

周期的 exp-格子に対する Kac-Moerbeke の解法

千葉大 理物理 戸田盛和

§1. exp-格子

exp-格子の運動方程式は

$$\frac{d^2 Q_n}{dt^2} = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad (1)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= a_k (b_k - b_{k-1}) \\ \dot{b}_k &= 2(a_k^2 - a_{k+1}^2) \end{aligned} \quad (1')$$

ただし

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} e^{-(Q_k - Q_{k-1})/2} \\ b_k &= -\frac{1}{2} \dot{P}_k \end{aligned} \quad (1'')$$

と書ける。

最近, 周期条件

$$a_{k+n} = a_k, \quad b_{k+n} = b_k \quad (2)$$

のもとに, この運動方程式を解く方法が, Kac と Moerbeke

によつて提出されてゐる。そのあらましを述べたい。叙述の順序や記号などは Kac のとおなじくしても用ゐない。

§2 Floquet の定理の拡張

Hill の常微分方程式に対する Floquet の定理を, exp 格子の定差方程式に拡張する。そのための周期的な係数 a_k , b_k に対する定差方程式

$$a_k y(k) + a_{k+1} y(k+2) + b_k y(k+1) = \lambda y(k+1) \quad (3)$$

$$a_{k+n} = a_k, \quad b_{k+n} = b_k, \quad \lambda = \text{任意}$$

$$-\infty < k < \infty$$

を考へ, $k=0, 1$ における境界条件

$$y^{(1)}(0) = 1, \quad y^{(1)}(1) = 0 \quad (4)$$

をみたす解 $y^{(1)}(k)$ と,

$$y^{(2)}(0) = 0, \quad y^{(2)}(1) = 1 \quad (4')$$

をみたす解 $y^{(2)}(k)$ とを基本解とする。この条件で $k=0$ から逐次解くことにより, 次式が示される。

$$y^{(1)}(n+1) = -\frac{\lambda^{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} + O(\lambda^{n-2}) \quad (5)$$

$$y^{(2)}(n+1) = \frac{\lambda^n}{a_1 a_2 \cdots a_n} + O(\lambda^{n-1}) \quad (5')$$

また $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ に対する (3) 式を連立させて λ を消去し

$$a_k \{ Y^{(1)}(k) Y^{(2)}(k+1) - Y^{(1)}(k+1) Y^{(2)}(k) \} \\ = a_{k+1} \{ Y^{(1)}(k+1) Y^{(2)}(k+2) - Y^{(1)}(k+2) Y^{(2)}(k+1) \} \quad (6)$$

を得る。これは Wronskian に相当する式である。(4) を用

い、周期が n ($a_n = a_0$) であることを用いれば (6) より

$$Y^{(1)}(n) Y^{(2)}(n+1) - Y^{(1)}(n+1) Y^{(2)}(n) = 1 \quad (7)$$

を得る。

一方、基本解に展開して

$$Y^{(1)}(k+n) = a_{11} Y^{(1)}(k) + a_{12} Y^{(2)}(k) \\ Y^{(2)}(k+n) = a_{21} Y^{(1)}(k) + a_{22} Y^{(2)}(k) \quad (8)$$

と書くと、 $k=0, 1$ とおいて係数は

$$a_{11} = Y^{(1)}(n) \quad a_{12} = Y^{(1)}(n+1) \\ a_{21} = Y^{(2)}(n) \quad a_{22} = Y^{(2)}(n+1) \quad (8')$$

したがって (7) を書き直せば

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1 \quad (9)$$

さて、擬同期解を

$$Y(k+n) = \alpha Y(k) \quad (10)$$

とする。この解を基本解により

$$Y(k) = c_1 Y^{(1)}(k) + Y^{(2)}(k) \quad (11)$$

と書き、(10) の左辺を (11) と (8) とを用いて書き直せば

$$\det (a_{ij} - \alpha \delta_{ij}) = 0$$

したがって (9) により α は

$$\alpha^2 - \Delta(\lambda)\alpha + 1 = 0 \quad (12)$$

の根であることがわかる。ここにパラメータ λ を陽に書くと

$$\Delta(\lambda) = a_{11} + a_{22} = Y^{(1)}(n, \lambda) + Y^{(2)}(n+1, \lambda) \quad (13)$$

周期解 $\alpha=1$ を与えた固有値 λ_j は (安定解不安定解の境)

$$\Delta(\lambda_j) = 2 \quad (14)$$

で与えられる。(15) と (13) とを用いれば (14) により

$$\Delta(\lambda) = 2 + 2^n \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j) \quad (15)$$

