

双曲型方程式に対する混合問題の基本解 の singular supports について

京産大 理 辻 幹雄

§.1. 序. $quarter\ space$ において定数係数双曲型混合問題の基本解の singular support の構造について研究する。この課題に関しては Duff の基本的な論文 ([2]) がある。彼の結果は大変精密であるが、しかし理解するのに困難な点がある様に思われる。松村氏 ([4]) は L. Hörmander [3] 及び Atiyah-Bott-Gårding [1] により発展させられた "Localization theorem" を用いて、この問題を研究した。しかし彼は反射係数にあらわれる branch points における基本解の解析を試みなかったため、混合問題特有の現象 — lateral wave の存在 — は説明されていらない。ここでは branch point における解析を主眼とする。そのためには [1] における様な "局所化定理" では不十分であるので、それを更に一般化する。この点がこの報告の key point である。 (定理1)

§2. 記号及び基本解の表現. $\Omega = \{ (t, x, y) ; t > 0, x > 0, y \in \mathbb{R}^n \}$ とおく. Ω において次の問題を考える:

$$(2.1) \quad \begin{cases} P(D_t, D_x, D_y) u = 0 & \text{in } \Omega, \\ B_j(D_t, D_x, D_y) u = 0 & \text{on } \bar{\Omega} \cap \{x=0\} \\ & , j=1, 2, \dots, \mu, \\ (u, D_t u, \dots, D_t^{m-1} u) = (0, 0, \dots, i \delta_{(x-l, y)}) & \text{on } \bar{\Omega} \cap \{t=0\} \end{cases}$$

where i) $D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y = -i (\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n})$,
 ii) $l > 0$, iii) P and B_j ($j=1, 2, \dots, \mu$) are homogeneous differential operators of degree m and m_j ($j=1, 2, \dots, \mu$) with constant coefficients. $\square$ 2 次の仮定をおく.

(A.1) P は t -方向に strictly hyperbolic である。

(A.2) $x=0$ は P に対して non-characteristic である。

(A.3) 混合問題 (2.1) は ε -well posed である。

ε -well posedness については [5] において 必要十分条件が得られている。(t, x, y) の dual coordinates $\varepsilon (\sigma, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+2}$ とおき $\tau = \sigma - i\gamma$ ($\gamma > 0$) とおく. (A.1) より $P(\tau, \xi, \eta) = 0$ $\varepsilon \xi$ について解くと $\text{Im } \xi \neq 0$. (A.3) より $P(\tau, \xi, \eta) = 0$ の $\text{Im } \xi > 0$ の根の個数は μ 個である. 即ち境界条件の個数と一致する. ここで P を次の様に表現する:

$$\begin{aligned} P(\tau, \xi, \eta) &= \text{const.} \prod_{j=1}^{\mu} (\xi - \xi_j^+(\tau, \eta)) \cdot \prod_{j=1}^{m-\mu} (\xi - \xi_j^-(\tau, \eta)) \\ &= \text{const.} P_+(\tau, \eta; \xi) \cdot P_-(\tau, \eta; \xi), \quad (\text{Im } \xi_j^\pm \geq 0). \end{aligned}$$

$E_0(t, x, y; l)$ を $P(D_t, D_x, D_y)E_0 = \delta(t, x-l, y)$ in $\mathbb{R}^{n+2}$ の解とすると E_0 は次の様に表現出来る。

$$E_0(t, x, y; l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+2} \int_{\mathbb{R}^{n+2}} \frac{e^{i(t\tau + (x-l)\xi + y\eta)}}{P(z, \xi, \eta)} d\sigma d\xi d\eta.$$

u を (2.1) の解とし $u - E_0 = E_1$ とおくと $E_1(t, x, y; l)$ は

$$(2.2) \begin{cases} P(D_t, D_x, D_y) E_1 = 0 & \text{in } \Omega \\ B_j(D_t, D_x, D_y) E_1 = g_j & \text{on } \bar{\Omega} \cap \{x=0\}, j=1, 2, \dots, \mu, \\ (E_1, D_t E_1, \dots, D_t^{m-1} E_1) = (0, 0, \dots, 0) & \text{on } \bar{\Omega} \cap \{t=0\} \end{cases}$$

を満たす。上の式における g_j は次の様に表わされる：

$$g_j = - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+2} \int_{\mathbb{R}^{n+2}} \frac{B_j(z, \xi, \eta) e^{i(t\tau - l\xi + y\eta)}}{P(z, \xi, \eta)} d\sigma d\xi d\eta.$$

一方

$$P(D_t, D_x, D_y) E_1 = 0 \quad \text{in } \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, x > 0\}$$

を満足する temperate distribution E_1 は次の様に書ける：

$$E_1 = \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(c_j \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} \frac{\xi^{j-1} e^{ix\xi}}{P_+(z, \eta; \xi)} d\xi \right) e^{i(t\tau + y\eta)} d\sigma d\eta$$

where Γ_+ is a simple closed path containing all $\xi_i^+(z, \eta)$.

