命題2の主張が成立することが解る。■

命題3

問題 (II) の解 u と問題 (Π^M) の解 u^M に対して,

$$a(u - u^M) \leq \bar{\lambda} l(\gamma u - P_M \gamma u)$$

なる評価が成立する。 $\bar{\lambda}$ は命題2で述べられている定数である。

証明

はじめに任意の $\varphi, \psi \in H^{1/2}(\Gamma_a)$ に対して,

$$(7.5) \quad l(P_M \varphi, \psi) = l_M(\varphi, \psi)$$

であることに注意する。実際,

$$\Lambda^{1/2} P_M \varphi = P_M \Lambda^{1/2} \varphi$$

であり, P_M は $L^2(\Gamma_a)$ での直交射影であることから,

$$\begin{aligned}
l(P_M\varphi, \psi) &= (\Lambda^{1/2}P_M\varphi, \Lambda^{1/2}\psi) \\
&= (P_M\Lambda^{1/2}\varphi, \Lambda^{1/2}\psi) \\
&= (P_M\Lambda^{1/2}\varphi, P_M\Lambda^{1/2}\psi) \\
&= (\Lambda^{1/2}P_M\varphi, \Lambda^{1/2}P_M\psi) \\
&= l_M(\varphi, \psi)
\end{aligned}$$

となるからである。さて、 u は (Π) の解であるから、

$$a(u, v) + l(\gamma u, \gamma v) = F(v)$$

が任意の $v \in V$ に対して成立する。すなわち、

$$(7.6) \quad a(u, v) + l(\gamma u - P_M\gamma u, \gamma v) + l(P_M\gamma u, \gamma v) = F(v)$$

である。 u^M は (Π^M) の解であるから、

$$a(u^M, v) + l_M(\gamma u^M, \gamma v) = F(v)$$

が任意の $v \in V$ に対して成立する。(7.5) から、

$$(7.7) \quad a(u^M, v) + l(P_M\gamma u^M, \gamma v) = F(v)$$

である。(7.6), (7.7) より、

$$a(u - u^M, v) + l(P_M(\gamma(u - u^M)), \gamma v) = l(P_M\gamma u - \gamma u, \gamma v)$$

が任意の $v \in V$ に対して成立する。そこで $v = u - u^M$ とすると、

$$a(u - u^M)^2 \leq l(P_M\gamma u - \gamma u, \gamma(u - u^M))$$

を得る。シュワルツの不等式により、

$$a(u - u^M)^2 \leq l(P_M\gamma u - \gamma u) l(\gamma(u - u^M))$$

である。命題2より、

$$a(u - u^M)^2 \leq \bar{\lambda} l(P_M\gamma u - \gamma u) a(u - u^M)$$

となる。両辺を $a(u - u^M)$ で割ると、命題3の成立がしたがう。■

定理1

(Π) の解 u , (Π_h^M) の解 u_h^M と V_h の任意の元 v_h に対して、

$$a(u - u_h^M) \leq (1 + \bar{\lambda}^2) \{a(u - v_h) + l((1 - P_M)\gamma u)\}$$

と評価される。

証明

補助的に

$$a_M(v) = a_M(v, v)^{1/2}$$

なる記法を用いる。命題2により $v \in V$ に対して、

$$\begin{aligned} a_M(v)^2 &\leq a(v)^2 + l(\gamma v)^2 \\ &\leq (1 + \bar{\lambda}^2) a(v)^2 \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$(7.8) \quad a(v) \leq a_M(v) \leq \sqrt{1 + \bar{\lambda}^2} a(v), \quad v \in V$$

である。これから V は $a_M(u, v)$ を内積とするヒルベルト空間であることがわかる。この内積 $a_M(u, v)$ に関する V から V_h への直交射影を $\mathcal{P}_h^M$ とする。問題 (Π^M) と (Π_h^M) から、

$$a_M(u_h^M, v_h) = a_M(u^M, v_h), \quad v_h \in V_h$$

である。すなわち、

$$u_h^M = \mathcal{P}_h^M u^M$$

である。したがって、

$$u - u_h^M = u - \mathcal{P}_h^M u + \mathcal{P}_h^M u - u_h^M = u - \mathcal{P}_h^M u + \mathcal{P}_h^M(u - u^M)$$