と書けることがわかる。ここで $a_1, a_2, \dots, a_n = 1/2^n$ ((15)参照)を用いる。

a_k, b_k が運動方程式 (1) にしたがって時間発展をするとき、固有値 λ_j は時間によらぬ。これはよく知られたことである。

§3. $n-1$ 個の粒子系 M_S

周期 n の場合、粒子数は n で、変位、運動量とあわせて自由度は $2n$ であるが、全系の一樣な移動 (回転) は問題外であるから相対変位が $n-1$ 、運動量が n 個あって自由度は $2n-1$ 個である。固有値 λ_j は n 個あり、運動の定数である。したがって、何れ $n-1$ 個のものから時間の関数として与えられる問題は解けることになる。ここに λ_j は

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_n & a_1 & & 0 & a_n \\ a_1 & b_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

の固有値であることを示す。そこで、 n 行、 n 列の

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & & 0 \\ a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

の固有値を μ_s ($s=1, 2, \dots, n-1$) (17')

とする。 μ_s は $\mathcal{L}'$ の固有値である。 $\mathcal{L}'$ の固有値は

$$\phi(k, \mu_s) = -\frac{a_1}{a_n} \gamma''(k+1, \mu_s) \quad (18)$$

$$(k=1, 2, \dots, n-1)$$

であること示す。 したがって、 $\phi(1, \mu_s) = 1$

になるようにとる。 また、 μ_s は境界条件

$$\phi(0, \mu_s) = \phi(n, \mu_s) = 0$$

あるいは $\gamma''(1, \mu_s) = \gamma''(n+1, \mu_s) = 0$ (19)

を方程式 (3) に付けるときの固有値である。

(19) と (7) と (13) とから

$$\Delta(\mu_s) = \gamma''(n, \mu_s) + \frac{1}{\gamma''(n, \mu_s)} \quad (20)$$

$$|\Delta(\mu_s)| \geq 2 \quad (21)$$

であり、 μ_s は (3) の解の不安定領域にある。

また (21) から $\gamma''(n, \mu_s) = \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}}{2}$ (22)
 (複素数の選び方不明)

さて,

$$\dot{\gamma}(k) = \frac{d}{d\lambda} \gamma(k, \lambda) \quad (23)$$

と書くと

$$a_k \gamma''(k) + a_{k+1} \gamma''(k+2) = (\lambda - b_k) \gamma''(k+1)$$

$$a_k \dot{\gamma}''(k) + a_{k+1} \dot{\gamma}''(k+2) = \gamma''(k+1) + (\lambda - b_k) \dot{\gamma}''(k+1)$$

これを用いて

$$\begin{aligned} [\gamma''(k+1)]^2 &= a_k \{ \dot{\gamma}''(k) \gamma''(k+1) - \gamma''(k) \dot{\gamma}''(k+1) \} \\ &\quad - a_{k+1} \{ \dot{\gamma}''(k+1) \gamma''(k+2) - \gamma''(k+1) \dot{\gamma}''(k+2) \} \end{aligned}$$

これを加えて (19) を用いると

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\gamma''(k+1, \mu_s)]^2 = a_n \gamma''(n, \mu_s) \dot{\gamma}''(n+1, \mu_s) \quad (24)$$

一方 (5) を使えば

$$\gamma''(n+1, \lambda) = - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \mu_s) \quad (25)$$

したがって

$$P(\lambda) = \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \mu_s) \quad (26)$$

$$P'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) \quad (26')$$

とあると

$$\sum_{k=1}^{n-1} [Y''(k+1, \mu_s)]^2 = - \frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} P'(\mu_s) \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}}{2}$$

これを再び (18) を規格化したとき、 $a_1 a_2 \dots a_n = 1/2^n$ となるから

$$l^2(\mu_s) = -2^n a_1^2 P'(\mu_s) \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}}{2} \quad (27)$$

と表わす

$$\psi_s(k) = \frac{\phi(k, \mu_s)}{l(\mu_s)} \quad (28)$$

は規格直交系を作す。すなわち

$$\sum_{k=1}^{n-1} \psi_s(k) \psi_{s'}(k) = \delta_{s,s'} \quad (29)$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} \psi_s(k) \psi_s(k') = \delta_{k,k'} \quad (29')$$

$$k=k'=1 \text{ とおくと } \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{l^2(\mu_s)} = 1 \quad (30)$$

よって (27) により

$$a_1^2 = -2^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\delta(\mu_s)}{P'(\mu_s)} \quad (31)$$

ここに

$$\delta(\mu_s) = \frac{1}{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}} = \frac{\Delta(\mu_s) \mp \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}}{2} \quad (32)$$