これを (2.2) に代入し、境界条件を考慮して $c_j(z, \eta)$ を求めると、

$$c_j = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{R_{jk}(z, \eta) g_k}{R(z, \eta)} = - \sum_{k=1}^{\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{R_{jk}(z, \eta) B_k(z, \xi', \eta) e^{-il\xi'}}{R(z, \eta) P_+(z, \eta; \xi')} d\xi'$$

where

$$L(z, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} \frac{B_j(z, \xi, \eta) \xi^{k-1}}{P_+(z, \eta; \xi)} d\xi \right]_{1 \leq j, k \leq \mu},$$

$$R(z, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \det L(z, \eta),$$

$$R_{jk}(z, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} (k, j)\text{-cofactor of } L(z, \eta).$$

従って $E_1(t, x, y; l)$ は次の様に表現出来る。

$$(2.3) \quad E_1 = \sum_{j,k=1}^{\mu} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n+3} \int_{\mathbb{R}^{n+3}} \frac{R_{jk}(z, \eta) \xi^{j-1} B_k(z, \xi', \eta) e^{i(tz + x\xi + y\eta - l\xi')}}{R(z, \eta) P_+(z, \eta; \xi) P(z, \xi', \eta)} d\sigma d\xi d\eta d\xi'.$$

$\text{sing supp } E_0$ の位置は既に良く知られているので、 $\text{sing supp } u$ を調べる為には $\text{sing supp } E_1$ を調べれば良い。

§ 3. Localization theorem.

$P_0 = (\sigma_0, \xi_0, \eta_0, \xi'_0) \in \mathbb{R}^{n+3}$ の任意の点とする。

$\exp \{-is(t\sigma_0 + x\xi_0 + y\eta_0 - l\xi'_0)\} \times$

$E_1(t, x, y; l)$ を S について漸近展開する。そのために、まず

$P(z, \xi, \eta) = 0$ の根 ξ の性質について調べる。

$P(z, \xi, \eta) = 0$ の ξ に関する終結式 $\in D(z, \eta)$ とかく。

$P(z, \xi, \eta) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i(\xi, \eta))$ とかくと P は strictly hyperbolic なのを $i) \lambda_i(\xi, \eta) \neq \lambda_j(\xi, \eta)$

if $i \neq j$ and $(\xi, \eta) \neq 0$, $ii) \lambda_i(\xi, \eta)$ は degree 1 の有次函数で

$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ で analytic である。従って、 $P(\sigma_0, \xi_0, \eta_0) = 0$,

$0 \neq (\sigma_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ とすると $\sigma_0 = \lambda_k(\xi_0, \eta_0)$ を満足す

る λ_k が unique に存在する。このとき $P(\sigma_0 + r\tau, \xi, \eta_0 + r\eta) = 0$

ε について解き、 $r=0$ のとき ε_0 となる根 $\varepsilon = \varepsilon(z, \eta; r)$ とおく。まずこの ε の $r=0$ の近傍における挙動を考察する。

[Case 1] $D(\sigma_0, \eta_0) \neq 0$ の場合。 $P(\sigma_0, \varepsilon, \eta_0) = 0$ の ε に関する根はすべて異なっているため $\varepsilon(r)$ は $r=0$ の近傍で analytic であり、かつ $\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}(\sigma_0, \varepsilon_0, \eta_0) \neq 0$ なので $\frac{\partial \lambda_k}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_0, \eta_0) \neq 0$ となる。このとき次の Lemma を得る。

Lemma 1. $\varepsilon(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z, \eta) r^k$ と展開すると

$$\begin{aligned} a_1(z, \eta) &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}(\sigma_0, \eta_0) \tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta_j}(\sigma_0, \eta_0) \eta_j \\ &= \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_0, \eta_0) \right)^{-1} \left(\tau - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_i}(\varepsilon_0, \eta_0) \eta_i \right). \end{aligned}$$

