

ボーズ気体中の非線型相互作用

西山 敏 之 (阪大教養)

(2月16日受理)

§ 1 まえおき

2体力相互作用をもつボーズ気体の長波長側のスペクトラムがフォノン型となることが、Bogolyubov はじめ多くの方法により結論されている¹⁾。その一つにいわゆる無秩序位相近似 (random phase approximation) があるが、波長が短くなるにつれて、無視された非線型項の寄与が大きくなる。液体ヘリウムの密度で、測定される音速が得られるような2体力について考えてみると、高次の非線型項の寄与は、零音波の速度 C 、スペクトラムの波数 q 、粒子質量 M として $\hbar q/MC$ 程度の大きさである。したがって $MC/\hbar$ より小さい波数の領域では高次の非線型項を無視し、3次の項を摂動として取扱つてよいことが期待される。しかし長波長側のスペクトラムを求めようとすれば中間状態として多くの短波長側 ($q > (MC/\hbar)$) の励起が現われそのうちには無限大となるものが含まれてくる。しかし波数の大きい励起を一粒子状態に限れば、摂動エネルギーは有限となる。ここでは波数 q について i) $q < q_D$ のフォノン領域 ii) $q_D < q < p_0 \equiv MC/\hbar$ のロトン領域 A iii) $q > p_0$ のロトン領域 B に分類し、主に ii), iii) の領域での一粒子状態に対する3次の非線型項の影響を考える。とくに p_0 が極めて大きい非圧縮性ボーズ気体では、非線型項の影響は ii) の領域で正確に Feynman-Cohen²⁾³⁾ 逆流効果 (back-flow effect) と一致し、2粒子間には長距離伝達の双極子-双極子型の引力が働らくことが示される。

§ 2 非線型相互作用

ここで問題とするボーズ粒子系のハミルトニアンは非線型相互作用 $H_{3a}^{(1)}$ として

西山敏之

$$H = \frac{1}{2M} \sum_{p > q_D} p^2 N_p + \sum_{q < q_D} \omega_q n_q + H_{3a}^{(1)}, \quad (\hbar=1) \quad (1)$$

で与えられる (Appendix) M は個別粒子 (ロトン) の質量、 $N_p = A_p^+ A_p$ は粒子数を表わし、 ω_q はフォノン振動数、 $n_q = b_q^+ b_q$ はフォノン粒子数である。ほとんどすべての個別粒子は $p=0$ の単一粒子状態にあり最低エネルギー状態では $N_0=N$ (全粒子数) と考える。 ω_q としては相互作用のフーリエ係数を V_q として、無秩序近似の式

$$\omega_q = |q| \sqrt{\frac{q^2}{4M^2} + \frac{NV_q}{M}} \quad (2)$$

を用いる。ここでは V_q の短波長側の成分を無視し $V_q=0$, $q > q_D$ とおいたがこれらは個別粒子系の摂動としてとり入れることもできる。この立場は剛体球を主な目標とする取扱とい逆の出発点に立つものである。 $H_{3a}^{(1)}$ は非線型相互作用のうち1個のフォノンを放出、吸収して1個の個別粒子が散乱する過程に相当するもので、このほかに、2個のフォノンを放出、吸収する部分 $H_{3b}^{(2)}$ と2個の個別粒子を放出、吸収する部分 $H_{3c}^{(2)}$ および3個のフォノン散乱を含む $H_{3d}^{(3)}$ がある。 $H_{3b}^{(2)}$ は $q > q_D$ のうち q_D に近い波数領域のスペクトラムを決める上に重要である。 $H_{3d}^{(3)}$ は $q < q_D$ のフォノン同士の散乱でフォノンスペクトラムをわずかに変えるだけであるが、非可逆過程には重要である。 $H_{3c}^{(2)}$ には波数の大きい2個の個別粒子の状態が関係し、この状態についてはスペクトラム自身が明らかでないので今の所取扱うことは困難である。

