

Cut-free systems for some tense logics

鹿島 亮 (Ryo Kashima)

東京工業大学 理学部 情報科学科

はじめに

Gentzen は、古典論理に対して LK と呼ばれる形式的体系を与え、 LK においては cut と呼ばれる推論規則は不要である、という有名な LK の基本定理 (cut-elimination theorem) を証明した。この LK は非常に整然としたきれいな体系であり、しかも cut -free である (cut-elimination theorem が成り立つ) ことから、これは、無矛盾性の証明や決定手続きなど、古典論理についての多くの有益な情報を我々に与えてくれている。

このように、 LK が古典論理に対する非常に良い形式化であるので、非古典論理について研究する際にも、それが LK 風に形式化、特に cut -free に形式化できないかという問題がひとつの研究課題になってくる。本稿ではそうした研究のひとつとして、4つの時制命題論理 Kt , $Kt4$, $Kt4.3$, KtL に対して、 LK を拡張した cut -free な体系を与えた。

ところで、これらの時制論理に対して cut -free な体系を与えようとしても、 LK を普通に拡張する、すなわち、様相記号に関する

新しい推論規則を L K につけ加える，だけではうまくいかない．そこで，L K が sequent を扱っているのに対して，本稿では sequent が tree 状につながったものを扱う体系を与えた．このように拡張された体系は，もとの L K と比べると少々複雑に見えるが，cut-free であることや subformula-property など L K が持っていた特徴的な性質は保存されているので，これらは時制論理に対するかなり良い形式化であると考えられる．

定義 1

formula は次の 1) 2) で定義される．

- 1) 命題変数: $p_0, p_1, \dots$ は formula である．
- 2) a, b が formula ならば， $\wedge a b, \vee a b, \rightarrow a b, \neg a, \Box a, \Diamond a, \oplus a, \ominus a$ はすべて formula である．

$\Box a, \Diamond a, \oplus a, \ominus a$ はそれぞれ，“ a は過去のいつでも真であった”，“ a は未来のいつでも真である”，“ a は過去のある時点で真であった”，“ a は未来のある時点で真である”を表現する論理式である．

以後， a, b, c などは，formula を表わすものとする．また，読みやすさのために， $\wedge a b, \vee a b, \rightarrow a b$ のことをそれぞれ， $a \wedge b, a \vee b, a \rightarrow b$ と書く．括弧も適当に使用する．

定義 2

- 1) 空でない集合 W ， W 上の二項関係 R ，自然数に W の部分集合

を割り当てる関数 P , の3つ組 $[W, R, P]$ を (時制命題論理の Kripke) model という.

2) model $M = [W, R, P]$, W の要素 w , formula a に対して述語 $M, w \models a$ を, 次のように a の構成に関して帰納的に定義する.

命題変数 p_i に対しては, $M, w \models p_i \Leftrightarrow w \in P(i),$

$M, w \models a \wedge b \Leftrightarrow M, w \models a \text{ and } M, w \models b, \quad M, w \models a \vee b \Leftrightarrow$

$M, w \models a \text{ or } M, w \models b, \quad M, w \models a \rightarrow b \Leftrightarrow$

$M, w \not\models a \text{ or } M, w \models b, \quad M, w \models \neg a \Leftrightarrow M, w \not\models a,$

$M, w \models \Box a \Leftrightarrow \forall x \in W \text{ (if } xRw \text{ then } M, x \models a),$

$M, w \models \Box a \Leftrightarrow \forall x \in W \text{ (if } wRx \text{ then } M, x \models a),$

$M, w \models \Diamond a \Leftrightarrow \exists x \in W \text{ (} xRw \text{ and } M, x \models a),$

$M, w \models \Diamond a \Leftrightarrow \exists x \in W \text{ (} wRx \text{ and } M, x \models a).$

(ただし, $M, w \not\models a$ は $\text{not}(M, w \models a)$ のこと.)