(証明の方針) $\varepsilon(r)$ を直接 $P(\sigma_0 + r\tau, \varepsilon, \eta_0 + r\eta) = 0$ に代入し r の係数を比較すれば得られる。

Lemma 2. $R(\sigma_0 + r\tau, \eta_0 + r\eta)$ も $r=0$ の近傍で analytic となり、 $R = \left(\sum_{k=0}^{\infty} R_k(z, \eta) r^k \right) r^{p_0}$ ($p_0 \geq 0$) と展開すると $R_0(z, \eta)$ は degree p_0 の hyperbolic polynomial となる。

(証明の方針) $\varepsilon(r)$ が $r=0$ の近傍で analytic なので、 R の表現式より $R(\sigma_0 + r\tau, \eta_0 + r\eta)$ もそのような事は明らかであろう。 $R_0(z, \eta)$ が degree p_0 の齊次多項式となる。更に仮定 (A.3) より「 $R(z, \eta) \neq 0$ かつ $\forall \tau = \sigma - i\delta$ ($\delta > 0$), $\forall (\sigma, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 」であり $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-p_0} R(\sigma_0 + r\tau, \eta_0 + r\eta) = R_0(z, \eta)$ なので、

Rouché の定理より $R_0(z, \eta) \neq 0$ for $\forall z = \sigma - i\gamma (\gamma > 0)$, $(\sigma, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ となる。従って $R_0(z, \eta)$ は z -方向に関して hyperbolic となる。

[Case 2] $D(\sigma_0, \eta_0) = 0$ の場合. $\xi_0 \in P(\sigma_0, \xi, \eta_0) = 0$ の多重根とすると $P(z, \xi, \eta)$ は次の様に表現出来る。

$$(3.1) \quad P(z, \xi, \eta) = \{ (\xi - \xi_0)^{m_1} + b_1(z, \eta)(\xi - \xi_0)^{m_1-1} + \dots + b_{m_1}(z, \eta) \} \\ \times P_1(z, \eta; \xi) \\ \equiv P_0(z, \eta; \xi) P_1(z, \eta; \xi) \quad (m_1 \geq 2)$$

where i) $b_i(\sigma_0, \eta_0) = 0$ and $b_i(z, \eta)$ is analytic in a nbd of (σ_0, η_0) , ii) $P_1(\sigma_0, \eta_0; \xi_0) \neq 0$. しかし、 $P_1(\sigma_0, \eta_0; \xi) = 0$ は ξ_0 以外の real multiple roots を持つ可能性はある。従って $\xi(z, \eta; 0) = \xi_0$ を満たす $P(\sigma_0 + rz, \xi, \eta_0 + r\eta) = 0$ の根の数は m_1 である。それらを $\xi_1(z, \eta; r), \dots, \xi_{m_1}(z, \eta; r)$ と記す。

Lemma 3. $\xi_i(z, \eta; r) \in \mathbb{C}$ に関して $\xi_i = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z, \eta) r^{\frac{k}{m_1}}$ と Puiseux 展開すると、次の事実が成立する。

$$i) \quad c_1(z, \eta) = \text{const.} \left(z - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_j}(\xi_0, \eta_0) \eta_j \right)^{\frac{1}{m_1}},$$

ii) 任意の $C_k(z, \eta)$ に対して ある整数 $p \in \mathbb{N}$ 適当にとれば $c_1(z, \eta)^p \times C_k(z, \eta)$ は (z, η) の多項式となる。

(証明の方針)

i) $\xi_i(z, \eta; r) \in P(\sigma_0 + rz, \xi, \eta_0 + r\eta) = 0$ に代入して r の係数を比較する。その際、 $b_i(\sigma_0 + rz, \eta_0 + r\eta)$ が $r=0$ の近傍

で正則であるという事実を考慮すれば、結局

$$(3.2) \quad C_1(\tau, \eta)^{m_1} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{m_1}}{\partial \eta_j}(\sigma_0, \eta_0) \eta_j + \frac{\partial b_{m_1}}{\partial \tau}(\sigma_0, \eta_0) \tau = 0$$

