

重調和方程式の数値解法<講演予稿>

三 好 哲 考 (熊本大. 理)

§1 序

重調和項を含む偏微分方程式

$$(1.1) \quad \Delta^2 u = f, \quad ,$$

$$(1.2) \quad \partial_{tt} u + \Delta^2 u = f$$

等々近似解を数値的に求めるといふ問題は、2階の偏微分方程式の場合とは異り特殊な困難さを持つてゐる。現在、これらの問題を解く為に使用されてゐる方法を大別すると、変分法に基づく近似解法と差分法に基づく近似解法とに分る事ができるであろう。前者の代表的なものはいうまでもなく、Ritz[1]の方法である。この方法の欠点は、この方法の使用にあたり必要不可欠な関数系(basis)の構成が一般にはまわめて困難であるといふ事にある。最近になつて、いわゆる有限要素法(FEM)がRitz法の精神を受け継ぐ事によつて、この欠点をある程度是正したかに見える。しかし、境界条件の処理はFEMにより確にある程度容易にできるようなはなつたが、今度は別の問題が生じた。すなわち、いわゆる

conforming basis を使用する等にはすれば莫大に連立1次方程式を解かなければならなくなるのである。これを避ける為には non-conforming basis で我慢すれば近似解の精度が一般に悪くなる。しかもこの場合には特殊な場合[2]を除いて、近似解の収束性の証明さえもなされてはいない。

差分法の場合にも境界条件の処理の困難さは変わらない。それのみが、Dirichlet タイプの境界条件の場合にはともかくとして、他の境界条件の場合には事情は変分法の場合よりも一層悪くなるとさえ言わなければならぬ。更に、電子計算機を有効に使う（汎用コードの作製）という立場からすれば、差分法は変分法（特に FEM）にくらべると実用上数段劣っていると言わざるを得ないであろう。

以上がほぼ (1.1), (1.2) にたいする数値解法の現状である。ところで、問題の困難さには要するに、皇調和項が存在する、という事にのみ由来している。したがって、この項を2つに分解し、与えられた方程式がそれと同等な2階の連立方程式に（境界条件、初期条件を含めて）分解できれば、その連立方程式に FEM を適用する事によって、すべての問題は解消するはずである。これまでこの方向での試みがなされなかった（筆者の知る範囲内での話だが）最大の理由は、この2階の連立方程式に対応する新しい変分原理が確立できてい

なかつたからだと思われる。そこでこの報告では、まず Part (I) にあつて、分解されておて来た 2 階の連立方程式に対応した変分原理を導き、それをもとにして、(1.1) にあつる FEM の適用を述べ、さらに近似解の収束性をあきらかにする。Part (II) では、Part (I) の結果、及び波動方程式にあつる FEM の安定性についての藤井 [3] の結果を使って、(1.2) にあつる FEM の適用、近似解の安定性、収束性を議論する。

Part (I) - 定常問題 -

§2 予備的考察

考える境界値問題は次のものに限定して話を進めようが、他の境界条件の場合も全く同様に議論できる。これは FEM の良いところである。

$$(2.1) \quad \Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega$$

$$(2.2) \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

さらに話を簡単にする為に次の仮定をあく。これは Δ 及び $\partial\Omega$ の滑かたに関する条件である。

「仮定」：上の境界値問題の解は $W_2^4(\Omega)$ に属す。

この時、容易にわかる事であるが次の (I), (II), (III) が成立する。

(I)：問題 (2.1) ~ (2.2) は次の問題と同等である。

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Delta u = v \\ \Delta v = f \end{cases} \quad \text{in } \Omega$$

$$2.4. \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = 0$$

をみたす $u \in W_2^4(\Omega)$, $v \in W_2^2(\Omega)$ を求める.

(II): 問題 (2.3) ~ (2.4) の解 (u, v) は次の問題の一解である.

$$(2.5) \quad \begin{matrix} (*) \\ (\partial u, \partial \varphi) + (v, \varphi) = 0 \end{matrix} \quad \varphi \in W_2^1(\Omega)$$

$$(2.6) \quad (\partial v, \partial \varphi) + (f, \varphi) = 0 \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$$

をみたす $(u, v) \in (\overset{\circ}{W}_2^1, W_2^1)$ を求める.

(III): 問題 (2.5) ~ (2.6) の解 $(\bar{u}, \bar{v})$ は, 方程式

$$(2.7) \quad (\partial \bar{u}, \partial \varphi) + (\bar{v}, \varphi) = 0 \quad \varphi \in W_2^1(\Omega)$$

をみたす $(\bar{u}, \bar{v}) \in (\overset{\circ}{W}_2^1, W_2^1)$ の内での関数

$$(2.8) \quad F(u, v) = (v, v) - 2(f, u)$$

を最小にするものである. $(*) : (\partial u, \partial \varphi) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} d_i u \, d_i \varphi \, dx$

§3. 近似解の決定方程式

Ω : 多角形領域, Ω_h : Ω の三角形分割 (regular)

n : Ω_h の内部節点数, N : $\overline{\Omega}_h$ 内の節点数

$\sum_1^n$: Ω_h の内部節点に関する和.

$\varphi_p(x)$ ($p=1, 2, \dots, N$) : 次の条件をみたす関数.

(1) $\overline{\Omega}$ で連続, $\partial\Omega$ で 0 となる. (2) 各要素内では高々 1 次の多項式 (3) 1 次独立.