3) model $M = [W, R, P]$, formula a が, W の任意の要素 w に対して $M, w \models a$ のとき, $M \models a$ と書く.

model $M = [W, R, P]$ の, W を時点の集合, R を時間の前後関係, $P(i)$ を p_i が真になる時点の集合と見たとき, $M, w \models a$ は “model M の時点 w において a は真である” と解釈できる.

定義 3

1) model $M = [W, R, P]$ に関する条件 tr., co., re., (transitive, connected, reflexive) を次のように定義する.

tr.: $\forall x, y, z \in W \text{ (if } (xRy \text{ and } yRz) \text{ then } xRz).$

co.: $\forall x, y \in W \quad (x=y \text{ or } xRy \text{ or } yRx).$

re.: $\forall x \in W \quad xRx.$

2) 時制命題論理 Kt , $Kt4$, $Kt4.3$, KtL を次のような formula の集合として定義する.

$Kt \triangleq \{a \mid \text{任意の model } M \text{ について } M \models a\}.$

$Kt4 \triangleq \{a \mid \text{tr. を満たす任意の model } M \text{ について } M \models a\}.$

$Kt4.3 \triangleq \{a \mid \text{tr., co. を同時に満たす任意の model } M \text{ について } M \models a\}.$

$KtL \triangleq \{a \mid \text{tr., co., re. を同時に満たす任意の model } M \text{ について } M \models a\}.$

例えば, $p_0 \rightarrow \Box \Diamond p_0 \in Kt$, $\Box p_0 \rightarrow \Box \Box p_0 \in Kt4$,
 $(p_0 \wedge \Box p_0 \wedge \Box \Box p_0) \rightarrow \Box \Box p_0 \in Kt4.3$, $\Box p_0 \rightarrow p_0 \in KtL$ である.
 また, $Kt \subsetneq Kt4 \subsetneq Kt4.3 \subsetneq KtL$ である.

さて, 本稿の目的はこれらの時制論理に対する cut-free な体系をつくることであるが, これらの体系を見やすいものにするために, 記号 “ $\neg$ ” を持たない, 普通とは異なる論理式を扱うことにする.

定義 4

inner-negation-formula (i-n-f と略する) は次の1)2)で定義される.

1) 二種類の命題変数: $p_0, p_1, \dots, n_0, n_1, \dots$ は i-n-f である.

2) a, b が i-n-f ならば, $\wedge a b, \vee a b, \Box a, \Box a,$

④ a, ⑤ a はすべて i-n-f である.

i-n-f の各命題変数 n_i は $\neg p_i$ を表現している.

以後, a, b, c など, formula または i-n-f を表わすものとする. また, 読みやすさのために, $\wedge a b, \vee a b$ のことをそれぞれ, $a \wedge b, a \vee b$ と書く. 括弧も適当に使用する.

定義 5

formula a に対して i-n-f a^* を, 次のように a の長さに関して帰納的に定義する.

$$\begin{aligned} p_i^* &\triangleq p_i, (a \wedge b)^* \triangleq a^* \wedge b^*, (a \vee b)^* \triangleq a^* \vee b^*, \\ (a \rightarrow b)^* &\triangleq (\neg a)^* \vee b^*, (\Box a)^* \triangleq \Box(a^*), (\Box a)^* \triangleq \\ \Box(a^*), (\Diamond a)^* &\triangleq \Diamond(a^*), (\Diamond a)^* \triangleq \Diamond(a^*), (\neg p_i)^* \triangleq n_i, \\ (\neg(a \wedge b))^* &\triangleq (\neg a)^* \vee (\neg b)^*, (\neg(a \vee b))^* \triangleq \\ (\neg a)^* \wedge (\neg b)^*, (\neg(a \rightarrow b))^* &\triangleq a^* \wedge (\neg b)^*, (\neg \neg a)^* \triangleq \\ a^*, (\neg \Box a)^* &\triangleq \Diamond((\neg a)^*), (\neg \Box a)^* \triangleq \Diamond((\neg a)^*), \\ (\neg \Diamond a)^* &\triangleq \Box((\neg a)^*), (\neg \Diamond a)^* \triangleq \Box((\neg a)^*). \end{aligned}$$

定義 6

i-n-f と, 2 種類の開き括弧 “ $P[$ ”, “ $F[$ ” と, 閉じ括弧 “ $]$ ” から成る T-sequent という文字列を, 次の 1)-4) で帰納的に定義する.