を得る。(3.1) より

$$\frac{\partial b_{m_1}}{\partial \tau}(\sigma_0, \eta_0) = \frac{\frac{\partial P}{\partial \tau}(\sigma_0, \xi_0, \eta_0)}{P_1(\sigma_0, \xi_0, \eta_0)}, \quad \frac{\partial b_{m_1}}{\partial \eta_j}(\sigma_0, \eta_0) = \frac{\frac{\partial P}{\partial \eta_j}(\sigma_0, \xi_0, \eta_0)}{P_1(\sigma_0, \xi_0, \eta_0)}$$

より、この事実を (3.2) に代入すれば

$$C_1(\tau, \eta)^{m_1} = \text{const.} \left(\tau - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{k_i}}{\partial \eta_j}(\xi_0, \eta_0) \eta_j \right)$$

$$\neq 0 \quad \text{for } \tau = \sigma - i\delta \quad (\delta > 0).$$

これより i) が得られた。

以下同様に $P(\sigma_0 + r\tau, \xi_i(r), \eta_0 + r\eta) = 0$ を γ について展開したときの γ の中の係数を 0 とおけば ii) が得られる。(終)

Lemma 4. $P(\sigma_0, \xi, \eta_0) = 0$ を ξ について解いたとき、real multiple roots を $\xi_1^0, \dots, \xi_q^0$, その多重度を $m_1, \dots, m_q$ とおく。更に $\sigma_0 = \lambda_{k_i}(\xi_i^0, \eta_0)$ とおく。 $R(\sigma_0 + r\tau, \eta_0 + r\eta)$ を γ に関して $R = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\tau, \eta) \gamma^{p_k}$ ($p_0 < p_1 < \dots < p_n < \dots$) と Puiseux 展開すれば

i) $R_0(\tau, \eta) = \sum_{\deg Q_\beta + \sum_{i=1}^q \frac{\beta_i}{m_i} = p_0} Q_\beta(\tau, \eta) \prod_{i=1}^q \left(\tau - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{k_i}}{\partial \eta_j}(\xi_i^0, \eta_0) \eta_j \right)^{\frac{\beta_i}{m_i}}$

where Q_β is polynomial and $\beta_i \geq 0$. 更に次の事実が従う:

ii) $R_0(\tau, \eta) \neq 0$ for $\forall \tau = \sigma - i\delta$ ($\delta > 0$), $\forall (\sigma, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(証明の方針) [Lemma 3]において得られた結果を R の表現式に代入して、 τ について展開すれば i) が得られる。この際、 $p_0, p_1, p_2, \dots$ は有理数となる。ii) は Lemma 2 の証明と同様に Rouché の定理を使えばよい。(終)

Remark z, τ で更に次の仮定を設ける。

(A.4) $P(\sigma, \varepsilon, \tau) = 0$ が ε_0 に関して解いたとき実多重根が存在するとき、その多重根の個数は高々一つである。

すると [Lemma 4] において $R_0(z, \tau)$ は次の様に表現出来る:

$$R_0(z, \tau) = r_0(z, \tau) \left(\tau - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_j}(\varepsilon_0, \tau_0) \eta_j \right)^\beta$$

where $r_0(z, \tau)$ is hyperbolic with respect to τ . この式において ε_0 は $P(\sigma_0, \varepsilon_0, \tau_0) = 0$ を満たす実多重根であり、 λ_k は $\sigma_0 = \lambda_k(\varepsilon_0, \tau_0)$ を満たす。即ち仮定 (A.4) により $R_0(z, \tau)$ の表現が美しくなる。しかし、以下に述べる [定理 1] の証明には (A.4) は不要である。

Seidenberg の補題により $R(z, \tau)^{-1}$ を次の様に評価出来る。

Lemma 5. p_0 を Lemma 2 及び Lemma 4 に現れる p_0 とする。すると次の様な評価が成り立つ。

$$\sup_{0 < r < r_0} \left| \tau^{-p_0} R(\sigma_0 + r\tau, \tau_0 + r\tau) \right|^{-1} \leq K (|\tau| + |\tau_0|)^\beta$$

where r_0 and β are constant independent of (τ, τ_0) and r .

最後に distributions に関する公式を 1 つ述べておく。

Lemma 6. $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 1, 2, \dots, n, \dots$ とすると

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\tau - \sum_{j=1}^n a_j \eta_j\right)^\alpha e^{i(t\tau + y\eta)} d\sigma d\eta = \frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{\Gamma(-\alpha)} t_+^{-1-\alpha} \cdot \delta(y + ta)$$

where $t_+^k = t^k$ for $t > 0$, and $= 0$ for $t < 0$.