このとき, $\bar{u}, \bar{v}$ (真の解) の近似関数をそれぞれ

$$(3.1) \quad u_h = \sum_1^n u_p \varphi_p(x)$$

$$(3.2) \quad v_h = \sum_1^N v_p \varphi_p(x)$$

の形で求める事にして、係数 $\{u_p\}, \{v_p\}$ を連立一次方程式

$$(3.3) \quad (\partial u_h, \partial \varphi_p) + (v_h, \varphi_p) = 0 \quad p = 1 \sim N$$

$$(3.4) \quad (\partial v_h, \partial \varphi_p) + (f, \varphi_p) = 0 \quad p = 1 \sim n$$

から決定する。

定理 1. $\{u_p\}, \{v_p\}$ は一意的に決定される。

定理 2. アルゴリズム (3.3)~(3.4) は次の 2 つのアルゴリズムと同等である。

(A): v_h を u_h から、方程式

$$(3.5) \quad (\partial u_h, \partial \varphi_p) + (v_h, \varphi_p) = 0 \quad p = 1 \sim N$$

によって定めるとき、次の汎関数を u_h に関して最小にする。

$$(3.6) \quad F(u_h) = (v_h, v_h) - 2(f, u_h)$$

(B): 汎関数

$$B[u_h, v_h] = 2(\partial u_h, \partial v_h) + (v_h, v_h) + 2(f, u_h)$$

の $\{u_p\}, \{v_p\}$ に関する stationary point を求める。

定理 3. $(\bar{u}, \bar{v})$ を真の解とすれば、(3.6) の $F(u_h)$ は次のようにも表す事ができる。

$$(3.7) \quad F(u_h) = -2(\partial[\bar{u} - u_h], \partial[\bar{v} - v_h]) \\ - (\bar{v} - v_h, \bar{v} - v_h) - (\bar{v}, \bar{v}).$$

§4. 近似解の収束性.

この節より, (u, v) を真の解とする.

(i) $u - u_h$ を $v - v_h$ で評価すること. $\dot{u}_h$ を (3.1) の形をした u の補間関数とする. $u - \dot{u}_h = \varepsilon_h$, $\|\varepsilon_h\|_1 = \varepsilon$ とおく.

ただし $\|\varepsilon_h\|_1^2 = (\partial \varepsilon_h, \partial \varepsilon_h)$ である.

補題 1. 次の評価が成立する.

$$(4.1) \quad \|u - u_h\|_1 \leq \varepsilon + C \|v - v_h\|$$

(ii) $v - v_h$ の評価. $\dot{u}_h$ より $\bar{v}_h$ を次の方程式から求める.

$$(4.2) \quad (\partial \dot{u}_h, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_h, \varphi_p) = 0, \quad p = 1 \sim N.$$

次に, v に近い (3.2) の形での補間関数を $\dot{v}_h$ とし, $v - \dot{v}_h = \delta_h$, $\|\delta_h\|_1 = \delta$, $v - \bar{v}_h = \rho_h$, $\|\rho_h\| = \rho$ とおく.

補題 2. 次の評価が成立する.

$$(4.3) \quad \|v - v_h\| \leq C (\delta + \sqrt{\delta \varepsilon} + \sqrt{\lambda})$$

ただし, $0 \leq \lambda \leq \rho^2 + 2\rho\delta + 2\varepsilon\delta$.

証明. δ_h の定義より, $(\partial[u - \dot{u}_h], \partial[v - \bar{v}_h])$

$$= (\partial[u - \dot{u}_h], \partial[\dot{v}_h - \bar{v}_h]) + (\partial[u - \dot{u}_h], \partial\delta_h).$$

一方 (4.2) 式より, $(\partial[u - \dot{u}_h], \partial[\dot{v}_h - \bar{v}_h])$

$$= -(v - \bar{v}_h, \dot{v}_h - \bar{v}_h) = -(v - \bar{v}_h, v - \bar{v}_h) + (v - v_h, \delta_h).$$

したがって, $2(\partial[u - \dot{u}_h], \partial[v - \bar{v}_h]) + (v - \bar{v}_h, v - \bar{v}_h)$

$$= -(v - \bar{v}_h, v - \bar{v}_h) + 2(v - \bar{v}_h, \delta_h) + 2(\partial[u - \dot{u}_h], \partial\delta_h).$$

上式の右辺を λ_h とすれば, $\lambda \equiv |\lambda_h| \leq \rho^2 + 2\rho\delta + 2\varepsilon\delta$.

とすると $u_h, \bar{v}_h$ は (4.2) 式により、結ばれておるから
定理 2 により近似解 u_h に関するものは、

$$\begin{aligned} F(u_h) &= -2(\partial[u-u_h], \partial[v-\bar{v}_h]) - (v-\bar{v}_h, v-\bar{v}_h) - (v, v) \\ &\leq F(\bar{u}_h) \\ &= -2(\partial[u-u_h], \partial[v-\bar{v}_h]) - (v-\bar{v}_h, v-\bar{v}_h) - (v, v) \\ &= -\lambda_h - (v, v) \end{aligned}$$

すなわち次の関係式を得る。

$$(4.4) \quad -2(\partial[u-u_h], \partial[v-\bar{v}_h]) - (v-\bar{v}_h, v-\bar{v}_h) \leq -\lambda_h$$

$$\begin{aligned} \text{一方} \quad & (\partial[u-u_h], \partial[v-\bar{v}_h]) \\ &= (\partial[u-u_h], \partial[\bar{v}_h - v_h]) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \\ &= -(v-\bar{v}_h, \bar{v}_h - v_h) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \\ &= -(v-\bar{v}_h, v-\bar{v}_h) + (v-\bar{v}_h, \delta_h) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \end{aligned}$$