μ_s の範囲を動かして、(31) は a_1^2 を与える。他

9 a_k は (17) の固有値の数 ψ であるから

$$a_k = \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s \psi_s(k-1) \psi_s(k) \quad (k=2, \dots, n-1) \quad (33)$$

で与えられる。 a_n は $a_1, a_2, \dots, a_n = 1/2^n$ に与えられる。

同様にして

$$b_k = \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s \psi_s^2(k) \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (34)$$

$$b_n \text{ は trace の値} \quad \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (35)$$

を用いて与えられる。

§4. μ_s の時間変化

$\mathcal{L}'$ をさらに 1 行 1 列縮めたマトリクス

$$\mathcal{L}'' = \begin{pmatrix} b_1 a_2 & & & \\ a_2 b_2 & & & 0 \\ & \ddots & & a_{n-2} \\ 0 & a_{n-2} b_{n-2} & & \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}'' = \begin{pmatrix} b_2 a_3 & & & \\ a_3 b_3 & & & \\ & \ddots & & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} b_{n-1} & \end{pmatrix} \quad (37)$$

を用いると

$$\frac{d}{dt} \det(\mathcal{L}' - \lambda 1) = 2 \{ a_n^2 \det(\mathcal{L}'' - \lambda 1) - a_1^2 \det(\tilde{\mathcal{L}}'' - \lambda 1) \} \quad (38)$$

および

$$a_1^2 a_n^2 \det(\mathcal{L}'' - \mu_s 1) \det(\tilde{\mathcal{L}}'' - \mu_s 1) = 1/2^{2n} \quad (39)$$

を示すことができる (証明略)。 $n=3, 4$ のときは容易に確かめられる。

$$\text{すなわち} \quad \Delta^2(\mu_s) - 4 = 2^{2n} \{a_1^2 \det(\mathcal{L}'' - \mu_s 1) - a_n^2 \det(\tilde{\mathcal{L}}'' - \mu_s 1)\}^2 \quad (40)$$

を、以下に用いる。 (38) を用いると

$$\Delta^2(\mu_s) - 4 = 2^{2n-2} \left(\frac{d}{dt} \det(\mathcal{L}' - \lambda 1) \right)^2 \Big|_{\lambda=\mu_s} \quad (41)$$

一方 $\mathcal{L}'$ の固有値 μ_s には $\lambda = \mu_s$ を用いる (26) 参照)

$$\det(\mathcal{L}' - \lambda 1) = (-1)^{n-1} P(\lambda) \quad (42)$$

(28) より

$$\frac{d}{dt} \det(\mathcal{L}' - \lambda 1) \Big|_{\lambda=\mu_s} = (-1)^{n-1} P'(\mu_s) \frac{d\mu_s}{dt} \quad (43)$$

$$\text{故に} \quad \left(P'(\mu_s) \frac{d\mu_s}{dt} \right)^2 = 2^{-2n+2} (\Delta^2(\mu_s) - 4) \quad (44)$$

† (44) の左辺を整理する

$$\sum_{s=1}^{n-1} \frac{\mu_s^r}{P'(\mu_s)} = 0 \quad (r=0, 1, 2, \dots, n-3)$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} \frac{\mu_s^{n-2}}{P'(\mu_s)} = 1 \quad (45)$$

を用いると $d\mu_s/dt$ と μ_s の関係は Abel の積分形式で

$$\sum_{s=1}^{n-1} \mu_s^r \frac{d\mu_s/dt}{\pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}} = 0$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} \mu_s^{n-2} \frac{d\mu_s/dt}{\pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}} = 2^{-n+1} \quad (46)$$

(± 記号は $(d\mu_s/dt)/\pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s) - 4}$ が $P'(\mu_s)$ と同符号に存在するから)

と書いた。この積分を μ_3 につけて解くのは Jacobi の逆問題と(2)を知らなければ、これは解42の逆問題であるから、周期条件のもとでの exp-格子の一般解(初期値問題)は解47 $\mu_3 = 2$ になる。

文献

M. Kac and P. van Moerbeke

On an explicitly soluble system of non-linear differential equations related to certain Toda lattices

Advances in Math. 16 (1975) 160

On some periodic Toda lattices

Proc. Natl. Ac. Sci. U.S.A. 72 (1975) 1627

A solution of the periodic Toda problem

(preprint.)

M. Kac: The three body Toda problem (private communication to J. Ford)

H. Flaschka and D.W. McLaughlin: Canonically Conjugate

Variables for the Korteweg-de Vries Equation and the Toda

Lattice with Periodic Boundary Conditions (preprint) = 41に

Kacの方法をやや別の角度から述べている。ソ聯における

数学的仕事文献もある。