

Liftings of Frobenius, degeneracies of Hodge - de Rham spectral sequences, and ordinarities

東京大学数理解析科学科 (Yukiyoshi Nakkajima)

§ 初めに.

現在, 1次元 p 進体 Σ 基礎体とする p -adic Hodge 理論が盛んに研究されているが, ここでは長さ有限の Witt 環, いわば, "0.5次元 p 進体" 上の様体の Hodge 理論に関する, 筆者が得た結果を述べたいと思う. 筆者の未熟さや, 時流に乗, といえるとは言い難いが, その点は御容赦願いたい. いくつかの結果を大雑把に箇条書きすると, 次のようになる.

- W_2 ($\mathbb{F}_2$ の Witt 環) 上の proper smooth scheme は, special fiber の Frobenius の lifting Σ endomorphism として持てば, その special fiber は ordinary である.
- W_n ($n \geq 2$) 上の proper smooth scheme は, special fiber の Frobenius の lifting Σ endomorphism として持てば, W_{n+1} 上の flat scheme に持て上げれば, Hodge - de Rham スペクトル系列は任意の次数で $\mathbb{F}_2$ で退化する.
- このような様体にあと少し条件を課すれば, Hodge - Witt

的なモノ (filtration, cohomology) は Hodge 的モノの一致する。

上のような結果を得るに当たって、暖かい興味を抱いてくれた加藤和也先生、いくつかのコメントや有益な疑問点 (とくに ordinarity との関係, canonical lifting の可能性など) を投げかけてくれた諏訪紀幸氏、一々名前を出しませんが、方々で話を聞いてくれたこと、人々にたいへん感謝します。

§ 結果

引用文献は論理的整合性が整った最低限のものとする。以下、ほとんどの場合、結果は適当な log structure をつけても成立するが、logarithmic people は log をどういう風につければよいかは直ちにわかるであろうし、logarithmic people でない人にと、これは log をつけて結果を述べると、周知でない概念のオンパレードとなる。つまり、この稿を読んでいただく気持ちと失わせちゃうであろうから (弱気な態度かもしれないが)、以下、結果は通常のスケームの範囲内で述べる。(log をつけた場合は東京大学プレスプリントシリーズ 93-45, 93-46, 94-22 にあります。)

$\mathbb{R}$ は標数 $p > 0$ の完全体, $W_n (n \geq 2)$ (resp. W) は $\mathbb{R}$ の (resp. ∞) の $\mathbb{R}$ の Witt 環とする。 $X/W_n \in \text{smooth proper scheme}$ とし、 $X_0 \in$

X の special fiber, つまり, $X_0 := X \otimes_{W_n} \mathbb{F}_p$ とする。さらに次の図式
 と可換になる morphism $F: X \rightarrow X$ が与えられるとすることができる。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} W_n & \xrightarrow{\sigma^*} & \mathrm{Spec} W_n \end{array} \quad (\sigma: W_n \rightarrow W_n \text{ は } W_n \text{ の Frobenius})$$

定理を述べなす前に加藤先生 [BK] にある ordinarity の定義の復習

とする。 $Y/\mathbb{F}_p$ は proper smooth scheme としたとき, $H^0(Y, \Omega_{Y/\mathbb{F}_p}^i) = 0$

($\forall i, j \in \mathbb{Z}$) が成立するととき, $Y/\mathbb{F}_p$ は ordinary と言う。これは次のように言い換えられ, crystalline cohomology に慣れ親しんだ人には身近な概念となる。

Prop. 0 ([IR]) Y の crystalline cohomology $H_{\mathrm{crys}}^m(Y/W)$ ($\forall m \in \mathbb{Z}$) が

torsion-free になるとき, $Y/\mathbb{F}_p$ が ordinary であることと, F -crystal

$H_{\mathrm{crys}}^m(Y/W)$ の Newton polygon と Hodge number $(h^{0,m}, h^{1,m-1}, \dots, h^{m,0})$

により決まらされる Hodge polygon が一致することとは同値である。

ここに $h^{i,j} := \dim_{\mathbb{F}_p} H^j(Y, \Omega_{Y/\mathbb{F}_p}^i)$ 。

(F -crystal の Newton polygon と Hodge polygon の定義は例えば [K2] を見

てくだす) したがって, ときに Y が abelian variety になるときは,

上の意味の ordinarity とよく知られた "ordinarity", "p-torsion point が次元分ある" ということとは同値になる。

また, 次の定理が成立する。

Th. 1. (N-Illusie) X/W_n は最初に述べた仮定を満たすとき

— μ としたとき, X_0 は ordinary である。

(注 Illusie さん, この結果を私には独立に得たようである。)