であるからこれを (4.4) 式へ代入すれば、

$$(v-\bar{v}_h, v-\bar{v}_h) - 2(v-\bar{v}_h, \delta_h) - 2(\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \leq -\lambda_h$$

Schwarz の不等式及び (4.1) 式により次の 2 次不等式を得る。

$$(4.5) \quad \|v-\bar{v}_h\|^2 - 2\delta(1+C)\|v-\bar{v}_h\| - 2\delta\varepsilon - \lambda \leq 0$$

これを解いて (4.3) 式を得る。 (証明終)

(Ⅲ) ρ の評価 (a) — / 次 basis —

まず $\rho_p(x)$ が要素上で / 次式となる場合について考える。

勿論 $\rho_p(p) = 1$ とする。

補題3. $\hat{u}$ を三角形 Δ 内で線型な任意の関数としたとき、次の不等式が成立する。(実際には線型である必要はない)。

$$(4.6) \quad \max_{\Delta} |\hat{u}| \leq \frac{C}{r} \|\hat{u}\|_{\Delta}$$

ただし、 r は Δ の最小辺の長さ、 $C = C(\sqrt{\sin \theta})$ 、 θ : Δ の最小角。

証明は Sobolev の埋蔵定理による。

補題4. $\hat{u}$ を (3.2) の形をした要素内では線型な関数とすれば次の不等式が成立する。

$$(4.7) \quad \sqrt{\sum_{p \in \Omega_h} u_p^2 \cdot r^2} \leq C \|\hat{u}\|_{\Omega_h}$$

証明は補題3.による。

[定義] 三角形分割 Ω_h が, *strongly regular* であるとは, Ω_h は *regular* な分割である上に, $h \rightarrow 0$ のとき次のような Ω'_h の部分領域 Ω'_h がとれるときをいう。

$$(1) \quad (\bar{\Omega}_h - \Omega'_h) \text{ の節点数} = O(h^{-1}), \quad h: \min_r r$$

$$(2) \quad (\partial \hat{u}_h, \partial \varphi_p) = \begin{cases} -\Delta u|_p \cdot (1, \varphi_p) + O(h^3) & \text{if } p \in \Omega'_h \\ O(h^2) & \text{if } p \in \bar{\Omega}_h - \Omega'_h \end{cases}$$

ただし、 $\hat{u}_h$ は $u \in C^3(\bar{\Omega})$ の補^面関数とする (区分的に線型な関数での)

補題5. 分割 Ω_h が *strongly regular* であれば、 $\hat{u}_h$ を区分的に線型な関数による $u \in C^3(\bar{\Omega})$ の補面関数としたとき、方程式

$$(4.8) \quad (\partial \hat{u}_h, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_h, \varphi_p) = 0 \quad p = 1 \sim N$$

によって定められる $\bar{v}_h$ は次の関係式をみたす。

$$(4.9) \quad \|v - \bar{v}_h\| = O(h^{\frac{1}{2} + \delta}) \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

(iv) $\mathcal{P}$ の評価 (b) - 2 次以上の basis -

$\hat{u}$ を次の条件をみたす Ω_h 上の関数とする.

(4.10) (1) $\bar{\Omega}_h$ で連続 (2) 各要素内では高々 k 次多項式

補題 6 (藤井 [3], 鶴飼 [4]). (4.10) の条件をみたす $\hat{u}$ には

次の不等式が成立する. ただし $h = \min_{\Delta} (\Delta \text{ の最小辺の長さ })$.

$C' = C'(\sqrt{\lambda \sin \theta})$, θ : 前出

$$(4.11) \quad \sum_i \|\partial_i u\| \leq \frac{C'}{h} \|u\|$$

補題 7. $\hat{u}_h$ を (3.1) の型の関数による u の補間関数とする.

(4.2) 式によって定められた $\bar{v}_h$ には次の評価が成立する.

$$(4.12) \quad \rho = \|v - \bar{v}_h\| = O\left(\frac{\varepsilon}{h} + \delta\right) \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

ただし $\varepsilon = \|u - \hat{u}_h\|_1$, $\delta = \|v - \hat{v}_h\|_1$.

定理 4. $u, v, \hat{u}_h, \hat{v}_h, \varepsilon, \delta$ を前出のものとする. この

とき $F \equiv M$ による近似解 u_h, v_h には次の評価が成立する.

$$(4.13) \quad \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O\left(\frac{\varepsilon}{h} + \delta\right)$$

特に Ω_h が *strongly regular* な分割であれば, u_h, v_h が区分的に線型な場合でも次の評価が成立する.

$$(4.14) \quad \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O(h^{\frac{1}{2}})$$

ε, δ を実際に評価するためには, よく知られている補間

定理を次に述べる. w を Ω_h で十分滑かな関数とし, その

補間関数 $\hat{w}_h$ を次のように定める.

$\dot{w}_h^{(1)}$; 要素内で 1 次式, 3 頂点では w と一致

$\dot{w}_h^{(2)}$; " 2 次式, 3 頂点及び 3 辺の中点で

w と一致.

$\dot{w}_h^{(3)}$; " 3 次式, 3 頂点では $w, \partial_i w (i=1, 2)$ と.

さらに中心で w と一致する.

補題 8. (Zlámal [5])

$$(4.15) \quad \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha (w - \dot{w}_h^{(i)})\|_{\Omega_h} \leq C M_{i+1} h^i \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\text{ただし } M_j = \max |\partial^j w|.$$

定理 5. 真の解 u, v が十分滑かであれば, FEM の近似

解 u_h, v_h に対し 1 次の評価が成立する.

$$\text{2 次式の basis} \Rightarrow \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O(h)$$

$$\text{3 次式 " } \Rightarrow \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O(h^2)$$

特に Ω_h が *strongly regular* な分割であれば

$$\text{1 次式の basis} \Rightarrow \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O(h^{\frac{1}{2}})$$

注意 (1): Friedrichs - Keller [6] 式の分割は *strongly regular*

である. これ以外にも δ, γ とする分割はかなり多くある.