となる。三角不等式から、

$$(7.9) \quad a_M(u - u_h^M) \leq a_M(u - \mathcal{P}_h^M u) + a_M(\mathcal{P}_h^M(u - u^M)).$$

$\mathcal{P}_h^M$ は内積 $a_M(u, v)$ に関する直交射影であるから、

$$(7.10) \quad a_M(u - \mathcal{P}_h^M u) \leq a_M(u - v_h)$$

が任意の $v_h \in V_h$ に対して成立し、さらに、

$$(7.11) \quad a_M(\mathcal{P}_h^M(u - u^M)) \leq a_M(u - u^M)$$

が成立する。したがって、(7.9), (7.10), (7.11) より、

$$a_M(u - u_h^M) \leq a_M(u - v_h) + a_M(u - u^M)$$

である。(7.8) を両辺に用いると、

$$a(u - u_h^M) \leq \sqrt{1 + \bar{\lambda}^2} \{a(u - v_h) + a(u - u^M)\}$$

である。命題3によって、

$$a(u - u_h^M) \leq \sqrt{1 + \bar{\lambda}^2} \{a(u - v_h) + \bar{\lambda}l(\gamma u - P_M \gamma u)\}$$

これから、定理1の成立がしたがう。■

さてパラメタ $h \in (0, \bar{h}]$ に依存する V の有限次元部分空間の列 V_h に対して、次の条件 h-1 が成立しているものとする。

条件 h-1

ある定数 C が存在して $v \in V \cap H^2(\Omega_i)$ に対して、

$$\min_{v \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega_i)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega_i)}$$

と評価される。(定数 C は h と v に依存せずにとれる。)

定理2

解 $u \in V \cap H^{1+s}(\Omega_i)$ が、ある $s \in [0, 1]$ に対して成立しているとする。条件 h-1 の下で、 $s \in [0, 1]$ と解 u に依存しない定数 C が存在して、

$$\|u - u_h^M\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C(h^s + M^{-s}) \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_i)}$$

が成立する。

証明

定理1の評価式を用いる。

第一段 命題2の証明中の(7.4)式より、

$$(7.12) \quad \|u - u_h^M\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_1 a(u - u_h^M)$$

である。

第二段 $\mathcal{R}_h$ を V から V_h への $H^1(\Omega_i)$ 内積に関する直交射影とする。条件 h-1 より、

$$(7.13) \quad \|(1 - \mathcal{R}_h)v\|_{H^1(\Omega_i)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega_i)}.$$

$1 - \mathcal{R}_h$ は直交射影だから、

$$(7.14) \quad \|(1 - \mathcal{R}_h)v\|_{H^1(\Omega_i)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega_i)}.$$

補間空間論より、

$$\|(1 - \mathcal{R}_h)v\|_{H^1(\Omega_i)} \leq Ch^s \|v\|_{H^{1+s}(\Omega_i)}, \quad 0 \leq s \leq 1$$

となる定数 C が存在する ([5] Chapt.1 Theorem 5.1)。これから $v_h = \mathcal{P}_h u$ に対して、

$$\|u - v_h\|_{H^1(\Omega_i)} \leq Ch^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_i)}$$

である。すなわち、

$$(7.15) \quad a(u - v_h) \leq Ch^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_i)}.$$

第三段 $\varphi = \gamma u$ と書く。命題1より s に依らない定数 C があって、

$$(7.16) \quad |\varphi|_{1/2+s} \leq C \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_i)}$$

である。さて、

$$\begin{aligned} l((1 - P_M)\varphi)^2 &= \frac{M}{a} |(\varphi, S_M)|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(\frac{n}{a}\right) \{ |(\varphi, C_n)|^2 + |(\varphi, S_n)|^2 \} \\ &= \frac{a^{2s}}{M^{2s}} \left[\frac{M^{1+2s}}{a^{1+2s}} |(\varphi, S_M)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(\frac{nM^{2s}}{a^{1+2s}}\right) \{ |(\varphi, C_n)|^2 + |(\varphi, S_n)|^2 \} \right] \\ &\leq \frac{a^{2s}}{M^{2s}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a}\right)^{1+2s} \{ |(\varphi, C_n)|^2 + |(\varphi, S_n)|^2 \}. \end{aligned}$$