定理の statement に一瞬ドキッとするが, 証明は専門家にはかた

りがいしく, Y が ordinary であることは次と同値であることと

知, それが正しい ([IR])。

a) Hodge de Rham spectral sequence $E_1^{i,j} = H^j(Y, \Omega_Y^i) \Rightarrow H_{dR}^{i+j}(Y/\mathbb{K})$
は E_1 で退化する。

(b) conjugate spectral sequence $E_2^{i,j} = H^i(Y, \mathcal{O}_Y^j(\Omega_Y^i)) \Rightarrow H_{dR}^{i+j}(Y/\mathbb{K})$
は E_2 で退化する。

c) $F_0^{i+1}(H_{dR}^n(Y/\mathbb{K})) \oplus F_0^{n-i}(H_{dR}^n(Y/\mathbb{K})) = H_{dR}^n(Y/\mathbb{K})$ ($\forall i, n$)
ここに F_0 は Hodge filtration, F_0^c は conjugate filtration.

これらの条件を $Y = X_0$ に対し check すればよいが, key となることは

(ある π の π -point とする) quasi-isomorphism

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \Omega_{X_0/\mathbb{K}}^i[-i] \longrightarrow \Omega_{X_0/\mathbb{K}}$$

が成り立つことにある。これから, 直ちに $H_{dR}^n(X_0/\mathbb{K})$ は Hodge

分解を持つことがわかるので, 本格的に a), (b), c) はほぼ明

らかである。

本論とはさう, ともいえるが, Th.1 と Serre - Tate の abelian scheme に関する変形理論 ([M]) を使うことにより, 次を得る。

Cor.2. $X/\mathbb{W}_n$: abelian scheme とする ($n \geq 2$)。 X が $X_0 = X \otimes_{\mathbb{W}_n} \mathbb{K}$

の Frobenius の lifting を持つことと,

$$\left\{ \begin{array}{l} a) X_0: \text{ordinary} \\ b) X \text{ の } p\text{-divisible gp} = (\text{connected part}) \times_{w_n} (\text{etale part}) \end{array} \right.$$

と同値。とくに X_0 が ordinary となれば、 X は X_0 の Frobenius の lifting を持たない。

次の結果を述べたが、その前に以前から知られていたことを述べる。

Th.3 (Fontaine - Messing, Kato, Deligne - Illusie [DI])

Y
 $\downarrow$ smooth proper scheme とし、 Y が W_2 上の flat scheme $\tilde{Y}$ に持ち上げられると仮定。
 Spec k

このとき、Hodge de Rham spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(Y, \Omega^i_{Y/k}) \Rightarrow H_{\text{dR}}^{i+j}(Y/k)$$

は $i+j < p$ に対し E_1 で退化する。

Rem. a) Th.1 の概証で述べたように、 $\tilde{Y}$ が Y の Frobenius の lifting を持てば、次数に制限を付けずにコホモロジー系列は E_1 で退化する。

b) Th.3 において、次数が p を越えると、退化が成立するか、あるいは、反例があるかどうかかわからず、このまま、Illusie さんからの手紙によると、W. Lang 氏が反例となりそうな例を持ち、述べているように、まだ確かでないことがわかっていないようである。

次に、次の結果を述べよう。

Th.4 $X \in \text{Prop.0}$ の前に述べた仮定を満たすスキームとし、 X は W_n 上の flat scheme に持てられる。Hodge-de Rham spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(X, \Omega_{X/W_n}^i) \Rightarrow H_{\text{dR}}^{i+j}(X/W_n)$$

は E_1 で退化する。

Rem. 2) Th.3 とは異なり、結論に次数に関する条件がないことに注意されたい。ただし、 X は special fiber X_0 の Frobenius を持ち上げを持つものとして、proper smooth scheme の中でかなり限られたものとなる。

3) 任意の次数で退化が成立するもので、一瞬、「E...」と思うが、次の結果と見比べると、心理的落着きを得る。

Th.5 (Illusie-Raynaud [IR]).

$Y/\mathbb{F}$: proper smooth & ordinary とする。 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。このとき、slope spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(Y, W_n \Omega_Y^i) \Rightarrow H_{\text{crys}}^{i+j}(Y/W_n)$$

は E_1 で退化する。

Th.4 と Th.5 を比較する前に、Th.4 の証明の極めて大雑把な方針を述べておく。まず、第一段階として、 $\mathcal{O}_X$ -module の自由 derived category の中で、local には " $\frac{\text{Frobenius}^*}{p}$ " とある canonical morphism

$$C_{\text{der}}^{-1} : (\Omega_{X/W_n}, p d) \longrightarrow (\Omega_{X/W_n}, d)$$