注意 (2): ACM-basis の収束のオーダーは $O(h^{\frac{1}{2}})$ である [2].

これと比較すれば, 1 次式の basis でも工程悪くはないと思われる.

注意 (3): 方程式 (3.3) ~ (3.4) は *inner-outer iteration* を使っても

簡単に解く事ができる. 又 Smith [7] 参照の事.

Part (II) - 非定常問題 -

§ 5. 予備的考察.

次の初期値-境界値問題を考える.

$$(5.1) \quad \partial_{tt} u + \Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T]$$

$$(5.2) \quad \begin{cases} u|_{t=0} = a, \quad \partial_t u|_{t=0} = b \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

この問題が十分滑かな解 u を持てば, $u, v = \Delta u$ は方程式

$$(5.3) \quad \begin{cases} \Delta u = v \\ \partial_{tt} v + \Delta v = f \end{cases} \quad \text{in } \Omega \times (0, T]$$

を (5.2) の条件下で解くという問題の解になつてゐる. 定常問題の場合からのアナロジーとして次のようなアルゴリズムが

考えられる. 近似関数 $u_R^{(m)}, v_R^{(m)}$ ($m = m \cdot \Delta t, \Delta t = \frac{T}{M}$) を

$$(5.4) \quad \begin{cases} u_R^{(m)} = \sum_1^n u_p^{(m)} \varphi_p \\ v_R^{(m)} = \sum_1^N v_p^{(m)} \varphi_p \end{cases}$$

とおいて, 方程式

$$(5.5) \quad \begin{cases} (\partial u_R^{(m)}, \partial \varphi_p) + (v_R^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (D_t D_{\tau} u_R^{(m)}, \varphi_p) - (\partial v_R^{(m)}, \partial \varphi_p) = (f^{(m)}, \varphi_p) & p = 1 \sim n \\ (1 \leq m \leq M-1) \end{cases}$$

より $u_R^{(m)}$ を出す. 左辺は, 初期条件は次のように与えらる.

$$(5.6) \quad u_R^{(0)} = P_R a, \quad D_t u_R^{(0)} = P_R b,$$

ここで, D_t, D_{τ} は前進, 後退差分, P_R は適当な Projection.

補題 9. アルゴリズム (5.5) ~ (5.6) は次のアルゴリズムと同等.

$\bar{w}_R^{(m)}, \bar{v}_R^{(m)}$ を (5.4) の $u_R^{(m)}, v_R^{(m)}$ と同様な形の関数とする.

$$(5.7) \quad \begin{cases} (D_t \bar{v}_R^{(m)}, \varphi_p) + (\partial \bar{w}_R^{(m)}, \partial \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (D_t \bar{w}_R^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \bar{v}_R^{(m+1)}, \partial \varphi_p) = (f^{(m+1)}, \varphi_p) & p = 1 \sim n \end{cases}$$

より $\bar{v}_R^{(m+1)}, \bar{w}_R^{(m+1)}$ を出し ($m = 0, 1, 2, \dots, M-1$)

$$(5.8) \quad D_t \bar{u}_R^{(m)} = \bar{w}_R^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots, M-1)$$

より $\bar{u}_R^{(m+1)}$ を求める. 次に, 次の初期条件を与える.

$$(5.9) \quad \bar{u}_R^{(0)} = P_R a, D_t \bar{u}_R^{(0)} = P_R b, \bar{w}_R^{(0)} = P_R b$$

$$(5.10) \quad (\partial \bar{u}_R^{(0)}, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_R^{(0)}, \varphi_p) = 0 \quad p = 1 \sim N$$

注意: アルゴリズム (5.7) ~ (5.10) は, 与えられた方程式を次のように分解した上で, これをいわゆる consistent mass system の形で近似したものである.

$$u_t = w, \quad \Delta u = v$$

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta w = 0 \\ \partial_t w + \Delta v = f \end{cases}$$

補題の証明. $u_R^{(m)} = \bar{u}_R^{(m)}, v_R^{(m)} = \bar{v}_R^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$) をいう.

まず, (5.6), (5.9) により, $u_R^{(0)} = \bar{u}_R^{(0)}, u_R^{(1)} = \bar{u}_R^{(1)}$ は明らか. また

$v_R^{(0)}$ を (5.5) 式により $u_R^{(0)}$ から定める事にすれば, (5.10) より,

$v_R^{(0)} = \bar{v}_R^{(0)}$ となる. 次に (5.8), (5.9) より,

$$(5.11) \quad D_t \bar{u}_R^{(m)} = \bar{w}_R^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M-1)$$

したがって, $D_t D_t \bar{u}_R^{(m+1)} = D_t \bar{w}_R^{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M-2$) となるが,

これを (5.7) の $\bar{u}_k^{m+1}$ 式を代入すると

$$(5.12) \quad (D_t D_t \bar{u}_k^{m+1}, \varphi_p) - (\partial_t \bar{u}_k^{m+1}, \partial \varphi_p) = -\bar{u}_k^{m+1} \varphi_p \quad p=1 \sim N \\ (m=0, 1, 2, \dots, M-2)$$

