

Automorphisms of Polynomial and Powerseries Rings

コーネル大 M.E. スウィドラー (M. E. Sweedler)

数年間、私は Jacobian conjecture に興味を持っていた。

この予想は次の様なものである。 A を標数 0 の体上の $n (< \infty)$ 変数多項式環 $F: A \rightarrow A$ を代数射としたとき

F は A の自己同形射 $\Leftrightarrow J(F)$ は零でない基礎体の元。

$J(F)$ はヤコビアン行列の行列式であり、ヤコビアン行列は、 $F(x_i) = F_i(x_1, \dots, x_n)$ のとき、各成分が A の元である下記の $n \times n$ 行列をいう。

$$J(F) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \text{ によって、} J(F) \in A.$$

F が自己同形射のときに、 $J(F)$ が零でない基礎体の元であることは簡単に証明できる。 よって、Jacobian

conjecture は “ $\Leftarrow$ ” の向きを示すことであり、それが前に

“ $\Rightarrow$ ” と書いた理由である。 1 変数の場合には簡単に証

明できるが、2 変数以上の場合にはまだ知られていない

! A の可逆元は基礎体の零でない元のみであるので、

線型代数から、Jacobian conjecture は次と同値である。

F は A の自己同形射 $\Leftrightarrow J(F)$ は逆行列を持つ。

$J(F)$ は逆行列 $L = (l_{ij})$ を持つとせよ。 l_{ij} は A の元である。

偏導関数 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ の代わりに ∂_i と書く。 $a \in A$ に対して、導関数 $a\partial_i$ を次の様に定義する。

$$(a\partial_i)(b) = a \partial_i(b)$$

また、 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ は次の行列による関係式で、定義される導関数とする。

$$L \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{つまり、} \varepsilon_i = \sum l_{ij} \partial_j.$$

INVERSION FORMULA によつて ある条件のもとで ε_i を使って F^{-1} をあらわすことができる。

$$F^{-1}(a) = \sum_{0 \leq u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}} \underbrace{(x_1 - F_1)^{u_1} \cdots (x_n - F_n)^{u_n}}_{\text{これと } (x-F)^u \text{ と書く。}} \underbrace{\frac{\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_n^{u_n}}{u_1! \cdots u_n!}}_{\text{分子は関数 } \varepsilon_i \text{ の合成を示す。つまり}} (a)$$

上記の n 組を $u \in |\mathbb{Z}|^n$ と書く。

ただし $|\mathbb{Z}| = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 0\}$

分子は関数 ε_i の合成を示す。つまり

$$\underbrace{\varepsilon_1 \circ \cdots \circ \varepsilon_1}_{u_1 \text{ 回}} \cdots \underbrace{\varepsilon_n \circ \cdots \circ \varepsilon_n}_{u_n \text{ 回}}$$

これを $\frac{\varepsilon^u}{u!}$ と書く。

WHEN IS THE SUMMATION IN THE INVERSION FORMULA WELL DEFINED?

Definition: E_i が A 上 locally nilpotently に作用するとは、それぞれ $\alpha \in A$ に対して、 $E_i^m(\alpha) = 0$ となる m (α による) が存在するときという。 E_i が A 上 locally finitely に作用するとは、それぞれの $\alpha \in A$ に対して、下記の条件を満たす A の 有限次元部分空間 V が存在するときいう。

$$\alpha \in V \text{ and } E_i(V) \subseteq V$$

明らかに、local nilpotence $\Rightarrow$ local finiteness。

次にいくつかの $\{E_i\}$ の性質をあげる。

PROPERTIES

- ① $E_i E_j = E_j E_i$ すべての i, j に対して
- ② もし F が自己同形射ならば、すべての i に対して
 $E_i = F \circ \partial_i \circ F^{-1}$ よって、 ∂_i の locally nilpotently によって、 E_i も locally nilpotently に作用している。
- ③ もし E_i が locally finitely に作用しているならば、 E_i は locally nilpotently に作用している。
- ④ もし、すべての i に対して E_i が locally nilpotently に作用しているならば、 F は automorphism である。

②と④は最初、私たちと違った方法で、David Wright 氏によって示された。彼が与えた定理:

(*) F は A の自己同型射 $\Leftrightarrow J(F)$ は逆行列を持ち、すべての i について、 E_i は locally

$nilpotently$ に作用する。

すべての i について、 ε_i が $locally nilpotent$ のときは、Inversion Formula における和は、有限個を除いて、項は 0 となるので well defined である。この場合、Inversion Formula は正しい。 事実、 F^{-1} を定義するのに使うことができ、また Wright 氏が与えた(*) における “ $\Leftarrow$ ” 向きの証明と違った証明を与えるのに使える。

Inversion Formula はベキ級数環の場合、標数が正の場合にと、一般化される。

POWERSERIES RINGS:

A を標数 0 の体上の n 変数のベキ級数環、 $F: A \rightarrow A$ を代数射とする。もし I が A の極大イデアルの場合、 $F^{-1}(I)$ は極大イデアルとなり、 $F^{-1}(I) = I$ である。よって、 $F_j = F(x_j) \in I$ 、すべての j に対して。ヤコビアン行列 $J(F)$ は前と同じ様に定義される。定数項が零でないベキ級数は可逆であるので、 $J(F)$ が逆行列 (前と同じ様に L で表わす。) を持つことと、 $|J(F)|$ が零でない定数項を持つことと同値である。 $J(F)$ が逆行列を持つとき、前と同様に $\{\varepsilon_i\}$ を定義する。“ $(x-F)$ ” がどんどんと、高い乗数の I^m に属していくので、Inversion