以上の準備のもとに $E_1(t, x, y; l)$ を局所化する事を試みる。

$$\begin{aligned} & e^{-is(t\sigma_0 + x\xi_0 + y\eta_0 - l\xi'_0)} E_1(t, x, y; l) \\ &= s^{-m-1} \sum_{j,k=1}^{\mu} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+3} \int_{\mathbb{R}^{n+3}} \frac{R_{jk}(\sigma_0 + r\tau, \eta_0 + r\eta) (\xi_0 + r\xi)^{j-1} B_k(\sigma_0 + r\tau, \xi'_0 + r\xi', \eta_0 + r\eta)}{R(\sigma_0 + r\tau, \eta_0 + r\eta) P_+(\sigma_0 + r\tau, \eta_0 + r\eta; \xi_0 + r\xi)} \\ & \quad \times \frac{e^{i(t\tau + x\xi + y\eta - l\xi')}}{P(\sigma_0 + r\tau, \xi'_0 + r\xi', \eta_0 + r\eta)} d\sigma d\xi d\eta d\xi' \\ &\equiv s^{-m-1} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+3} \int_{\mathbb{R}^{n+3}} G(\sigma_0 + r\tau, \xi_0 + r\xi, \eta_0 + r\eta; \xi'_0 + r\xi') \\ & \quad \times e^{i(t\tau + x\xi + y\eta - l\xi')} d\sigma d\xi d\eta d\xi' \end{aligned}$$

($\gamma = 1/s$) とおく。Lemma 1 ~ Lemma 4 を用いて $G \in \gamma$ について展開する。($(\sigma_0, \xi_0, \eta_0, \xi'_0) = P_0$ は $P(\sigma_0, \xi_0, \eta_0) = P(\sigma_0, \xi'_0, \eta_0) = 0$ を満たす方針にとりてある。真 P_0 がこの性質を持ちぬとき P_0 で局所化したも無駄であるから。) すると

$$(3.2) \quad G(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{G_k(\tau, \xi, \eta, \xi')}_{; P_0} \gamma^{\beta_k}, \quad \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$$

と展開出来る。

$D(\sigma_0, \eta_0) \neq 0$ のとき β_i は整数であり、 $D(\sigma_0, \eta_0) = 0$ のとき β_i は有理数である。超函数 $F_k(t, x, y, l; P_0)$ を次の様に定義する：

$$(3.3) \quad F_k = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+3} \int_{\mathbb{R}^{n+3}} G_k(\tau, \xi, \eta, \xi'; P_0) e^{i(t\tau + x\xi + y\eta - l\xi')} d\sigma d\xi d\eta d\xi'$$

ここで $e_k = -m-1-\beta_k$ とおき、[Lemma 5] を用いると、次の定理1を得る。

定理 1. 1) 任意の点 $P_0 = (\sigma_0, \xi_0, \eta_0, \xi'_0) \in \mathbb{R}^{n+3}$ に対して $\exp\{-is(t\sigma_0 + x\xi_0 + y\eta_0 - l\xi'_0)\} E_1$ を次の様に漸近展開する事が出来る:

$$(3.4) \quad e^{-is(t\sigma_0 + x\xi_0 + y\eta_0 - l\xi'_0)} E_1(t, x, y, l) \sim \sum_{j=0}^{\infty} F_j(t, x, y, l; P_0) s^{e_j}$$

which has the following property: For every integer N the error

$$(3.5) \quad s^{-e_N} \left(e^{-is(t\sigma_0 + x\xi_0 + y\eta_0 - l\xi'_0)} E_1 - \sum_{j=0}^{N-1} F_j(t, x, y, l; P_0) s^{e_j} \right)$$

tends to F_N in $\mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_+^1)$ when $s \rightarrow +\infty$.

$$2) \quad \text{sing supp } E_1 \supset \bigcup_{P_0 \in \mathbb{R}^{n+3}} \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } F_j(t, x, y, l; P_0).$$

Remark 1 ここまでの結果を得るためだけならば、仮定

(A.1) のかわりに 更に弱い条件 (A.1)' で置き換える事が出来る。

$$(A.1)' \quad P = \prod_{i=1}^r P_i(\tau, \xi, \eta) \quad \text{where } P_i \text{ is strictly hyperbolic.}$$