次に (5.11) の $\bar{u}_k^{(m)}$ を空間座標に関して微分すると

$$D_t \partial \bar{u}_k^{(m)} = \partial \bar{w}_k^{(m)} \quad \text{a.e.} \quad (m=0, 1, 2, \dots, M-1)$$

これを (5.7) に代入すると次式を得る.

$$(D_t \bar{u}_k^{(m)}, \varphi_p) + (D_t \partial \bar{u}_k^{(m)}, \partial \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim N \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

したがって (5.10) を考慮すれば

$$(5.13) \quad (\partial \bar{u}_k^{(m)}, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_k^{(m)}, \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim N \quad (m=0, 1, 2, \dots, M)$$

方程式 (5.5) と方程式 (5.12), (5.13) をくらべてみると全く同じものであり、さらに両者の初期値も同じであるから両方のアルゴリズムは等しい (勿論 $\bar{v}_k^{(M)}$ は (5.5) の上の式を使って最後に $\bar{u}_k^{(M)}$ から計算したものである). (証明)

§6. 安定条件

この節では scheme (5.5) が安定であるための十分条件を導く. 証明方法は 藤井 [3] の使った方法に沿っている.

定理 6 条件 $\frac{\sqrt{\Delta t}}{h} < \frac{\sqrt{2}}{C}$ のもとに scheme (5.5) には、以下の形のエネルギー不等式が成立する.

$$(6.1) \quad \|D_t \bar{u}_k^{(M)}\|^2 + \|\bar{v}_k^{(M)}\|^2 \leq K(T) \sum_{l=1}^M \Delta t \|\bar{u}_k^{(l)}\|^2 \\ + K(T) [\|D_t \bar{u}_k^{(0)}\|^2 + \|\bar{v}_k^{(0)}\|^2]$$

ただし K は補題 6 に示すような定数である.

この定理を証明する為に、いくつかの補題を設ける。この

節では以下 suffix n を省く。

補題 10. 次の不等式が $2 \leq k \leq M$ に関して成立する。

$$(6.2) \quad (1 - \rho)(\|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|v^{(k)}\|^2) \\ \leq (1 + \rho)(\|D_t u^{(0)}\|^2 + \|v^{(0)}\|^2) \\ + \sum_1^M \Delta t \cdot \|f^{(m)}\|^2 + \sum_1^k \Delta t \cdot \|D_{\bar{t}} u^{(m)}\|^2$$

ただし、 $\rho = \frac{\Delta t \cdot (C')^2}{2\kappa^2}$ である。 C', κ ; 前出。

証明.

$$(6.3) \quad \sum_{m=1}^{k-1} (D_t D_{\bar{t}} u^{(m)}, D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}) \Delta t \\ - \sum_{m=1}^{k-1} (\partial v^{(m)}, \partial [D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}]) \Delta t \\ = \sum_{m=1}^{k-1} (f^{(m)}, D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}) \Delta t$$

が (5.5) より成立するが、 $D_t D_{\bar{t}} u^{(m)} \cdot (D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}) = D_t (D_{\bar{t}} u^{(m)})^2$ である

から (6.3) 式の左辺第一項は次のようになる。

$$(6.4) \quad \|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 - \|D_{\bar{t}} u^{(0)}\|^2.$$

次に (5.5) 式より $(\partial D_t u^{(m)}, \partial v^{(m)}) + (D_t v^{(m)}, v^{(m)}) = 0$ であるから、

$$\sum_{m=1}^{k-1} (\partial v^{(m)}, \partial [D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}]) \Delta t \\ = - \sum_{m=1}^{k-1} (D_t v^{(m)} + D_{\bar{t}} v^{(m)}, v^{(m)}) \Delta t = -(v^{(k)}, v^{(k-1)}) + (v^{(0)}, v^{(1)}) \\ = -(v^{(k)}, v^{(k)}) + (v^{(0)}, v^{(0)}) + (v^{(k)}, D_{\bar{t}} v^{(k)}) \Delta t + (v^{(0)}, D_t v^{(0)}) \Delta t.$$

したがって (6.3) 式は次のように表わされる。

$$(6.5) \quad \|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|v^{(k)}\|^2 \\ = \|D_{\bar{t}} u^{(0)}\|^2 + \|v^{(0)}\|^2 + \sum_{m=1}^{k-1} (f^{(m)}, D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}) \Delta t \\ + (v^{(k)}, D_{\bar{t}} v^{(k)}) \Delta t + (v^{(0)}, D_t v^{(0)}) \Delta t$$

と = 3 で、(5.5)式及び補題6により

$$\begin{aligned} (v^{(k)}, D_{\bar{t}} v^{(k)}) \Delta t &= -(\partial D_{\bar{t}} u^{(k)}, \partial v^{(k)}) \Delta t \\ &\leq \frac{\Delta t}{2} (\|\partial D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|\partial v^{(k)}\|^2) \\ &\leq \rho (\|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|v^{(k)}\|^2). \end{aligned}$$

さらに $(v^{(0)}, D_t v^{(0)}) \Delta t$ についても同様の不等式が成立する。

これらを(6.5)へ代入して整理すれば(6.2)を得る。(証明)

補題 1.1 次の不等式が $2 \leq k \leq M$ に関して成立する。

$$\begin{aligned} (6.6) \quad & (1 - \rho) \|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 \\ & \leq \left(1 + \frac{\Delta t}{1 - \rho - \Delta t}\right)^{k-2} \left\{ (\bar{c} + \Delta t) \|D_t u^{(0)}\|^2 + \bar{c} \|v^{(0)}\|^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_1^M \Delta t \cdot \|f^{(m)}\|^2 \right\} + \Delta t \|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{c} = 1 + \rho$

