

ユークリッド空間における部分多様体のガウス写像

武藤義夫

ここで述べるのは表題に属する諸問題のうちで Gauss image が動かないような部分多様体の変形に関するものである。

§ 1. 部分多様体の変形.

微分可能写像 $\tilde{x}: M \times I \rightarrow R^n$ において M は m 次元 compact orientable C^∞ manifold, I は 0 を含むある開区間とし, I の t 点 t に制限した場合の写像を $\tilde{x}|_t: M \times t \rightarrow R^n$ と書く。次の仮定をおく,

仮定 (i) $\tilde{x}|_t: M \times t \rightarrow R^n$ は各 $t \in I$ において正則な部分多様体である。

(ii) Γ を Gauss map とすると $p \in M, t \in I$ に対して

$$\Gamma(p, t) = \Gamma(p, 0)$$

である。

ここではこの仮定をみたす deformation のみを考えるゆえ deformation とはいえ"そう解釈する。

定義 $\tilde{x}|_t$ を局所的に $x^h = x^h(u^1, \dots, u^m; t)$ で表わす。ここに

$$h, i, j, \dots = 1, \dots, n; \quad \kappa, \lambda, \mu, \dots = 1, \dots, m$$

とし, x^h は R^n の直交座標, u^κ は M の局所座標である。

このとき deformation の条件は

$$\frac{\partial^2 x^h}{\partial t \partial u^\lambda} = a_\lambda{}^\sigma \frac{\partial x^h}{\partial u^\sigma}$$

と書かれるが, $a_\lambda{}^\kappa$ が成分である $(1, 1)$ -tensor を tensor of deformation, $X^h = \partial x^h / \partial t$ を vector of deformation という。 $\tilde{x}|_t$ により R^n から M へ induce された Riemannian metric, Riemannian connection は $g(t)$, $\nabla(t)$ とかく。平行移動および相似変換による deformation は trivial deformation という。

Fundamental formulas [2] いろいろな計算の基礎になる式を記す。

$$B_\lambda^h = \frac{\partial x^h}{\partial u^\lambda},$$

$$g_{\mu\lambda} = B_\mu^h B_\lambda^h, \quad (R^n \text{ における summation convention により } \sum_h \text{ を省略する})$$

$$H_{\mu\lambda}^h = \partial_\mu B_\lambda^h - \{\mu\lambda\}^{\kappa} B_\kappa^h \quad (\partial_\mu = \partial/\partial u^\mu)$$

これらに対して $\partial B_\lambda^h / \partial t = a_\lambda^\sigma B_\sigma^h$ からはいって次の諸式がみちびかれる。

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial t} = a_{\mu\lambda} + a_{\lambda\mu}, \quad (a_{\mu\lambda} = a_\mu^\kappa g_{\kappa\lambda})$$

$$\frac{\partial \{\mu\lambda\}^\kappa}{\partial t} = \nabla_\mu a_\lambda^\kappa = \nabla_\lambda a_\mu^\kappa,$$

$$\frac{\partial H_{\mu\lambda}^h}{\partial t} = a_\mu^\sigma H_{\sigma\lambda}^h = a_\lambda^\sigma H_{\sigma\mu}^h.$$

$\nabla(t)$ の curvature tensor $K_{\nu\mu\lambda}^\kappa$ については

$$\frac{\partial K_{\nu\mu\lambda}^\kappa}{\partial t} = K_{\nu\mu\sigma}^\kappa a_\lambda^\sigma + K_{\nu\mu\lambda}^\sigma a_\kappa^\sigma.$$

定義 $\partial \{\mu\lambda\}^\kappa / \partial t = 0$ をみたす deformation を affine deformation という。 $\nabla_\mu a_\lambda^\kappa = 0$ がその必要十分条件である。

§ 2. Tensor of deformation の性質.

まずすでに述べたように $\nabla_\mu a_\lambda^\kappa = \nabla_\lambda a_\mu^\kappa$ が成り立つ。

定理 1. $\nabla_\lambda a^{\lambda\kappa} = 0$ なら $\nabla_\mu a_\lambda^\lambda = 0$, $a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}$.

証明. 積分式を計算すれば

$$\int_M \nabla_\mu a_\kappa^\mu \nabla_\lambda a^{\kappa\lambda} * 1 = \int_M \nabla_\kappa a_\mu^\mu \nabla_\lambda a^{\kappa\lambda} * 1$$

$$= - \int_M a_\mu^\mu \nabla_\mu \nabla_\lambda a^{\mu\lambda} * 1 = - \int_M a_\mu^\mu \nabla_\lambda \nabla_\mu a^{\mu\lambda} * 1$$

は $\nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$ によって消えるゆえ $\nabla_\lambda a^{\mu\lambda} = 0$, $\nabla_\mu a_{\lambda\lambda} = 0$ となる。この結果を用いてうる等式

$$\nabla_\mu (a^{\mu\lambda} \partial_\lambda X^h) = \nabla_\mu (a^{\lambda\mu} \partial_\lambda X^h)$$