Formula における和は収束する。 Inversion Formula は べき級数環では正しい。(local nilpotence の条件は、必要ない。) もし Inversion Formula を F^{-1} を定義するのに使えば、べき級数環における " $\leq$ " 向きの今までの証明とは 違った証明 を得る。

F は A の自己同形射 $\Leftrightarrow J(F)$ は逆行列を持つ。

すべての ε_i が、well defined である: とと、 F が自己同形射である: とは同値である。この場合、すべての i に対して、 $\varepsilon_i = F \circ \partial_i \circ F^{-1}$ であり、これから簡単に、 $\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i$ がわかる。よって、多項式環における PROPERTIES ①②と同じ様な結果をべき級数環についても得る。

POLYNOMIALS POWERSERIES OVER GENERAL RINGS, INCLUDING POSITIVE CHARACTERISTIC;

Inversion Formula における困難な点は " $\varepsilon_i / i!$ " の分母 " $i!$ " である。しかしながら、偏導関数 $\{\partial_i\}$ に対して、次の様に定義するのは自然である。

$$\left(\frac{\partial_i^l}{l!} \right) (x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}) = \begin{cases} 0 & (l > e_i \text{ のとき}) \\ \text{もしくは} \\ \binom{e_i}{l} x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i-l} \cdots x_n^{e_n} \end{cases}$$

上記は、標数が0の場合も正しい。 $\left(\frac{\partial^0}{e!}\right)$ は形式的記号であり、正標数の場合は $\frac{\partial^e}{e!}$ の様に計算されないで、“ $\frac{\partial^e}{e!}$ ”のまわりをまるくかいた。

$v = (v_1, \dots, v_n) \in |\mathbb{Z}|^n$ に対して、

$$\left(\frac{\partial^v}{v!}\right) = \left(\frac{\partial_1^{v_1}}{v_1!}\right) \circ \left(\frac{\partial_2^{v_2}}{v_2!}\right) \circ \dots \circ \left(\frac{\partial_n^{v_n}}{v_n!}\right)$$

と定義する。 $\left\{\left(\frac{\partial^v}{v!}\right)\right\}_{v \in |\mathbb{Z}|^n}$ は、 $a, b \in A$ に対して、Leibniz identity を満足する。

$$\left(\frac{\partial^v}{v!}\right)(ab) = \sum_{\substack{\lambda + \mu = v \\ \lambda, \mu \in |\mathbb{Z}|^n}} \left[\left(\frac{\partial^\lambda}{\lambda!}\right)(a)\right] \left[\left(\frac{\partial^\mu}{\mu!}\right)(b)\right]$$

これは、 A が可換環 R 上の n 変数多項式環、 n 変数べき級数環の場合に正しい。もし、 F が A の自己同形射であるときは、 $J(F)$ は逆行列を持つ $n \times n$ 行列である。その逆行列を L とせよ。また

$$\left(\frac{\varepsilon^v}{v!}\right) = F \circ \left(\frac{\partial^v}{v!}\right) \circ F^{-1}$$

とすれば、前と同じ様に、

$$L \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

ただし、 $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon^{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}}{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)!}.$

A が多項式環であるときに、次の意味で *locally nilpotently* に A に作用している。つまり、 $\alpha \in A$ に対して、次が成り立つ m が存在する。

$$\left(\frac{\varepsilon^u}{u!} \right) (\alpha) = 0 \quad \begin{array}{l} u_1 + \dots + u_n \geq m \text{ となる} \\ \text{すべての } u \text{ に対して,} \end{array}$$

これは、 $\{\frac{\varepsilon^u}{u!}\}$ が *locally nilpotently* に A に作用している
ので正しい。よって、Inversion Formula における和
は、有限和であり、その公式は成立する。もし、 A
がべき級数環であるときには、 $F_i = F(x_i)$ が $\{x_i\}$ で生成
されるイデアル I に属するとは限らない。しかしなが
ら、それぞれ F_i が I に属するならば、“ $(x-F)^u$ ” がど
んどん高い乗数の I^n に属してゆくので、和は収束して、
Inversion Formula は正しい。

FIND THE MISSING FORMULA:

一般の場合に、 $\left(\frac{\varepsilon^u}{u!} \right)$ を $F \circ \left(\frac{\varepsilon^u}{u!} \right) \circ F^{-1}$ と定義するのに
 F^{-1} を使ったので、Inversion Formula を使用することはで
きなかった。 $F \circ - \circ F^{-1}$ は内部自己同形であるので、
標数 0 の場合は、 $\left(\frac{\varepsilon^u}{u!} \right) = \frac{\varepsilon^u}{u!}$ が成り立つ。 $\{\varepsilon_i\}$ は L と
 $\{e_i\}$ で表現できるので、標数が 0 の場合 F ではなく $J(F)^{-1}$

のみを含む F^{-1} についての公式を得る。たぶん、 (ε/u_i) についても、 F^{-1} を使わずに、 $J(F)^{-1}$ と $\{2/u_i\}$ のみを含む公式を見つけられるであろう。私はそのような公式の存在を信ずるが、それを見つけることはできなかった。その後で、多項式の場合、 $\{(\varepsilon/u_i)\}$ が *locally nilpotently* に作用している時、またべき級数環の場合は、 $F(I) \subset I$ のとき、Inversion Formula を使用して、定義することができる。

REFERENCE;

M.E. Sweedler & Pekka Nousiainen; Automorphisms of Polynomial and Powerseries Rings, to appear in Journal of Pure and Applied Algebra