証明 $k=2$ のときは補題10により

$$\begin{aligned} (1 - \rho) \|D_{\bar{t}} u^{(2)}\|^2 &\leq (1 + \rho) (\|D_t u^{(0)}\|^2 + \|v^{(0)}\|^2) + \sum_1^M \Delta t \cdot \|f^{(m)}\|^2 \\ &\quad + \Delta t \cdot \|D_t u^{(0)}\|^2 + \Delta t \|D_{\bar{t}} u^{(2)}\|^2 \end{aligned}$$

任意の

であるからたしかに成立してゐる。 $2 \leq n \leq k$ なる n につ

いて補題が成立してあれば $n = k+1$ についても成立する

という事を示す。(6.6)で k を n で置き換えた式を整理すれば

$$\|D_{\bar{t}} u^{(n)}\|^2 \leq \frac{1}{1 - \rho - \Delta t} \left(1 + \frac{\Delta t}{1 - \rho - \Delta t}\right)^{n-2} \left\{ \quad \right\}$$

でありから

$$\sum_{n=2}^k \Delta t \cdot \|D_{\bar{t}} u^{(n)}\|^2 \leq \sum_{n=2}^k \frac{\Delta t}{1 - \rho - \Delta t} \left(1 + \frac{\Delta t}{1 - \rho - \Delta t}\right)^{n-2} \left\{ \quad \right\}$$

$$(6.7) \quad = \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{k-1} - 1 \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\}$$

一方、(6.2)式を整理して、ケル補正すれば、

$$\begin{aligned} (1-\rho) \| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 &\leq \bar{c} (\| D_t u^{(0)} \|^2 + \| v^{(0)} \|^2) + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \\ &\quad + \Delta t \cdot \| D_t u^{(0)} \|^2 + \sum_2^k \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(m)} \|^2 + \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 \end{aligned}$$

上式の右辺の4項へ(6.7)を代入すれば次の結果を得る。

$$\begin{aligned} (1-\rho) \| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 &\leq (\bar{c} + \Delta t) \| D_t u^{(0)} \|^2 + \bar{c} \| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \\ &\quad + \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 + \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{k-1} - 1 \right] \{ (\bar{c} + \Delta t) \| D_t u^{(0)} \|^2 \\ &\quad + \bar{c} \| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \} \\ &= \left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{k-1} \left\{ (\bar{c} + \Delta t) \| D_t u^{(0)} \|^2 + \bar{c} \| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \right. \\ &\quad \left. + \Delta t \| D_{\bar{t}} u^{(k+1)} \|^2 \right\} \end{aligned}$$

したがって $n = k+1$ にも $(*)$ も成立する。(証明終)

系1. 次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^M \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(n)} \|^2 &\leq \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{M-1} - 1 \right] \left\{ (\bar{c} + \Delta t) \| D_t u^{(0)} \|^2 \right. \\ &\quad \left. + \bar{c} \| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \right\} \end{aligned}$$

定理6の証明: ρ を固定すれば、

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{M-1} < \left(\frac{1-\rho}{1-\rho-\Delta t} \right)^M \rightarrow e^{\frac{T}{1-\rho}} \quad (\Delta t \rightarrow 0)$$

したがって系1より

$$\begin{aligned} (6.8) \quad \sum_{n=1}^M \Delta t \cdot \| D_{\bar{t}} u^{(n)} \|^2 &\leq \text{const}(T) (\| D_t u^{(0)} \|^2 + \| v^{(0)} \|^2) \\ &\quad + \text{const}(T) \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \end{aligned}$$

(6.2)式で $k = M$ とおいて (6.8)式を代入すれば (6.1)式を得る。

(証明終)

§7. 近似解の収束性

補題12. $\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ とする. $\alpha(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\beta(x) \in W_2^1(\Omega)$ が

$$(7.1) \quad (\partial \alpha, \partial \varphi) + (\beta, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1$$

$$(7.2) \quad (\partial \beta, \partial \varphi) + (\varepsilon, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1$$

をみたしてゐるとき、次の評価が成り立つ。

$$(7.3) \quad \|\alpha\|_1 \leq \text{const.} \|\beta\|, \quad \|\beta\| \leq \text{const.} \|\varepsilon\|$$

証明. (7.1) 式で $\varphi = \beta$, (7.2) 式で $\varphi = \alpha$ とおけば

$$(\partial \alpha, \partial \beta) + (\beta, \beta) = 0, \quad (\partial \beta, \partial \alpha) + (\varepsilon, \alpha) = 0$$

したがって、

$$(7.4) \quad (\beta, \beta) = -(\varepsilon, \alpha) \leq \|\varepsilon\| \cdot \|\alpha\|$$

一方 (7.1) で $\varphi = \alpha$ とおけば

$$(\partial \alpha, \partial \alpha) + (\beta, \alpha) = 0$$

したがって、 $\|\alpha\|_1^2 \leq \|\beta\| \cdot \|\alpha\| \leq \text{const.} \|\beta\| \cdot \|\alpha\|_1$, すなわち、

$$(7.5) \quad \|\alpha\|_1 \leq \text{const.} \|\beta\|$$

(7.4) と (7.5) より $\|\beta\| \leq \text{const.} \|\varepsilon\|$ を得る。 (証明終)