Remark 2 Cauchy problem においては $\text{sing supp } E$ (E

は基本解) を下から評価するものとして $\text{supp } F_0$ しか考慮

しなかった。そして十分とは言えないが 相当な成果をあげた。

しかし混合問題においては $\text{supp } F_0 \neq \text{supp } F_j$ ($j \geq 1$)

となる場合が起こる。従って、他の F_j の support を考慮す

る必要が生じる。そしてこの事実により双曲型混合問題特有の現象——側面波の存在——が説明出来るのである。

最後に F_j を具体的に計算する。

§4. Lateral waves.

$F_j \neq 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_+^1)$ を満たす F_j が存在したと仮定する。
 すると点 $P_0 = (\sigma_0, \varepsilon_0, \eta_0, \varepsilon'_0) \in \mathbb{R}^{n+3}$ は $P(\sigma_0, \varepsilon_0, \eta_0) = P(\sigma_0, \varepsilon'_0, \eta_0) = 0$ という性質を持たねばならぬ。そこで
 $\sigma_0 = \lambda_{k_1}(\varepsilon_0, \eta_0)$, $\sigma_0 = \lambda_{k_2}(\varepsilon_0, \eta_0)$ とおく。すると

$$P(\sigma_0 + r\tau, \varepsilon_0 + r\varepsilon, \eta_0 + r\eta) = \text{const} \left(\tau - \langle \text{grad}_{(\varepsilon, \eta)} \lambda_{k_1}(\varepsilon_0, \eta_0), (\varepsilon, \eta) \rangle \right) r + O(r^2)$$

となるので G_j は一般的に次の様に表現出来る：

$$(4.1) \quad G_j = \frac{H_j(\tau, \varepsilon, \eta, \varepsilon')}{R_0(\tau, \eta)^{\alpha_j} \left(\tau - \langle \text{grad}_{(\varepsilon, \eta)} \lambda_{k_1}(\varepsilon_0, \eta_0), (\varepsilon, \eta) \rangle \right)^{\beta_j} \left(\tau - \langle \text{grad}_{(\varepsilon', \eta)} \lambda_{k_2}(\varepsilon'_0, \eta_0), (\varepsilon', \eta) \rangle \right)^{\gamma_j}}$$

$$\text{where} \quad \langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

$$j=0 \text{ のときは} \quad \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 1 \quad \text{かつ}$$

$$H_0 = \text{const.} \sum_{j, k=1}^{\mu} R_{jk}(\sigma_0, \eta_0) \varepsilon_0^{j-1} B_k(\sigma_0, \varepsilon'_0, \eta_0) \quad \text{となる。}$$

従って (3.3) で def. される G_j の逆 Laplace-Fourier 像 F_j が $\mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_+^1)$ で 0 でないためには

$$(4.2) \quad \partial_\varepsilon \lambda_{k_2}(\varepsilon'_0, \eta_0) > 0 \quad \text{かつ} \quad \partial_\varepsilon \lambda_{k_1}(\varepsilon_0, \eta_0) \leq 0$$

でなければならぬ。

[Case I] $D(\sigma_0, \eta_0) \neq 0$ のとき, ε_0 は多重根でないのて。

$\partial \varepsilon \lambda_{k_1}(\varepsilon_0, \eta_0) < 0$ である。更に $R_0(z, \eta)$ は hyperbolic polynomial, H_j は多項式となるので F_j を計算する事は難しくない。

[Case II] $D(\sigma_0, \eta_0) = 0$ のとき。 $P_0 = (\sigma_0, \varepsilon_0, \eta_0, \varepsilon'_0)$ で E_1 を局所化する際、 ε_0 を $P(\sigma_0, \varepsilon, \eta_0) = 0$ の多重根でない様にとる。そして、実多重根を ε_0 とおき、 λ_j を $\sigma_0 = \lambda_j(\varepsilon_0, \eta_0)$ を満たす様にとる。すると $R_0(z, \eta)$, $H_j(z, \varepsilon, \eta, \varepsilon')$ に Lemma 3 で述べた様な branch point が現れる。Lemma 6 により branch point も singularity の派生源となる事が判つてゐるので、かかる特異点の扱い方が問題となる。

