

完全2部グラフの C_k -因子分解

東大・理 榎本 彦衛 (Enomoto Hikoe)

近畿大・理工 潮 和彦 (Ushio Kazuhiko)

向きのないグラフ G の全域部分グラフ H の連結成分がすべて長さが k の閉路 C_k と同型であるとき, H は G の C_k -因子と呼ばれる。 $H_1, H_2, \dots, H_s$ が G の C_k -因子であって,

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^s E(H_i), \quad \bigcap_{i=1}^s E(H_i) = \emptyset$$

が成り立つとき, $\{H_1, \dots, H_s\}$ を G の C_k -因子分解と呼ぶ。

定理1. 完全2部グラフ $K_{m,n}$ が C_k -因子分解できるためには,

- (1) $m = n$
- (2) n は2以上の偶数
- (3) k は4以上の偶数
- (4) k は $2n$ を割り切る

ことが必要である。

[証明] 2部グラフには奇閉路が存在しないので(3)が必要である。 $K_{m,n}$ の C_k -因子 F の連結成分の数を s とすると,

$$2m = ks = 2n$$

となることから(1)と(4)が必要であることがわかる。 C_k -因子における各点の次数は2

なので、 $K_{n,n}$ における次数 n は偶数でなくてはならず、(2)が必要である。(証明終)

以下、定理1の条件(1)～(4)が十分条件かどうかを考えてみることにする。まず、条件(2)～(4)は、

$$(a) \ k \equiv 0 \pmod{4}, \quad k \mid 2n$$

または

$$(b) \ k \equiv 2 \pmod{4}, \quad k \mid n$$

と同値であるということに注意する。(a)が十分条件になっていることは比較的容易に示せる。

補題2. G が H -因子分解可能、 H が K -因子分解可能ならば、 G は K -因子分解可能になる。

[証明]

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^r E(F_i)$$

を G の H -因子分解、 $H_j^{(i)}$ ($1 \leq j \leq s$)を F_i の連結成分、

$$E(H_j^{(i)}) = \bigcup_{k=1}^t E(K_k^{(i,j)})$$

を $H_j^{(i)}$ の K -因子分解とすると、

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{k=1}^t E\left(\bigcup_{j=1}^s K_k^{(i,j)}\right)$$

は G の K -因子分解を与える。(証明終)

補題3. $K_{n,n}$ が C_k -因子分解可能ならば, $K_{mn,mn}$ も C_k -因子分解可能である。

[証明] $K_{m,m}$ は1-因子分解可能なので, $K_{mn,mn}$ は $K_{n,n}$ -因子分解可能である。従って, $K_{n,n}$ が C_k -因子分解可能ならば, 補題2により $K_{mn,mn}$ も C_k -因子分解可能になる。(証明終)

定理4. $k \equiv 0 \pmod{4}$, $k \mid 2n$ ならば, $K_{n,n}$ は C_k -因子分解可能である。

[証明] 補題3より, $K_{2m,2m}$ が C_{4m} -因子分解可能であることを示せばよい。 $K_{2m,2m}$ の部集合が

$$\{ i \mid 1 \leq i \leq 2m \}$$

および

$$\{ \bar{i} \mid 1 \leq i \leq 2m \}$$

のとき,

$$E(F_j) = \{ i \overline{i+2j}, i \overline{i+2j+1} \mid 1 \leq i \leq 2m \} \quad (0 \leq j \leq m-1)$$

とおけばよい。(証明終)

(b)の条件は必ずしも十分条件にはなっていない。

定理5 ([1, Lemma 3.2]). $K_{6,6}$ は $C_{6,6}$ -因子分解できない。

[証明] $K_{6,6}$ の部集合を

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

と

$$X = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

とする。

$$F_1 = \{1\bar{2}3\bar{1}2\bar{3}1, 4\bar{5}6\bar{4}5\bar{6}4\}$$

としてよい。また

$$|E(F_2) \cap \{1\bar{1}, 2\bar{2}, 3\bar{3}\}| = \text{奇数}$$

としてよい。すると

$$F_2 = \{C_1, C_2\},$$

$$|E(C_1) \cap \{1\bar{1}, 2\bar{2}, 3\bar{3}\}| = 1$$

としてよいが、対称性より

$$C_1 = 1\bar{1}4\bar{2}5\bar{5}1$$

としてよい。すると $\{2, 3, 6, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}\}$ 上の閉路 C_2 が

$$|E(C_2) \cap \{1\bar{1}, 2\bar{2}, 3\bar{3}\}| = \text{偶数}$$

を満たすようにはできない。(証明終)