に $\partial_\lambda X^h = \partial^2 x^h / \partial t \partial u^\lambda = a_\lambda^\sigma B_\sigma^h$ を代入すれば

$$\int_M B_\mu^h a^{\mu\lambda} a_\lambda^\sigma B_\sigma^h * 1 = - \int_M x^h \nabla_\mu (a^{\mu\lambda} a_\lambda^\sigma B_\sigma^h) * 1,$$

$$\int_M B_\mu^h a^{\lambda\mu} a_\lambda^\sigma B_\sigma^h * 1 = - \int_M x^h \nabla_\mu (a^{\lambda\mu} a_\lambda^\sigma B_\sigma^h) * 1$$

の右辺が一致することから

$$\int_M a^{\mu\lambda} a_{\lambda\mu} * 1 = \int_M a^{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} * 1,$$

したがって $a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}$ をうる。

§ 3. Affine deformations.

Deformation $\tilde{x} : M \times I \rightarrow R^n$ が affine deformation で M が単連結なら, $(M, g(t))$ はリーマン多様体の積に分解され, $\tilde{x}$ もこれに応じて各成分が trivial deformation になるように分解される [3]。ここでは affine deformation に関係するその他の定理を述べる。

定理 2. Deformation $\tilde{x} : M \times I \rightarrow R^n$ において

$$\nabla_\lambda a^{\lambda\kappa} = 0$$

が成り立ち, しかも curvature tensor, Ricci tensor, tensor of deformation の間に不等式

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} a^{\nu\kappa} a^{\mu\lambda} - K_{\mu\lambda} a^{\mu\rho} a_\rho{}^\lambda \leq 0$$

が成り立てば, $\tilde{x}$ は affine deformation である。

証明.

$$\begin{aligned} \int_M \nabla_\nu a_{\mu\lambda} \nabla^\nu a^{\mu\lambda} * 1 &= \int_M \nabla_\mu a_{\nu\lambda} \nabla^\nu a^{\mu\lambda} * 1 \\ &= - \int_M a_{\nu\lambda} \nabla_\mu \nabla^\nu a^{\mu\lambda} * 1 \\ &= - \int_M a_{\nu\lambda} (K^\nu{}_\sigma a^{\sigma\lambda} + K_\mu{}^\nu{}_\sigma{}^\lambda a^{\mu\sigma}) * 1 \\ &= \int_M (K_{\nu\mu\lambda\kappa} a^{\nu\kappa} a^{\mu\lambda} - K_{\mu\lambda} a^{\mu\rho} a_\rho{}^\lambda) * 1 \leq 0 \end{aligned}$$

したがって $\nabla_\nu a_{\mu\lambda} \nabla^\nu a^{\mu\lambda} = 0$, $\nabla_\mu a_{\lambda\kappa} = 0$ となる。

系 3. Deformation $\tilde{x}$ において $\tilde{x}|_0$ が平坦なリーマン接続をもち deformation の tensor が恒等的に $\nabla_\lambda a^{\lambda\kappa} = 0$ をみたせば, $\tilde{x}$ は affine deformation である。

証明. $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ が $t=0$ で消えれば恒等的に消えるからである。

注意. $g(t)$ が正の定曲率 (その値は t によって変ってよ

い) であるとその定理が適用されるが, 定曲率の $g(t)$ をもつ deformation は $m > 2$ なら trivial であるからよい例とはいえない。

§ 4. $\nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$ をみたす deformation.

$\nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$ をみたすか "affine" ではない deformation が存在するかという問題はまだ解けていない。しかし $\nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$ の幾何学的意味を考えてみる。

まず M 上の Riemannian metric の空間 $\mathcal{M}$ において曲線 $\varphi: I' \rightarrow \mathcal{M}$ を $\varphi(\lambda)$ ($\lambda \in I'$) によって与えるとき, これが $\varphi(0)$ を始点として harmonic であるとは, M の identity map による $(M, \varphi(0)) \rightarrow (M, \varphi(\lambda))$ が各 $\lambda \in I'$ について harmonic map であることと定義する。 $(M, \varphi(\lambda))$ の基本テンソル $\varphi_{\mu\lambda}(\lambda)$ の作る Christoffel's symbol を $\{\chi_{\mu\lambda}\}_\lambda$ とすればその条件式は

$$(\{\chi_{\mu\lambda}\}_\lambda - \{\chi_{\mu\lambda}\}_0) \varphi^{\mu\lambda}(0) = 0$$

であるから, 特に $\lambda = 0$ において

$$\varphi^{\mu\lambda} \frac{\partial \{\chi_{\mu\lambda}\}}{\partial \lambda} = 0$$

が成り立つ。

定理 4. Deformation $\tilde{x}: M \times I \rightarrow R^n$ が $\nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$ を

みたすことは、 $\tilde{x}$ によってひきおこされる m の曲線 $\gamma: I \rightarrow m$ すなわち $\gamma(t) = g(t)$, $t \in I$ が次の性質をもつことと同値である,

各 $t \in I$ に対して $\gamma(t)$ を始点 $\varphi_t(0)$ とする m の harmonic curve で、 $s=0$ では γ と $\gamma(t)$ において接するものが存在する。

証明は $\partial \{a_{\mu\lambda}^{\mu\lambda}\} / \partial t = \nabla_\mu a_\lambda^{\mu\lambda}$, $\nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$ と $\varphi_t(0) = g(t)$ から容易である。

§ 5. 幾何学的解釈 [4].