1) 空列は T-sequent である.

2) a が i-n-f で Γ が T-sequent ならば, $a \Gamma$ は T-sequent である.

3) Γ と Δ がともに T-sequent ならば, $P[\Gamma] \Delta$ は T-sequent である.

4) Γ と Δ がともに T-sequent ならば, $F[\Gamma] \Delta$ は T-sequent である.

例えば, a, b, c, d, e が i-n-f のとき

$$a \ b \ P[\ c \ F[P[]] \ d \] \ P[\ e \]$$

は T-sequent である. ただし, 読みやすさのためにこれを

$$a, b, P[c, F[P[]], d], P[e]$$

と書くことにする.

以後 Γ や Δ などは T-sequent を表わすものとする.

一般に, Γ と Δ が T-sequent ならば Γ, Δ も T-sequent である.

定義 7

T-sequent X に対してその意味を表わす i-n-f $m(X)$ を次の 1)-4) で帰納的に定義する. ただし, a は i-n-f であり, Γ と Δ は T-sequent である.

$$1) \ m() \triangleq p_0 \wedge n_0.$$

$$2) \ m(a, \Gamma) \triangleq a \vee m(\Gamma).$$

$$3) \ m(P[\Gamma], \Delta) \triangleq \boxed{P} m(\Gamma) \vee m(\Delta).$$

$$4) \ m(F[\Gamma], \Delta) \triangleq \boxed{F} m(\Gamma) \vee m(\Delta).$$

例えば $\Gamma = a, b, P[c, F[P[]], d], P[e]$ のとき,

$$m(\Gamma) = a \vee b \vee \boxed{P}(c \vee \boxed{F}(\boxed{P} \perp \vee \perp) \vee d \vee \perp) \vee \boxed{P}(e \vee \perp) \vee$$

$\perp$ である. (ただし $\perp \triangleq p_0 \wedge n_0$)

定義 8

T-sequent を推論する体系 S-Kt (Sequential system for Kt) を, 次の公理と推論規則によって定義する. ただし, a と b は任意の i-n-f であり, Γ と Δ と Π と Σ は任意の T-sequent である.

公理: p_i, n_i (i は任意の自然数)

推論規則: 以下の (exchange) ~ ($\oplus$).

$$\frac{\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma}{\Gamma, \Pi, \Delta, \Sigma} \text{ (exchange)}$$

$$\frac{\Gamma}{\Delta, \Gamma} \text{ (weakening)}$$

$$\frac{a, a, \Gamma}{a, \Gamma} \text{ (contraction)}$$

$$\frac{P[\Gamma], \Delta}{\Gamma, F[\Delta]} \text{ (turn)}$$

$$\frac{F[\Gamma], \Delta}{\Gamma, P[\Delta]} \text{ (turn)}$$

$$\frac{a, \Gamma \quad b, \Gamma}{a \wedge b, \Gamma} (\wedge)$$

$$\frac{a, \Gamma}{a \vee b, \Gamma} (\vee)$$

$$\frac{a, \Gamma}{b \vee a, \Gamma} (\vee)$$

$$\frac{P[a], \Gamma}{\boxed{P} a, \Gamma} (\boxed{P})$$

$$\frac{F[a], \Gamma}{\boxed{F} a, \Gamma} (\boxed{F})$$

$$\frac{P[a, \Gamma], \Delta}{\oplus a, P[\Gamma], \Delta} (\oplus)$$

$$\frac{F[a, \Gamma], \Delta}{\oplus a, F[\Gamma], \Delta} (\oplus)$$

S-K t の推論図の例:

$\frac{p_0, n_0}{P[], p_0, n_0} (w)$	ただし, (e), (w), (c) は
$\frac{P[], p_0, n_0}{F[p_0, n_0]} (turn)$	それぞれ, (exchange),
$\frac{F[p_0, n_0]}{\textcircled{P} p_0, F[n_0]} (\textcircled{F})$	(weakening), (contraction)
$\frac{\textcircled{P} p_0, F[n_0]}{F[n_0], \textcircled{P} p_0} (e)$	
$\frac{F[n_0], \textcircled{P} p_0}{n_0, P[\textcircled{P} p_0]} (turn)$	
$\frac{n_0, P[\textcircled{P} p_0]}{P[\textcircled{P} p_0], n_0} (e)$	
$\frac{P[\textcircled{P} p_0], n_0}{\boxed{P} \textcircled{P} p_0, n_0} (\boxed{P})$	
$\frac{\boxed{P} \textcircled{P} p_0, n_0}{n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0, n_0} (\vee)$	
$\frac{n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0, n_0}{n_0, n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0} (e)$	
$\frac{n_0, n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0}{n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0, n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0} (\vee)$	
$\frac{n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0, n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0}{n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0} (c)$	
$n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0$	$(n_0 \vee \boxed{P} \textcircled{P} p_0 = (p_0 \rightarrow \boxed{P} \textcircled{P} p_0)^*)$

定理 (S-K t の完全性定理)

Γ は S-K t で推論できる iff $m(\Gamma) \in K t^*$.

ただし, $K t^* \triangleq \{a^* \mid a \in K t\}$.

証明

参考文献 [3].

定義 9

S-K t4 は S-K t に次の 2 つの推論規則を加えた体系である.

$$\frac{P[\textcircled{P} a, \Gamma], \Delta}{\textcircled{P} a, P[\Gamma], \Delta} (\textcircled{P}_{tr}) \quad \frac{F[\textcircled{F} a, \Gamma], \Delta}{\textcircled{F} a, F[\Gamma], \Delta} (\textcircled{F}_{tr})$$

S-K t4 の推論図の例:

$$\begin{array}{l} \frac{p_0, n_0}{P[n_0, p_0]} (e), (w), (turn) \\ \frac{P[n_0, p_0]}{\textcircled{P} n_0, P[p_0]} (\textcircled{P}) \\ \frac{\textcircled{P} n_0, P[p_0]}{\boxed{P} p_0, \textcircled{P} n_0} (e), (\boxed{P}) \\ \frac{\boxed{P} p_0, \textcircled{P} n_0}{\textcircled{P} p_0, \textcircled{P} n_0} (e), (w), (turn) \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{P[\oplus n_0, \boxed{P} p_0]}{\oplus n_0, P[\boxed{P} p_0]} (\oplus_{tr}) \\
\frac{\oplus n_0, P[\boxed{P} p_0]}{\boxed{P} \boxed{P} p_0, \oplus n_0} (e), (\boxed{P}) \\
\frac{\boxed{P} \boxed{P} p_0, \oplus n_0}{\oplus n_0 \vee \boxed{P} \boxed{P} p_0} (\vee), (e), (c) \text{を適当に行なう} \\
(\oplus n_0 \vee \boxed{P} \boxed{P} p_0 = (\boxed{P} p_0 \rightarrow \boxed{P} \boxed{P} p_0)^*)
\end{array}$$

定理 (S-K t4 の完全性定理)

Γ は S-K t4 で推論できる iff $m(\Gamma) \in K t4^*$.

ただし, $K t4^* \triangleq \{a^* \mid a \in K t4\}$.

証明

参考文献 [3].

定義 10

S-K t4.3 は S-K t4 に次の推論規則を加えた体系である.

$$\frac{\Gamma \quad \Delta \quad \Pi}{\Sigma} (\text{cross})$$

ただし,

$$\Gamma = \overline{d}, \overline{\sigma}[\overline{a}, \Omega,$$

$$\Delta = \overline{\oplus e}, \overline{e}, \overline{\sigma}[\overline{\oplus c}, \overline{c}, \Omega,$$

$$\Pi = \overline{\oplus f}, \overline{f}, \overline{\sigma}[\overline{\oplus b}, \overline{b}, \Omega,$$

$$\Sigma = \overline{a}, \overline{\oplus b}, \overline{\oplus c}, \overline{\sigma}[\overline{d}, \overline{\oplus e}, \overline{\oplus f}, \Omega,$$