(b)の場合にも $k = n = 6$ を除けば十分条件になっていると予想されている([1, p.307])。それを証明するためには、

(i) m が5以上の奇数ならば、 $K_{2m, 2m}$ は C_{2m} -因子分解可能

(ii) m が2以上ならば、 $K_{6m, 6m}$ は $C_{6, 6}$ -因子分解可能

を示せばよい。

ここでは、(i)を証明することにする。

定理6. m が5以上の奇数ならば, $K_{2m, 2m}$ は C_{2m} -因子分解可能である。

[証明]

$$V = \{ a_i, b_i, x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq m \},$$

$$\tilde{x}_i = x_i \quad (i \neq 4, m) \quad \tilde{y}_i = y_i \quad (i \neq 1, 2)$$

$$\tilde{x}_4 = x_m \quad \tilde{y}_1 = y_2$$

$$\tilde{x}_m = x_4 \quad \tilde{y}_2 = y_1$$

とおく。 $1 \leq j \leq \frac{m-3}{2}$ に対し,

$$E(F_j^{(1)}) = \{ a_i x_{i+2j}, a_i x_{i+2j+1}, b_i \tilde{y}_{i+2j}, b_i \tilde{y}_{i+2j+1} \mid 1 \leq i \leq m \},$$

$$E(F_j^{(2)}) = \{ a_i y_{i+2j}, a_i y_{i+2j+1}, b_i \tilde{x}_{i+2j}, b_i \tilde{x}_{i+2j+1} \mid 1 \leq i \leq m \},$$

とおく。さらに

$$F_1^{(3)} = \{ a_1 y_1 a_2 x_2 a_3 x_3 a_4 x_4 a_5 \cdots x_m a_m x_1 a_1,$$

$$b_1 \tilde{y}_1 (= y_2) b_2 y_3 b_3 \cdots y_{m-1} b_{m-1} \tilde{x}_m (= x_4) b_m y_m b_1 \},$$

$$F_2^{(3)} = \{ a_1 x_2 b_3 x_3 a_2 y_3 b_4 \tilde{x}_4 (= x_m) b_5 x_5 \cdots b_{m-1} x_{m-1} b_m \tilde{y}_1 (= y_2) a_1,$$

$$b_1 \tilde{x}_m (= x_4) a_3 y_4 a_4 \cdots y_{m-1} a_{m-1} y_m a_m y_1 (= \tilde{y}_2) b_2 x_1 b_1 \},$$

$$F_3^{(3)} = \{ a_1 x_m b_3 \tilde{y}_2 b_1 x_2 b_2 x_3 b_4 x_4 a_5 y_5 b_6 x_7 \cdots b_{m-3} x_{m-2} a_{m-1} y_{m-2} b_{m-1} y_m a_1,$$

$$a_2 y_2 a_3 y_3 a_4 x_4 a_5 y_4 b_5 x_5 a_6 y_6 \cdots b_{m-2} x_{m-1} a_m y_{m-1} b_m x_1 a_2 \}$$

とおけばよい。(証明終)

References

- [1] J. D. Horton, B. K. Roy, P. J. Schellenberg and D. R. Stinson: *On decomposing graphs into isomorphic uniform 2-factors*, Annals of Discrete Mathematics **27** (1985) 297-320
- [2] D. Sotteau: *Decomposition of $K_{m,n}$ ($K_{m,n}^*$) into cycles (circuits) of length $2k$* , J. Combinatorial Theory Ser. B **30** (1981) 75-81