まず次の定理を述べる。

定理 5. Deformation $\tilde{x}: M \times I \rightarrow R^n$ において次の 2 条件

(i), (ii) は同値である,

$$(i) \quad \nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$$

$$(ii) \quad \nabla_\mu (a^{\mu\lambda} + a^{\lambda\mu}) = 0.$$

証明. (i) $\rightarrow$ (ii) は定理 1 から明らかであるから (ii) を仮定すると

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M \nabla_\nu a_\lambda^\nu \nabla_\mu a^{\lambda\mu} * 1 = - \int_M \nabla_\lambda a_\nu^\nu \nabla_\mu a^{\mu\lambda} * 1 \\ &= \int_M a_\nu^\nu \nabla_\lambda \nabla_\mu a^{\mu\lambda} * 1 = \int_M a_\nu^\nu \nabla_\mu \nabla_\lambda a^{\mu\lambda} * 1 \end{aligned}$$

$$= - \int_M \nabla_\mu a_\nu{}^\nu \nabla_\lambda a^{\mu\lambda} * 1 = - \int_M \nabla_\nu a_\mu{}^\nu \nabla_\lambda a^{\mu\lambda} * 1 \leq 0$$

から $\nabla_\lambda a^{\mu\lambda} = 0$ をうる。よってまた $\nabla_\lambda a^{\lambda\mu} = 0$ となる。

$a_{\mu\lambda} + a_{\lambda\mu} = 2g_{\mu\lambda} / \partial t$ であるから $\nabla_\mu (a^{\mu\lambda} + a^{\lambda\mu}) = 0$ には次のような意味がある。

$\mathcal{D} = \{\eta\}$ を M の diffeomorphism の群とする。Pull back により $\mathcal{D}$ は $\mathcal{M}$ に作用し, $g \in \mathcal{M}, \eta \in \mathcal{D}$ に対して $g \rightarrow \eta^*(g)$ がきまる。 g を $\mathcal{M}$ の固定された 1 点とすると Berger and Ebin [1] により $\mathcal{D}$ の g を含む orbit における g のある近傍 U と map $\chi: U \rightarrow \mathcal{D}$ とで次のごときものが存在する,

$$\eta^*(g) \in U \text{ なら } (\chi(\eta^*(g)))^*(g) = \eta^*(g).$$

また $\mathcal{M}$ の g を含む submanifold S で次のごときものが存在する: $F(u, \lambda) = (\chi(u))^*(\lambda)$, $u \in U, \lambda \in S$ を用いて $F: U \times S \rightarrow \mathcal{M}$ とするとき F は $U \times S$ から $\mathcal{M}$ における g のある近傍への diffeomorphism で, g における S の接空間は δ を局所的には

$$\delta: \Lambda_{\mu\lambda} \rightarrow -\nabla^\mu \Lambda_{\mu\lambda} \quad (\Lambda_{\mu\lambda} = \Lambda_{\lambda\mu})$$

で表わされる写像 $\delta: S^2 \rightarrow T_1$ とするとき δ の kernel である。ただし S^2 は対称な $(0, 2)$ -tensor field の線形空間, T_1 は 1-form の空間とする。これによって考えると, $g(0)$

を上述の g として, $\tilde{x}$ が与える $g(t)$ は S 上にあることになる。こうして次の定理をうる。

定理 6. S を M の Riemannian metric の空間 $\mathcal{M}$ における上述のごとき部分空間で, 1 つの Riemannian metric g をとるものとする。Deformation $\tilde{x}$ において $g(t)$ が $g(0) = g$ であるとき, さらに $g(t)$ が S 上にあるための必要十分条件は $\nabla_{\mu} a^{\mu\lambda} = 0$ である。

文 献

- [1] Berger, M. and D. Ebin, Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold, *J. Differential Geometry* 3 (1969), 379-392.
- [2] Mutō, Y., Deformability of a submanifold in a Euclidean space whose image by the Gauss map is fixed, *Proc. Amer. Math. Soc.* 76 (1979), 140-144.
- [3] Mutō, Y., Deformation of a submanifold in a Euclidean space with fixed Gauss image, to appear in *Geometriae Dedicata*.
- [4] Mutō, Y., 同上, II, to appear in *Geometriae Dedicata*.