したがって、

$$(7.17) \quad l((1 - P_M)\varphi) \leq \frac{a^s}{M^s} |\Lambda^{1/2+s}\varphi|$$

を得る。(7.16), (7.17) より、

$$(7.18) \quad l((1 - P_M)\gamma u) \leq \frac{a^s \cdot C}{M^s} \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_i)}$$

を得る。(7.12), (7.15), (7.18) より定理2の評価を得る。■

条件 h-1 は、有限要素近似において望ましい性質であるが、我々の扱う領域 Ω_i において、これを実現するためには、特別の工夫が必要である。 Γ と Γ_a の近くの三角形分割においては Zlamal の曲要素 ([9]) を使うなどの技巧が要求されることを補記する。

8. 収束率測定法について

得られた数値解の真の解への収束率を、数値的に調べるために用いる我々の測定法の背景には、つぎの定理 (倉田-牛島 [4]) がある。

定理

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の元 u を固定する。正のパラメタ $h \in (0, \bar{h}]$ に対して $\mathcal{H}$ の元 $u(h)$ が定まっているとする。このとき、 $e(h), \tilde{e}(h)$ をつぎのようにおく。

$$\begin{aligned} e(h) &= \|u_h - u\|, \\ \tilde{e}(h) &= \|u_h - u_{h/2}\|. \end{aligned}$$

そのとき、パラメタ h に依存しない正定数 $\alpha, c_1, c_2, \tilde{\alpha}, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ が存在して $h \in (0, \bar{h}]$ に対して、

$$(8.1) \quad c_1 h^\alpha \leq e(h) \leq c_2 h^\alpha,$$

$$(8.2) \quad \tilde{c}_1 h^{\tilde{\alpha}} \leq \tilde{e}(h) \leq \tilde{c}_2 h^{\tilde{\alpha}}$$

ならば, $\alpha = \tilde{\alpha}$ である. ■

事前評価 (8.1) があるとする, $e(h)$ の計算が不可能な問題でも, $\tilde{e}(h)$ を用いることによって, $e(h)$ のオーダーを数値的に測定できることをこの定理は保証している. さらに発展させて, (8.1) のような事前評価が得られていない場合でも, $\tilde{e}(h)$ の数値的な挙動から, $e(h)$ のオーダーを推測するのはもっともらしいと我々は考えている.

当然の事であるが, ここで u を解くべき問題の厳密解, u_h を有限要素近似によって得られる離散問題の解, そして, $u_{h/2}$ を刻み幅 h を半分にして得られる近似解にそれぞれ対応させている.

9. 数値計算結果

計算に用いた障害物 Ω は, 一辺 2 の正方形で, その対角線が原点と一致するものである. 便宜上, 向かい合う平行な二辺を座標軸に平行に置くことにする. 仮想境界 Γ_a は, $a = 5$ のところにある場合を考えた. §5 と §6 で述べた節点の選び方に整合する Ω_3^M の三角形分割の一つとして, 図 6.1 に示したものを基本分割とする. このとき, $M = 12$ である. この基本分割の各三角形の各辺を 2 分の 1, 3 分の 1, ... と分割し, 1, 2, 3, 4, 6, 8 細分の三角形分割を作った. 対応する近似内部領域は, Ω_3^M , $M = 12, 24, 36, 48, 72, 96$ である. ただし, 仮想境界 Γ_a 上に一辺を持つ三角形については, 必要な修正を加えて基本分割の細分を作った. 非斉次データ f は,

$$f = \begin{cases} 1 & : r \leq 3, \\ 0 & : r > 3 \end{cases}$$

を用いた. ただし近似問題 ($\hat{\Pi}^M$) においては, 我々の三角形分割によって得られる要素三角形で, 原点を中心とする半径 3 の円内にあるものの和集合を Ω_3^M としたとき,

$$f = \begin{cases} 1 & : (x, y) \in \Omega_3^M, \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

とした.