さて $H_{3a}^{(1)}$ は逆流効果を与えるもので、不純物のフォノン散乱とよく似た性質をもっている部分である。ほとんどすべての個別粒子は運動量 $p=0$ の1粒子状態にあると考えるからいわゆるボゴリウボフ近似が使えて、粒子密度のフーリエ係数は

$$\rho_p = \sqrt{N} (A_{-p}^+ + A_p) \quad (3)$$

その正準共役量で速度ポテンシャルに相当するもの ϕ_p は (Appendix 参照)

$$\phi_p = \frac{i}{2\sqrt{N}} (A_p^+ - A_{-p}) \quad (4)$$

で表わすことができる。 ϕ_p と流量演算子 $j_p = (1/M) \sum_K k A_{k-(p/2)}^+ A_{k+(p/2)}$ との関係は $\phi_p = (iM/Mp^2) p \cdot j_{-p}$ である。これらを用いて

$$\begin{aligned} H_{3a}^{(1)} = & \frac{1}{2M} \sum_{\substack{p \neq q \\ p > q_D \\ |p-q| > q_D}} \sum_{q < q_D} \{ 2(p \cdot q) \rho_{p-q} \phi_p \rho_{-q} + \\ & + (p^2 - p \cdot q) \phi_p \phi_{p-q} Q_q + \frac{1}{4N^2} (p \cdot q - p^2) \rho_{-p-q} \rho_p Q_q \} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで Q_q, P_q はフォノン座標でそれぞれ ρ_q, ϕ_q に相当し

$$Q_q = |q| \sqrt{\frac{N}{2M\omega_q}} (b_{-q}^+ + b_q), \quad P_q = i|q|^{-1} \sqrt{\frac{M\omega_q}{2N}} (b_q^+ - b_{-q}) \quad (6)$$

となる。 A_p^+, A_p, b_q^+, b_q を用いて書き直すと

$$H_{3a}^{(1)} = \sum'_{\substack{p > q_D \\ |p-q| > q_D}} \sum'_{q < q_D} \Gamma_{p,q} A_{p-q}^+ A_p b_q^+ + \text{h.c.} \quad (7)$$

を得る。バーテックス関数 $\Gamma_{p,q}$ は

$$\Gamma_{p,q} = (8M^2 N p_c q)^{-\frac{1}{2}} \{ 2p_c p \cdot q - (p_c q + \frac{1}{2} q^2) q \} \quad (8)$$

で与えられ(7)を図示すればつぎのようになる：



以下 p, q に関する総和は(7)の意味にとる。

西山敏之

§ 3 摂動計算

$H_{3a}^{(1)}$ に対する 1 次の変換関数は

$$U^{(1)}(0, -\infty) = 1 - \sum_p' \sum_q' \Gamma_{p,q} \left(\frac{A_{p-q}^+ A_p b_q^+}{\omega_q - \frac{p \cdot q}{M} + \frac{q^2}{2M} - i\delta} - \frac{A_p^+ A_{p-q} b_q}{\omega_q - \frac{p \cdot q}{M} + \frac{q^2}{2M} + i\delta} \right) \quad (9)$$

で与えられる。 δ は正の微小量である。 $\omega_q = Cq$ とおけば ii) の領域の波数 p を含む項は

$$- \sum_{q_D < p < p_c}'' \sum_q' \frac{p \cdot q}{\sqrt{2p_c} q^3 N} (A_{p-q}^+ A_p b_q^+ - A_p^+ A_{p-q} b_q) \quad (10)$$

となり、一粒子状態 $A_{-p}^+ |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \rho_p |0\rangle$ の変化は (10) より