以下議論の筋道を明白にするために (5.1) の方程式の右辺

$f = 0$ と仮定する。 λ 次の仮定をおく。

仮定 : 問題 (5.1) ~ (5.2) は $\Omega \times [0, T]$ で十分滑かな一意解を持つ。

したがって、方程式 (5.1) は $t = 0$ にあつても成立する。

さて、 u を問題の真の解としよう。次の方程式より、

$\bar{u}_h^{(m)}, \bar{v}_h^{(m)}$ を定める。ただし、これらはそれぞれ (5.4) の

$u_k^{(m)}, v_k^{(m)}$ と同じ型の関数である。

$$(7.6) \quad \begin{cases} (\partial \bar{u}_k^{(m)}, \partial \varphi) + (\bar{v}_k^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p=1 \sim N \\ (\partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \bar{v}_k^{(m)}, \partial \varphi_p) = 0 & p=1 \sim n \end{cases}$$

($m = 0, 1, 2, \dots, M$)

補題 13. (7.6) で定められた $\bar{u}_k^{(m)}, \bar{v}_k^{(m)}$ に対し次の評価が成立する。ただし $\nu (> 0)$ は basis の次数に応じて定まるとする。定理 5 にあける近似解の収束のオーダーである。(k : 前出)

$$(7.7) \quad \| D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_k^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)} \|_1 = O(h^\nu) \quad (1 \leq m \leq M-1)$$

証明. 次の方程式の解 $(U, V^{(m)})$ と (w_2', w_2') ($1 \leq m \leq M-1$)

は一意的に存在する。

$$(7.8) \quad \begin{cases} (\partial U, \partial \varphi) + (V^{(m)}, \varphi) = 0 & \forall \varphi \in w_2' \\ -(\partial V^{(m)}, \partial \varphi) = -(\partial_{tt} u^{(m)}, \varphi) \\ \quad + (\partial_{tt} u^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi) & \forall \varphi \in w_2^0 \end{cases}$$

一方、上の 2 番目の式の右辺の 2 項を除いた場合の (7.8) の解は明らかに $\bar{U}^{(m)} = \partial_{tt} u^{(m)}, \bar{V}^{(m)} = \Delta \partial_{tt} u^{(m)}$ である。

とすると $\| \partial_{tt} u^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)} \| = O(\Delta t^2)$ であるから補題 12 により

$$(7.9) \quad \| \partial_{tt} u^{(m)} - U^{(m)} \|_1 = O(\Delta t^2) \quad (1 \leq m \leq M-1)$$

一方 (7.6) の両辺に $D_t D_{\bar{t}}$ を作用させると次式を得る。

$$(7.10) \quad \begin{cases} (\partial D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_k^{(m)}, \partial \varphi_p) + (D_t D_{\bar{t}} \bar{v}_k^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p=1 \sim N \\ -(\partial D_t D_{\bar{t}} \bar{v}_k^{(m)}, \partial \varphi_p) = -(D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) & p=1 \sim n \end{cases}$$

ただし、 $1 \leq m \leq M-1$ である。

(7.8) と (7.10) を比較すれば、Part (I) の結果が使えて、

$$(7.11) \quad \|U^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)}\|_1 = O(h^\nu), \quad (1 \leq m \leq M-1)$$

(7.9) と (7.11) より (7.7) を得る。 (証明終)

定理 7. $u, v = \Delta u$ を十分滑かな真の解とする。安定条件の仮定のもとで $u_h^{(M)}$ は $u^{(M)}$ へ $h \rightarrow 0$ のとき収束し次の評価が成立する。

$$(7.12) \quad \|u_h^{(M)} - u^{(M)}\|_1, \|\bar{v}_h^{(M)} - v^{(M)}\| = O(h^\nu)$$

証明. (7.6) の定義より、 $1 \leq m \leq M-1$ には $u^{(m)}$ と

$$(7.13) \quad \begin{cases} (\partial \bar{u}_h^{(m)}, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_h^{(m)}, \varphi_p) = 0 & (p=1 \sim N) \\ (D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \bar{v}_h^{(m)}, \partial \varphi_p) = (D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) & (p=1 \sim n) \end{cases}$$

ここで

$$(7.14) \quad \|E^{(m)}\|_1 \equiv \|D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_h^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)}\|_1 = O(h^\nu)$$

である。いま $\alpha_h^{(m)}, \beta_h^{(m)}$ を次のように定める。

$$\alpha_h^{(m)} = \bar{u}_h^{(m)} - u_h^{(m)}, \quad \beta_h^{(m)} = \bar{v}_h^{(m)} - v_h^{(m)}$$

(5.5) 及び (7.13) より、 $1 \leq m \leq M-1$ には $u^{(m)}$ と

$$(7.15) \quad \begin{cases} (\partial \alpha_h^{(m)}, \partial \varphi_p) + (\beta_h^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p=1 \sim N \\ (D_t D_{\bar{t}} \alpha_h^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \beta_h^{(m)}, \partial \varphi_p) = (E^{(m)}, \varphi_p) & p=1 \sim n \end{cases}$$

(i) $\|\beta_h^{(m)}\|$ の評価。

(7.6) に依りする "original problem" の真の解はあきらかに $u^{(m)}, v^{(m)}$ である。Part (I) の結果を特に $m=0$ の場合に適用

すれば

$$(7.16) \quad \|v^{(0)} - \bar{v}_R^{(0)}\| = O(h^\nu).$$

一方 $u_R^{(0)}$ として $u^{(0)}$ の補間関数をとる事にすれば, 補題5, および補題7により.

$$(7.17) \quad \|v^{(0)} - v_R^{(0)}\| = O(h^\nu)$$

したがって

$$(7.18) \quad \|\beta_R^{(0)}\| = \|\bar{v}_R^{(0)} - v_R^{(0)}\| = O(h^\nu)$$

(ii) $\|D_t \alpha_R^{(0)}\|$ の評価.