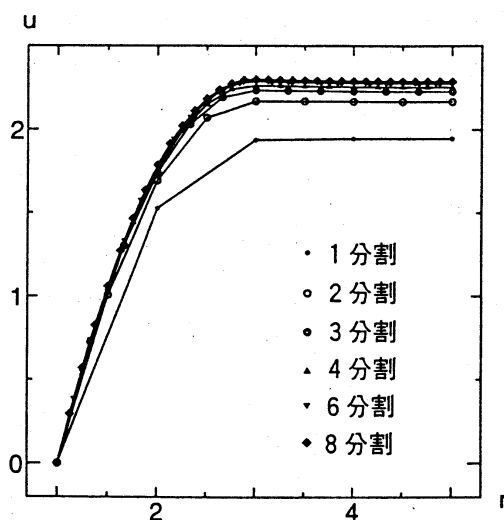


図 9.1 $u^M(r, 0)$ のグラフ

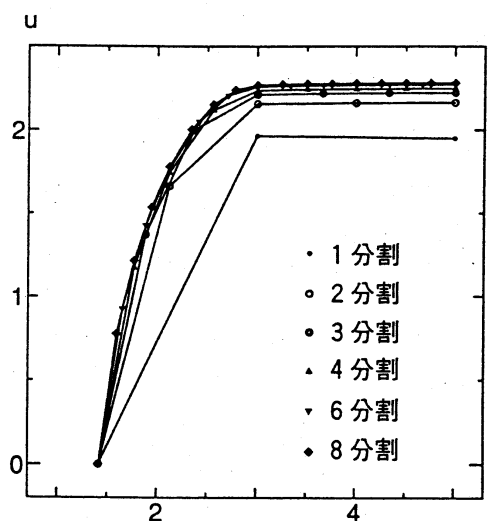


図 9.2 $u^M(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$ のグラフ

これらの設定の下に得られた $(\hat{\Pi}^M)$ の解を $u^M(x, y)$ と書くことにする。図 9.1 は, $u^M(r, 0)$ の, 図 9.2 は, $u^M(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$ のグラフの M に関する依存性を示したものである。対応して, 表 9.1 に $u^M(r, 0)$ の, 表 9.2 に, $u^M(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$ の指定した r における関数値を示した。この表で $2M$ は仮想境界上の節点数, r は半径である。

これらの図と表から見て, 数値解はもっともなものであると思われる。

表 9.1 解 $u^M(r, 0)$ の数値

$2M \setminus r$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
24	1.5261816753498	1.9358965177835	1.9433248290272	1.9459212901699
48	1.6910395491307	2.1688158409046	2.1676268989248	2.1662186579506
72	1.7376738437809	2.2338110564540	2.2286142565526	2.2262808747407
96	1.7584184222450	2.2623489940901	2.2552980548940	2.2526787070049
144	1.7768824519664	2.2873981700538	2.2787809352613	2.2759957051098
192	1.7850382520933	2.2983014374610	2.2890634412466	2.2862376902085

表 9.2 解 $u^M(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$ の数値

$2M \setminus r$	$r = 2.12132$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
24	1.5972671747490	1.9657424617064	1.9520576384445	1.9500378197474
48	1.6637742979942	2.1565993573968	2.1618533965725	2.1637084769237
72	1.7415456689508	2.2115750029671	2.2202981998700	2.2227707458353
96	1.7459431722464	2.2363733741783	2.2461078818194	2.2488790958313
144	1.7704086066214	2.2587284919055	2.2691605464567	2.2720399075336
192	1.7815810429630	2.2687285636126	2.2793527837050	2.2822516025539

ここで, 前節に述べた収束率測定法に基づいて, $\|u_h - u\|$ の漸近挙動を推測するために,

$$\tilde{e}(h) = \|u_h - u_{h/2}\|$$

の計算を試みた。計算例においては, $h = 1/M$ とする。測定を試みるノルムは, L^2 ノルム, $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_i)}$ と H^1 ノルム, $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_i)}$ である。

さて, 近似空間 V_h が $H^1(\Omega_i)$ の部分空間であって, $V_{h/2}$ に含まれおり, 近似解 u_h が V_h に属している:

$$u_h \in V_h \subset V_{h/2} \subset H^1(\Omega_i)$$

場合には, u_h を $V_{h/2}$ の基底で書き直すことにより, $\tilde{e}(h)$ の計算を $V_{h/2}$ に対応する剛性行列と質量行列を用いる積和計算に帰着することができる ([4] 参照).