今後、簡単のため 仮定 (A.4) (Page 8 にある) の下で考える。すると $P(\sigma_0, \varepsilon, \eta_0) = 0$ を満たす多重根は ε_0 だけである事がわかる。従つて R_0 は次の様に表現出来る。

$$(4.3) \quad R_0(z, \eta) = r_0(z, \eta) \left(\tau - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda_j}{\partial \eta_i}(\varepsilon_0, \eta_0) \eta_i \right)^\alpha \quad (\alpha \geq 0).$$

更に (4.1) における H_j も (多項式) $\times \left(\tau - \sum_{i=1}^n \partial \eta_i \lambda_j(\varepsilon_0, \eta_0) \eta_i \right)^{\alpha'}$ (α' は有理数) と表現出来る事がわかる。故に G_j は一般的に

$$(4.1)' \quad G_j = \frac{K_j(z, \varepsilon, \eta, \varepsilon') \left(\tau - \sum_{i=1}^n \partial \eta_i \lambda_j(\varepsilon_0, \eta_0) \eta_i \right)^{\mu_j}}{r_0(z, \eta)^{\kappa_j} \left(\tau - \langle \text{grad } \lambda_{k_1}(\varepsilon_0, \eta_0), (\varepsilon, \eta) \rangle_{(\varepsilon, \eta)} \right)^{\beta_j} \left(\tau - \langle \text{grad } \lambda_{k_2}(\varepsilon'_0, \eta_0), (\varepsilon', \eta) \rangle_{(\varepsilon', \eta)} \right)^{\gamma_j}}$$

where K_j is polynomial と表現出来る。

$$T_{\pi_j}(t, y) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{e^{i(tz+y\eta)}}{r_0(z, \eta)^{\kappa_j}} d\sigma d\eta$$

かつ $\mu_j \neq 1, 2, \dots$

とおくと $\gamma_j > 0$ のとき ($\gamma_j = 0$ ならば $F_j \equiv 0$ となる)

$$(4.4) \quad F_j(t, x, y, l) = \text{const } K_j(D_t, D_x, D_y, -D_l) \left\{ \left(t_+^{-1-\mu_j} \delta_{(x, y) + t \text{grad}_{(\xi, \eta)} \lambda_j(\xi_0, \eta_0)} \right)_{(t, x, y)}^* \right. \\ \left. \left(t_+^{-1+\beta_j} \delta_{(x, y) + t \text{grad}_{(\xi, \eta)} \lambda_{k_1}(\xi_0, \eta_0)} \right)_{(t, x, y)}^* \left(T_{x_j}(t, y) \otimes \delta_x \right) \right\} (t - a_0 l, 0, y + l a)$$

where $a_0 = (\partial_{\xi} \lambda_{k_2}(\xi_0', \eta_0))^{-1}$, $a = a_0 \text{grad}_{\eta} \lambda_{k_2}(\xi_0', \eta_0)$.

と存在。そして定理1より

$$(4.5) \quad \text{sing supp } E_1 \supset \text{supp } F_j, \quad j=0, 1, 2, \dots,$$

が成立している。

(4.4), (4.5) により lateral wave について説明する。簡単のため $r_0(\tau, \eta) = \text{constant}$ の場合を考える。すると (4.4) において $T_{x_j}(t, y) \otimes \delta_x$ の部分はなくなる。従って

$$(4.6) \quad \text{supp } F_j = S_1 + S_2 \equiv \{ (t_1 + t_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2); \\ (t_i, x_i, y_i) \in S_i, i=1, 2 \}$$

where $S_1 = \{ \partial_{\eta_i} \lambda_j(\xi_0, \eta_0)(t - a_0 l) + y_i + a_{il} l = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \\ x=0, t - a_0 l > 0 \}$ and $S_2 = \{ \partial_{\eta_i} \lambda_{k_1}(\xi_0, \eta_0)(t - a_0 l) + y_i + a_{il} l = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), t - a_0 l > 0, \partial_{\xi} \lambda_{k_1}(\xi_0, \eta_0)(t - a_0 l) + x = 0 \}$.

