

2- Factorization in Finite Groups

愛教大 林 誠

p を素数、 G を有限群、 S を G の p でない p -部分群とする。
 G の部分群の族 $\mathcal{G}(S)$ を次の様に定義する：

$\mathcal{G}(S) \ni H \iff$ (1) S は H の p -Sylow 群 (2) $C_{p',E}(H) \leq C_p(H)$
 (3) H は $\text{Qd}(p)$ を involve しない。

問題 1. S を媒介として、 $\mathcal{G}(S)$ の元同士にはどんな関係があるか？ 特に、 $\mathcal{G}(S)$ に包含関係で最大元が存在するか？

問題 2. G と $\mathcal{G}(S)$ の関係は如何に？

これらの問題は Thompson, Glauberman 等に依り提唱され、主に彼等に依って、幾つかの目覚ましい結果が得られた。しかし、 $p=2$ に対する結果は未だに不十分であり、ここでは、その場合に關する結果を紹介する。

尚、最近新たに、条件(3)を除いて、 H 及び G の構造を考察する問題 "Failure of Factorizations", "Pushing up Theorems" が Glauberman, Ho, Aschbacher, Bauman, Niles 等に依り研究されている。

定義: π を素数の集合, X を有限群とするとき, $\mathcal{C}(X; \pi)$ は X に involve されるすべての π -部分群 D で, 次の性質を有するものを表わす. (α) $D \triangleright E$: 単純群, (β) $C_D(E) \subseteq E$
 (γ) D/E は π に属する或る素数 p ($2, 5$) に対し, 位数 $2p$ の 2 面体群を involve する。

定理: π を素数の集合, S を G の π でない 2-部分群とする。

仮定: $\pi \neq \forall T \subseteq S$ such that $T \triangleleft N_G(S)$

に対し,

(1) S は $N_G(T)$ の或る 2-Sylow 群の中で正規,

(2) $(N_G(T)/C_G(T) : \pi) = \phi$

このとき, S の π でない部分群 $W(S)$ で次の条件を満たすものが存在する,

(a) $W(S) \triangleleft N_G(S)$

(b) $W(S)O(H) \triangleleft H$

ここで, H は次の条件を満たす G の任意の可解部分群

(α) S は H の 2-Sylow 群

(β) H は $\Omega_d(2) (= S^4)$ -free

(γ) H は π -group

(注.1). 定理の条件(1)は S が G の或る 2-Sylow 群の中で正規なことは満たされる。

(注.2) $W(S)$ は H に依らない。

H が非可解の場合も、 $N_G(T)$ ($\exists \neq \forall T \subseteq S$ such that $T \trianglelefteq N_G(S)$) の単純組成因子を制限することに依り、同様の定理が成り立つ。

これより、次の定理を得る。

定理 (Glauberman): G を S^* -free な有限群とする。

このとき、 G の 2-Sylow 群は Strongly closed な可換群 (*) を含む。

系 (Glauberman Goldschmidt). G を S^* -free な有限単純群とすると、 G は Goldschmidt 群。