ところで, 我々の離散化問題 $(\hat{\Pi}^M)$ においては, $\hat{V}_h \not\subset H^1(\Omega_i)$ であり, $\hat{V}_h \not\subset \hat{V}_{h/2}$ である. そこで, $\hat{v}_h \not\subset \hat{V}_h$ を標準的な方法を定めて, $\hat{V}_{h/2}$ の元 $(\hat{v}_h)_{h/2}$ に対応させることにして,

$$\|(\hat{u}_h)_{h/2} - \hat{u}_{h/2}\|_{L^2(\Omega_i^{1/h})}, \|(\hat{u}_h)_{h/2} - \hat{u}_{h/2}\|_{H^1(\Omega_i^{1/h})}, \|\nabla((\hat{u}_h)_{h/2} - \hat{u}_{h/2})\|_{L^2(\Omega_i^{1/h})}$$

の計算を試みた. 簡単のために順に L^2 誤差, H^1 誤差, エネルギー誤差と呼ぶ.

さて, $(\hat{u}_h)_{h/2}$ の定め方を我々の問題 $(\hat{\Pi}^M)$ に即して説明する. この場合の $\hat{u}_h$ を u^M と書くことにしてきた. $(\hat{u}_h)_{h/2}$ を $\tilde{u}^M$ と書き, ここだけの記法であるが,

$$\begin{aligned}\tilde{e}_L(M) &= \|\tilde{u}^M - u^{2M}\|_{L^2(\Omega_i^{2M})}, \\ \tilde{e}_H(M) &= \|\tilde{u}^M - u^{2M}\|_{H^1(\Omega_i^{2M})}, \\ \tilde{e}_E(M) &= \|\nabla(\tilde{u}^M - u^{2M})\|_{L^2(\Omega_i^{2M})}\end{aligned}$$

とする. 5節の方法で得た領域 Ω_i^M の三角形分割によって得られる三角形の全体を $\mathcal{J}_M$ とする. 三角形分割 $\mathcal{J}_M$ に属す三角形のそれぞれに対して, 各辺の中点を新たに節点とする4つの合同な三角形を作る. これらの小三角形の全体を $\mathcal{J}_{2M}^0$ とする. この分割 $\mathcal{J}_{2M}^0$ の三角形を, 2種類に分類する.

(0) Γ_a^M 上にある頂点を一つも持たないか, あるいは Γ_a^M 上にある頂点は, 節点 b_j の何れか一つである.

(1) 上の(0)以外の場合.

ここで, b_j は5節の(5)式で表されるものである. 上の(0)のものの全体を $\mathcal{J}_{2M}^{00}$,

(1)のものの全体を $\mathcal{J}_{2M}^{01}$ とする.

さて, $\mathcal{J}_M$ の三角形で境界 Γ_a^M 上に節点をもつ三角形を $\Delta b_j^M b_{j+1}^M c$ と表す. ここで, 5節の b_j を b_j^M と書き, j は $2M$ をとして考える. 点 c は, ある $\gamma \in (0, a)$ と $\theta \in (-\pi, \pi)$ を用いて,

$$c = (\gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta)$$

と表されるものである. 線分 $\overline{b_j^M c}, \overline{b_{j+1}^M c}, \overline{b_j^M b_{j+1}^M}$ の中点を, それぞれ $c_j, c_{j+1}, b_j^{0,2M}$ と書くことにする (図 9.3 参照). 族 $\mathcal{J}_{2M}^{01}$ に属す三角形は $\Delta b_j^M b_j^{0,2M} c_j$ と $\Delta c_j b_j^{0,2M} c_{j+1}$ と $\Delta c_{j+1} b_j^{0,2M} b_{j+1}^M$ である. また, $\mathcal{J}_{2M}^{01}$ に属す三角形は, 適当な j と c に対して, このよう to 書けるものに限られることも明らかである. ここで $b_j^M = b_{2j}^{2M}, b_{j+1}^M = b_{2(j+1)}^{2M}$ である. ここで, Γ_a^M 上の点 $b_j^{0,2M}$ を Γ_{2M}^{2M} 上の節点 b_{2j+1}^{2M} に対応させる. 上述の三つの小三角形に対応させて, $\Delta b_{2j}^{2M} b_{2j+1}^{2M} c_j, \Delta c_j b_{2j+1}^{2M} c_{j+1}, \Delta c_{j+1} b_{2(j+1)}^{2M} c_j$ を考える. 添字 j を 1 から M まで動かして, これらの三角形の全体を考え, それを $\mathcal{J}_{2M}^1$ と書く. そこで,