(5.6) により $D_t u_R^{(0)} = P_R \partial_t u^{(0)}$ であるから P_R を Part (I) の補間作用素とすれば補題8により

$$(7.19) \quad \|D_t u_R^{(0)} - \partial_t u^{(0)}\| = O(h^\nu)$$

と β で, 方程式

$$(7.20) \quad \begin{cases} (\partial_t D_t \bar{u}_R^{(0)}, \partial \varphi_p) + (D_t \bar{v}_R^{(0)}, \varphi_p) = 0 & p=1 \sim N \\ (D_t \partial_{tt} u^{(0)}, \partial \varphi_p) - (D_t \partial \bar{v}_0^{(0)}, \partial \varphi_p) = 0 & p=1 \sim n \end{cases}$$

の "original problem" の真の解は明らかに $D_t u^{(0)}, D_t v^{(0)}$ であるが, (7.20) の解は $D_t \bar{u}_R^{(0)}, D_t \bar{v}_R^{(0)}$ であるから, Part (E) より

$$(7.21) \quad \|D_t u^{(0)} - D_t \bar{u}_R^{(0)}\| = O(h^\nu)$$

この式と, (7.19) 式及び安定条件より

$$(7.22) \quad \|D_t \alpha_R^{(0)}\| = \|D_t (\bar{u}_R^{(0)} - u_R^{(0)})\| = O(h^\nu)$$

よって (7.14), (7.15), (7.18), (7.22) 及び定理6により, 安定条件の仮定のもとでは $\alpha_R^{(M)}, \beta_R^{(M)}$ は次の不等式を満たすという事

がわかった。

$$(7.23) \quad \|D_T \alpha_k^{(M)}\|^2 + \|\beta_k^{(M)}\|^2 \leq \text{const}(T) k^{2\nu}$$

これより容易に次の評価を得る。

$$(7.24) \quad \|\bar{u}_k^{(M)} - u_k^{(M)}\|, \|\bar{v}_k^{(M)} - v_k^{(M)}\| = O(k^\nu)$$

次に (7.6) で $m=M$ として Part (I) の結果を適用すれば

$$(7.25) \quad \|\bar{u}_k^{(M)} - u^{(M)}\|_1, \|\bar{v}_k^{(M)} - v^{(M)}\|_1 = O(k^\nu)$$

したがってまず次の評価を得る。

$$(7.26) \quad \|u_k^{(M)} - u^{(M)}\|, \|v_k^{(M)} - v^{(M)}\| = O(k^\nu).$$

最後に $\|u_k^{(M)} - u^{(M)}\|_1 = O(k^\nu)$ を示す。まず次の等式が成立する事はあきらかである。

$$(\partial(u_k^{(M)} - u^{(M)}), \partial\varphi_p) + (v_k^{(M)} - v^{(M)}, \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim N$$

したがって、 $\dot{u}_k^{(M)}$ と $\dot{u}^{(M)}$ の補内関数とすれば、 $u^{(M)} - \dot{u}_k^{(M)} = \varepsilon_k$

として

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial[u_k^{(M)} - u^{(M)}], \partial[u_k^{(M)} - \dot{u}_k^{(M)}]) + (v_k^{(M)} - v^{(M)}, u_k^{(M)} - \dot{u}_k^{(M)}) \\ &= (\partial[u_k^{(M)} - u^{(M)}], \partial[u_k^{(M)} - u^{(M)}]) + (\partial[u_k^{(M)} - u^{(M)}], \partial\varepsilon_k) \\ &\quad + (v_k^{(M)} - v^{(M)}, u_k^{(M)} - u^{(M)}) + (v_k^{(M)} - v^{(M)}, \varepsilon_k) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (7.27) \quad \|u_k^{(M)} - u^{(M)}\|_1 &\leq \|u_k^{(M)} - u^{(M)}\|_1 \cdot \varepsilon + \|v_k^{(M)} - v^{(M)}\| \cdot \|u_k^{(M)} - u^{(M)}\| \\ &\quad + \|v_k^{(M)} - v^{(M)}\| \cdot \varepsilon \\ &\leq [\varepsilon + \text{const.} \|v_k^{(M)} - v^{(M)}\|] \cdot \|u_k^{(M)} - u^{(M)}\|_1 \\ &\quad + \|v_k^{(M)} - v^{(M)}\| \end{aligned}$$

(7.26) を考慮してこの不等式を解けば

$$\|u_h^{(M)} - u^{(M)}\|_1 = O(h^2)$$

を得る。(証明終)

注意：補題6の定数 C' について。 α を正三角形 Δ の3つの重線の最小の長さとするれば、区分的に1次の basis を使ったとき次の評価が得まる [3]。

$$(7.28) \quad \frac{C'}{h} \leq \frac{\sqrt{48}}{\alpha}$$

注意：本稿では常に consistent mass タイプの近似と考えたが、

lumped mass タイプの近似に關してもほとんど同様の議論が得まる。詳しくは「8」を参照されたい。

文 献

1. Ritz, W., J. für Math., Bd. 135
2. Miyoshi, T., Kumamoto J. of Sci. Vol. 9 (1972)
3. Fujii, H., Tech. Rep., Univ. of Texas, CNA-34 (1971)
4. Ukai, S., C & A summer seminar report, Aug. (1971).
5. Zlámal, M., Numer. Math., 15 (1968)
6. Friedrichs, K.O. & Keller, H.B., Proceedings edited by Bramble (1966).
7. Smith, J., SIAM J. Numer. Anal., 5 (1968)
8. Miyoshi, T., C & A, Vol. 4 No. 12 (1972).