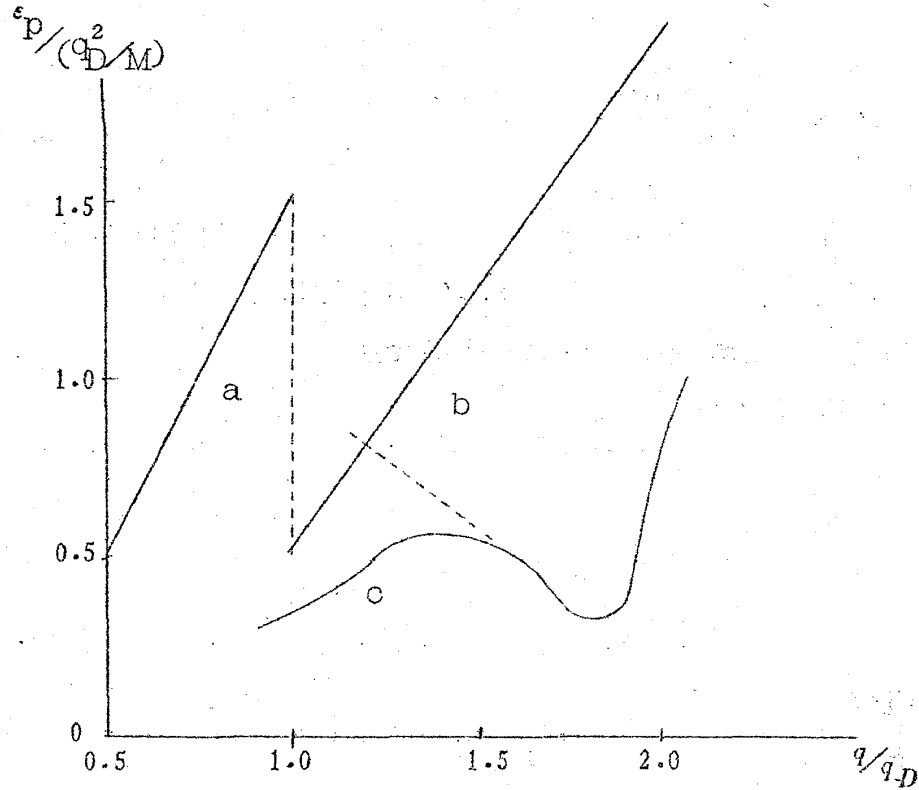
$$- \sum_q' \frac{p \cdot q}{q \sqrt{2p_c} q N} A_{-p+q}^+ b_{-q}^+ |0\rangle = - \sum_q' \frac{p \cdot q}{q^2 \sqrt{N^3}} \rho_{p-q} Q_q |0\rangle \quad (11)$$

となる。ここで p/p_c , q/p について高次の項は無視した。これは、ファインマン・コーエン²⁾ が変分関数として選んだ逆流を表わす項と一致している。(そこにでてくる定数 A を $-1/4\pi N$ とおくことに相当する)³⁾ このとき自己エネルギーは丁度 $-p^2/6M$ となり有効質量 M^* は $1.5M$ である。実際には ii) の領域では p/p_c , q/p は余り小さくはない。また ii) と iii) の境界近くに励起エネルギーの最小値が期待されるのでその附近のエネルギーについては、(9)をそのままの形にしておいて計算しなければならない。摂動エネルギーは(9)の展開に続く 2 次の項、または

$$\Delta E = \frac{1}{2} [H_{3a}^{(1)}, U^{(1)}(0, -\infty)], \quad (12)$$

において、 $N_p = 1$, $n_q = 0$ とおくことにより求められる。積分は初等的に求ま

りその結果を才2図に示した。横軸は q_D を単位にとり、縦軸は q_D^2/M を単位にとつてある。 p_c はヘリウムの音速から $p_c = 1.5 q_D$ においた。 $p = 1.4 q_D$ の近



a : $\epsilon_p = Cp$ c : 計算値
b : $\epsilon_p = p^2 / 2M$

くに極大が、 $p = 1.8 q_D$ の近くに極小値が現れ、 $p = p_c + 0.5 q_D = 2 q_D$ で微係数が ∞ となる。極小値は 0.33 で、 $q_D = 1.08 \text{ \AA}^{-1}$ 、 $M = 6.64 \times 10^{-24} g$ とおくと、 $6.45 \times 10^{-16} \text{ erg} = 4.7^\circ \text{K}$ を得る。 $p = 1.5 q_D$ の近くでは $H_{3b}^{(2)}$ の寄与がかなり大きくなり、エネルギーが増加して極大値は曲線 b をこえることが期待される。極小値は逆流効果によるエネルギーの下限を与えるものと考えらるべきで実際は剛体球ポテンシャルの影響によりもつと大きいであろう (8°K 位)。

§ 4 双極子型相互作用

ここでは運動量の大きい二つの個別粒子間に働く長距離伝達の相互作用につ

西山敏之

いて定性的な話をしておきたい。(12)式の中にはフォノンを媒介とする粒子間の相互作用が含まれている。そこで極限として音速 c が十分大きく、 q_D が十分小さいと考えられるような運動量の領域に話を限ると $U^{(1)}$ として(9)の代りに(10)が用いられるのでただちに

$$H'_{dipol} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \sum_{\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{q})}{MNq^2} A_{\mathbf{p}}^+ A_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} A_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^+ A_{\mathbf{p}'} \quad (13)$$