$$\mathcal{J}_{2M} = \mathcal{J}_{2M}^{00} \cup \mathcal{J}_{2M}^1$$

とおく. このようにして得られる三角形分割 $\mathcal{J}_{2M}$ を, 我々は $\hat{V}_{1/2M}$ を作る時に用いたのである.

そこで, u^M から $\tilde{u}^M$ を作る際に, 節点 b_{2j+1}^{2M} においては, $\tilde{u}^M(b_{2j+1}^{2M}) = u^M(b_j^{0,2M})$ とした. $\mathcal{J}_{2M}$ が定めるその他の節点 b においては, $\tilde{u}^M(b) = u^M(b)$ とする. このようにして, 我々は $\hat{V}_{1/2M}$ の元 $\tilde{u}^M$ を構成した. この方法が標準的な方法とあらかじめ呼んだものである. ここで,

$$\Omega_i^{0,2M} = \cup_{T \in \mathcal{J}_{2M}^{00}} T$$

とおくと,

$$\tilde{u}^M = u^M \text{ in } \Omega_i^{0,2M}$$

である.

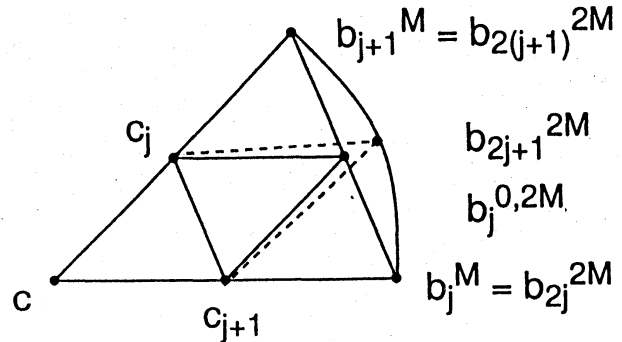


図 9.3 境界の近くでの細分

図 9.4 に $\tilde{e}_L(M)$, $\tilde{e}_H(M)$, $\tilde{e}_E(M)$ の計算値を示した. 図中の点は, 測定点 M における測定値 $\tilde{e}(M)$ を $(x, y) = (\log M, \log \tilde{e}(M))$ として打点したものである. 整数 M は, $M = 12, 24, 36, 48$ である. 図中の直線は, 資料点 $(\log M, \log \tilde{e}(M))$ を最小二乗近似する直線 $y = \alpha x + \beta$ のグラフである. 我々の計算によれば, L^2 誤差に対して $\alpha = 1.364$, H^1 誤差に対して $\alpha = 0.838$, エネルギー誤差に対して $\alpha = 0.652$ であった. また, $M = 36, 48$ の 2 点を通る直線の傾きは L^2 誤差に対して $\alpha = 1.369$, H^1 誤差に対して $\alpha = 0.750$, エネルギー誤差に対して $\alpha = 0.659$ であった.

表 9.3 に $\tilde{e}(M)$ の値を示した. これらの図と表から, 測定した範囲で収束率は定常的なものを観測したと思われる.