えてくること。 C_{den}^{-1} の定義を述べることはかなり大変なので、
 ここでは割愛させていただく。ただ、一点だけ注意をさせて
 いただくと、 C_{den}^{-1} の構成は、Th.3 の Deligne-Illusie [DI] の証明か
 ら着想されたものであるが、彼らの場合 Ω_{X/W_n}^i が S 射をく
 る際、交代作用素 " $\frac{1}{i!} \sum \text{sgn}$ " を施す必要があるので、次数
 に関する条件が結論に出てくるが、我々の場合、ラックする
 ことに要する必要はないので、結論に次数の条件は出てこ
 ない。次の段階として、 $H_{\text{dR}}^i(X/W_n)$ に F -gauge の構造を付すこ
 とができること。これは [K] の議論をそのまま、我々の考え
 ている状況に適用すればよい。[K] によ、 W -itt 環上の filtered
 module と (条件、 Σ) F -gauge のある category は同値であることが
 知られているので、Th.4 を得る。

Th.4 と Th.5 の比較に話を戻す。Th.4 と Th.5 は極めて似ている
 が、片方が他方を含んでいる訳ではない。一般に Ω_{X/W_n}^i と
 $W_n \Omega_{X_0}^i$ との間には canonical な morphism をえなく、たとえ cohomology
 をと、とも、一般には比較のしようがない。我々の考えてい
 る場合、sheaf あるいは complex の level では比較できる (と思われ
 る) が、cohomology をとれば比較できず、次の定理を得る。(証
 明には、もちろん、Th.4 と Th.5 を使う。)

Th.6 X を Th.4 に述べたスキームとする。さらに、

$$H^i(X, \Omega_{X/W_n}^\sigma) \otimes_{W_n} k = H^i(X_0, \Omega_{X_0/k}^\sigma) \quad (V, i, \sigma)$$

なるが (特に, $H^i(X, \Omega_{X/W_n}^j)$ が free W_n -module ならば),

$$\mathrm{Fil}_H(H_{dR}^m(X/W_n)) = \mathrm{Fil}_{H_W}^m(H_{dR}^m(X/W_n)) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

であり, $H^0(X_0, W_n \Omega_{X_0}^1) = H^0(X, \Omega_{X/W_n}^1)$.

ここは, slope filtration により, $H_{\mathrm{crys}}^m(X_0/W_n) = H_{dR}^m(X/W_n)$

と同一視し, Fil_H は Hodge filtration, Fil_{H_W} は slope filtration.

最後に,

講演中に ordinarity は $ah=0$ の状況とよく似ている (何れもは,

Hodge de Rham spectral sequence の退化, " $\mathrm{Fil}_H^{i+1} \oplus \mathrm{Fil}_c^{n-i} = H_{dR}^n(V/K)$ "

(Fil_c は conjugate filtration) など) と言った. その理由は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ ordinarity} \\ + \\ \circ \text{ Hodge symmetry} \\ + \\ \circ \text{ torsion-freeness of} \\ \text{crystalline cohomology} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \text{ canonical lifting}$$

がもしも無い (もしも人, まあ初めに canonical の意味とは, さ

りせないといいたり) と言った (敬語としての希望) が,

Deligne さんから手紙をもらい, 一般にはそうではないだろうと

言っており, Calabi-Yau くらいでも μ_{can} のようにないかと言

っている. (次元 = 3 で). この辺の事情がどうなっているのか,

今の所, 私には全くわかりないうちにあるので, 何かコメントが

ありまし $T=3$, お教へく $T=3$ 110

文 献

- [BK] S. Bloch and K. Kato , p -adic Étale Cohomology , Publ. Math. IHES 63, (1986) pp. 107-152
- [DI] P. Deligne and L. Illusie , Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham , Invent. Math. 89, (1987), pp. 249-270
- [IR] L. Illusie et M. Raynaud , Les suites spectrales associées au complexe de de Rham - Witt , Publ. Math. IHES 57, (1983) pp. 73-212
- [K] K. Kato , On p -adic vanishing cycles (Application of ideas of J. Fontaine and W. Messing) , Advanced Studies in Pure Math. 10, (1987) , pp. 207-251
- [M] W. Messing , The crystals associated to Barsotti-Tate groups , Lec. Notes in Math. 264, Springer Verlag (1972)
- [NO] Y. Nakkajima , Logarithmic de Rham - Witt complexes of Katz-Illusie-Raynaud , UTMS 93-45 (preprint)
- [NI] ——— , On infinitesimal liftings and degeneracies of Hodge-de Rham spectral sequences , UTMS 93-46 (preprint)

[N2] —, Liftings of Frobenius over W_2 and ordinary logarithmic schemes, UTMS 94-22 (preprint).

[Ka] N. Katz, Slope filtrations of F -crystals, Astérisque 63 (1979) pp. 113 - 164