$\overline{a}$ などは $a_1, a_2, \dots, a_n$ という i-n-f の有限列または空列,

$$\overline{a} = a_1, a_2, \dots, a_n \text{ のとき } \overline{\oplus a} = \oplus a_1, \oplus a_2, \dots, \oplus a_n,$$

$\overline{\sigma}[\overline{}]$ は “P[” と “F[” から成る有限列または空列,

Ω は i-n-f と “P[” と “F[” と “] ” から成る有限列または空列 (Ω の中では開き括弧と閉じ括弧がつりあわない

こともあるので Ω は必ずしも T-sequent ではない)。

S-K t4.3 の推論図の例:

$$\begin{array}{c}
 \frac{p_0, n_0}{P[F[n_0, p_0]]} \quad \frac{p_0, n_0}{P[F[\oplus n_0, n_0, p_0]]} \quad \frac{p_0, n_0}{P[F[\oplus n_0, n_0, p_0]]} \text{ (cross)} \\
 \frac{\oplus n_0, \oplus n_0, n_0, P[F[p_0]]}{n_0, \oplus n_0, \oplus n_0, \boxed{P} \boxed{F} p_0} \\
 \hline
 n_0 \vee \oplus n_0 \vee \oplus n_0 \vee \boxed{P} \boxed{F} p_0
 \end{array}$$

$$(n_0 \vee \oplus n_0 \vee \oplus n_0 \vee \boxed{P} \boxed{F} p_0 = ((p_0 \wedge \boxed{P} p_0 \wedge \boxed{F} p_0) \rightarrow \boxed{P} \boxed{F} p_0)^*)$$

定理 (S-K t4.3 の完全性定理)

Γ は S-K t4.3 で推論できる iff $m(\Gamma) \in K t4.3^*$.

ただし, $K t4.3^* \triangleq \{a^* \mid a \in K t4.3\}$.

証明

参考文献 [3].

定義 1 1

S-K tL は S-K t4.3 に次の 2 つの推論規則を加えた体系である。

$$\frac{a, \Gamma}{\oplus a, \Gamma} (\oplus_{re}) \quad \frac{a, \Gamma}{\oplus a, \Gamma} (\oplus_{re})$$

(S-K tL においては (cross) を次の簡単な形の規則に変えてよい:

$$\frac{\overline{\oplus c}, \sigma \mid \overline{\oplus b}, \Omega \quad \overline{\oplus d}, \sigma \mid \overline{\oplus a}, \Omega}{\overline{\oplus a}, \overline{\oplus b}, \sigma \mid \overline{\oplus c}, \overline{\oplus d}, \Omega} \text{ (cross}_{re})$$

S-K tL の推論図の例:

$$\frac{p_0, n_0}{\quad} (e)$$

$$\frac{\frac{n_0, p_0}{\textcircled{P} n_0, p_0}}{\textcircled{P} n_0 \vee p_0} (\textcircled{P} r.e.) \quad (\textcircled{P} n_0 \vee p_0 = (\textcircled{P} p_0 \rightarrow p_0)^*)$$

定理 (S-KtL の完全性定理)

Γ は S-KtL で推論できる iff $m(\Gamma) \in \text{KtL}^*$.

ただし, $\text{KtL}^* \triangleq \{a^* \mid a \in \text{KtL}\}$.

証明

参考文献 [3].

定理 (cut-elimination theorem)

S-Kt, S-Kt4, S-Kt4.3, S-KtL において次の推論規則 (cut) は admissible である.

$$\frac{\Gamma, a^* \quad (\neg a)^*, \Gamma}{\Gamma} (\text{cut})$$

ただし a は任意の formula

証明

完全性定理より明らか.

参考文献

[1] D.M.Gabbay, Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics, D.Reidel, 1976.

[2] M.Sato, A study of Kripke-type models for some modal

logics by Gentzen's sequential method, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol.13(1977), pp.381-468.

[3] 鹿島亮, Cut-free systems for some tense logics, 東京工業大学修士論文, 1990.