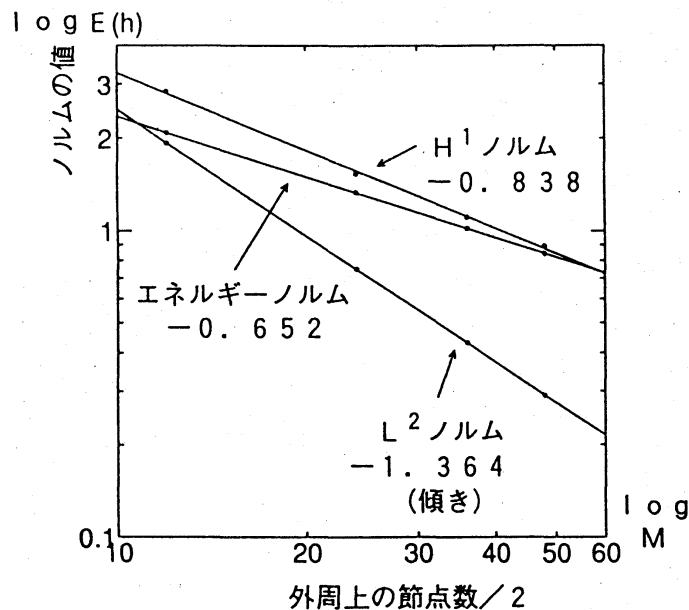


図 9.4 近似解の誤差

表 9.3 近似解の誤差の値

NORM \ $\tilde{e}(M)$	M = 12	M = 24	M = 36	M = 48
L^2	1.927879896	0.751077249	0.431101573	0.290764464
H^1	2.837676946	1.526379746	1.106040345	0.891483341
Energy	2.082231869	1.328803257	1.018565991	0.842732802

10. 今後の課題

本報告にはいくつかの飛躍があることは明かである。しかし、敢えてそれらの飛躍を無視して想像をたくましくすると、われわれの数値計算に用いた例題においては、

$$u \in H^{1+s}(\Omega_i), s = 0.66 \dots$$

のような予想がたてられる。このような予想を得たことが、本研究の成果の一つであり、又この予想の当否を明らかにすることが今後の課題である。

計算例の場合の障害物の形から、 u の属するソボレフ空間の上界は角のある領域におけるポテンシャル問題の解の正則性の議論から決定できることであろうと思われるが、著者達の力量はまだそこに及んでいない。

このような議論に数値的な立場から接近するためには、問題 (Π_h^M) そのものの数値計算が必要であると思う。円弧部分の境界近似に対する若干の技術的課題を克服して数値計算を実施し、 $\tilde{e}(h) = \|u_h - u_{h/2}\|$ の挙動を正確に数値的に測定することも一つの課題である。

問題 $(\hat{\Pi}^M)$ の誤差評価を直接に得ることは実用上望ましいと考える。 (Π_h^M) の解を仲立ちにしての評価を考えたいが、未だ詳細には立ち入れないでいる。

文献 [3] にある、外部領域を境界要素法によって離散化する方法などの他の結合解法との得失の比較も、特にその数値計算の実際において、行いたい課題の一つである。他の結合解法として、代用電荷法なども興味をひかれるところである。

本研究は、帰着波動方程式の結合解法を遠くに見て実施していることを付記する。

11. 謝辞

電気通信大学の加古 孝教授には、本研究の全体に亘って討論と助言をいただいている。また、6節の λ_{ij} の簡潔な表示式は、我々の研究室の博士後期課程大学院生の名古屋靖一郎氏によるものである。同氏からも種々有益な助言をいただいた。これらの方々に深く感謝する次第である。

参考文献

- [1] 網代敦, 外部領域におけるポアソン方程式の数値計算, 電気通信大学大学院情報工学専攻修士論文, (1992).
- [2] Hsiao, G. C., The coupling of boundary element and finite element methods, Z. Angew. Math. Mech. **70**, 493–503 (1990).
- [3] Johnson, C., and Nedelec, J. C., On the coupling of boundary integral and finite element methods, Math. Comp., **35**, 1063–1079 (1980).

- [4] 倉田信一郎, 牛島照夫, 三次元ポテンシャル問題における有限要素数値解の誤差の挙動, 1989 年度応用数学合同シンポジウム研究報告集, 41-45 (1989).
- [5] Lions, J. L., and Magenes, E., Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications I, Springer, Berlin (1972).
- [6] Nečas, J., Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques, Masson et C^{ie}, Paris & Academia, Prague (1967).
- [7] Petrovsky, I. G ., Lecture on Partial Differential Equations, Russian original, National Publisher of Technical Theoretical Literatures, Moscow, 1953, Japanese translation, Tokyo-Tosyo, Tokyo, 1958.
- [8] 牛島照夫, スチェックロフ固有値問題と結合解法, 数理解析研究所講究録 744 「自由境界問題の数値解析とその周辺 (II) 」, 207-221 (1991).
- [9] Zlamal, M., Curved elements in the finite element method. I, SIAM J. Numer. Anal., 10, No.1, 229-240 (1973).