点 $(0, l, 0)$ に擾乱を与えたとき $-a_0^{-1}(1, a)$ の方向に進んだ波が壁 $x=0$ に衝突後生じた反射波に相当するのが上記の S_2 である。(4.5) は反射波だけでなく、他の wave 「 $S_1 + S_2$ 」が生じる事を意味している。これを lateral wave 又は branch wave 又は conical wave と言う。

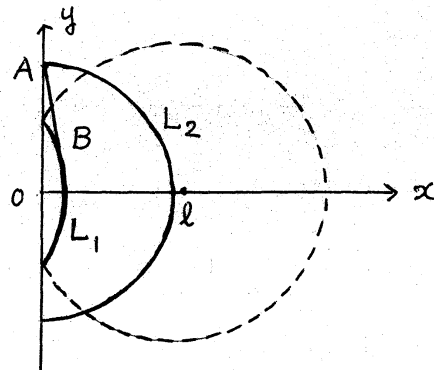
Remark. いつも lateral wave が現われるかというところではない。たとえば $(4.1)'$ において lateral wave が生ずる原因となる項 $(\tau - \sum \alpha_{2i} \lambda_j(\xi_0, \eta_0) \eta_i)^{\mu_j}$ ($\mu_j \neq 1, 2, \dots, m, \dots$) が現われるときはいつも $\gamma_j = 0$ となる場合がある。かかる場合は lateral wave は生じない。しかし S_2 に対応する反射波はいつも現れる。

例 1
$$\begin{cases} P = (D_t^2 - D_x^2 - D_y^2)(a^2 D_t^2 - D_x^2 - D_y^2) & (a > 1) \\ B_1 = 1, & B_2 = D_x \end{cases}$$

の場合について考えてみる。この場合 $R(\tau, \eta) = -1$ なので一様ロパチンスキー条件を満たしているので L^2 -well posed である。 $\sigma_0 = 1$, $\xi_0 = -\sqrt{a^2 - 1}$, $\eta_0 = 1$, $\xi'_0 = \sqrt{a^2 - 1}$ で E_1 を局所化する。即ち定理 1 の様に $\exp\{-is(\tau\sigma_0 + x\xi_0 + y\eta_0 - l\xi'_0)\} \times E_1(\tau, x, y, l)$ を S について漸近展開し、各 F_j を求める。

$$G_1 = \frac{\text{const.} \sqrt{2(\tau - \eta)}}{(a^2 \tau + \sqrt{a^2 - 1} \xi - \eta)(a^2 \tau - \sqrt{a^2 - 1} \xi' - \eta)}$$

となるので lateral wave が生ずる。右図は伝播速度の違い波が壁に衝突したとき (実線) の反射の状態を表わしたものである。実線で示した



L_1 及び L_2 は反射波である。 L_2 と $x=0$ との交点を A とし、
 A から L_1 に接線を引いたとき、その接点を B とする。 $\text{supp } F_1$
を計算する事により 線分 AB は $\text{sing supp } E_1$ に含まれる事が判
る。 この線分 AB に対応する wave の事を lateral wave 又は
conical wave 又は branch wave と呼ぶのである。

例 2. $P = (D_t^2 - D_x^2 - D_y^2) (a^2 D_t^2 - D_x^2 - D_y^2) \quad (a > 1)$

とおく。

- i) $\{B_1=1, B_2=D_x^2\}, \{B_1=D_x, B_2=D_x^3\}$ の場合は lateral
wave は生じない。
- ii) $\{B_1=1, B_2=D_x\}, \{B_1=D_x, B_2=D_x^2\}, \{B_1=1, B_2=D_x^3\}$
の場合、lateral wave は起る。

References

- [1] Atiyah-Bott-Gårding : Lacunas for hyperbolic
differential operators with constant coefficients. I.
Acta Math., 124 (1970), p. 109 ~ 189.
- [2] G. F. D. Duff : On wave fronts, and boundary waves.
Comm. Pure Appl. Math., vol. 17 (1964), p. 189 - 225.
- [3] L. Hörmander : On the singularities of solutions of
partial differential equations. Comm. Pure Appl.
Math., vol. 23 (1970), p. 329 - 358.

- [4] M. Matsumura : Localization theorem in hyperbolic mixed problems. Proc. Japan Academy, 47 (1971), p. 115-119.
- [5] R. Sakamoto : E-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients.
J. Math. Kyoto Univ., vol. 14 (1974), p. 93-118,
- [6] M. Tsuji : Analyticity of solutions of hyperbolic mixed problems. J. Math. Kyoto Univ., vol. 13 (1973), 323-371.
- [7] ——— : Fundamental solutions of mixed problems for hyperbolic equations with constant coefficients.
(To appear in Proc. Japan Academy, 1975).