を得る。 $\langle N_{\mathbf{p}} \rangle = 1$, $\langle N_{\mathbf{p}'} \rangle = 0$; $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$ のときには § 3 の有効質量 $1.5M$ である。この相互作用は引力で、二つの運動量 $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ が平行のとき最小、すなわち強磁性の場合に相当し、長距離伝達の相関秩序が発生することを表わしている。 $H_{3a}^{(1)}$ によりフォノンのエネルギーは変化しない。

文 献

- 1) N. N. Bogolyubov, J. Phys. 11 (1947) 23,
N. N. Bogolyubov and D. N. Zubarev, J. Exptl. Theoret. Phys. 28 (1955) 129,
O. Penrose, Phil. Mag. 45 (1954) 80,
T. Nishiyama, Prog. Theor. Phys. 8 (1952) 655; 12 (1954) 265
- 2) M. Cohen and Feynman, Phys. Rev. 107 (1957) 13.
C. G. Kuper, Proc. Roy. Soc. 233 (1955) 223.
- 3) A. Miller, D. Pines and P. Nozieres, Phys. Rev. 127 (1962) 1452.
- 4) T. Nishiyama, Prog. Theor. Phys. 17 (1957) 711.

Appendix

§ 2 のハミルトニアン(1)は集団記述法によつて求められた。ほとんど粒子密度が一様と考えてよいような状態に対しては、2体力相互作用をもつ系のハミルトニアンは、粒子密度 ρ と、それに正準共役な量 ϕ (速度ポテンシャルは ϕ/M) を用いてつぎのように書かれる。3次の非線型項まで含めると¹⁾

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2M} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \rho_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{p}} \phi_{-\mathbf{q}} + \frac{M}{2N} \left(\frac{q^2}{4M^2} + \frac{N}{M} V_{\mathbf{q}} \right) \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \right. \\ \left. + \frac{1}{8MN^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \rho_{\mathbf{p}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \frac{q^2}{4M} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \right] + \frac{N^2}{2} V_0 - \frac{N}{2} V(0), \quad (\text{A. 1})$$

$$[\rho_{\mathbf{p}}, \rho_{\mathbf{p}'}] = [\phi_{\mathbf{p}}, \phi_{\mathbf{p}'}] = 0, \quad [\rho_{\mathbf{p}}, \phi_{\mathbf{p}'}] = i \cdot \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}, \quad (\mathbf{p} = 1)$$

前論文⁴⁾に従つてある波数 q_D (本文では $\rho_0 = N/\Omega = q_D^3/6\pi^2$) より小さい波数のフーリエ係数を補助変数 $Q_{\mathbf{q}}, P_{\mathbf{q}}$ を用いておきかえる。それには変換として

$$\left. \begin{aligned} U &= \prod_{\mathbf{q} < q_D} \exp(i \rho_{\mathbf{q}} P_{\mathbf{q}}) \prod_{\mathbf{q} < q_D} \exp(-i \phi_{\mathbf{q}} Q_{\mathbf{q}}) \prod_{\mathbf{q} < q_D} \exp(i \rho_{\mathbf{q}} P_{\mathbf{q}}) \\ \rho_{\mathbf{q}} U &= U Q_{\mathbf{q}}, \quad \phi_{\mathbf{q}} U = U \rho_{\mathbf{q}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2})$$

を使えばよい。 $H_{3b}^{(2)}, H_{3c}^{(2)}, H_{3d}^{(3)}$ および $V_{\mathbf{q}} (q > q_D)$ を無視し、波数が q_D より大きいフーリエ係数のみを含む項と $q^2/4M$ を運動エネルギー T として

$$T = \sum''_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2M} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \rho_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{p}} \phi_{-\mathbf{q}} + \frac{M q^2}{8NM} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \right. \\ \left. + \frac{1}{8MN^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \rho_{\mathbf{p}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}} \right] + \frac{1}{4M} \sum_{\mathbf{q} < q_D} q^2$$

でおきかえる。総和 Σ'' は、波数が q_D より小さいフーリエ係数を少くとも一つ含む積を寄せ集めることを意味する。ほとんどすべての個別粒子が零状態にあり、1粒子の散乱を問題にする限りではこれは $(1/2M) \sum_{\mathbf{p} > q_D} \mathbf{p}^2 A_{\mathbf{p}}^+ A_{\mathbf{p}}$ でおきかえることができる。このようにして(1)が求められる。