

格子渦管モデルによる乱流シミュレーション

東工大理 田口善弘* 神戸大理 高安秀樹**

HOMOGENEOUS ISOTROPIC FLUID TURBULENCE SIMULATED WITH THE LATTICE VORTEX TUBE MODEL

* Yoshi-hiro Taguchi, Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152.

** Hideki Takayasu, Department of Earth Science, Kobe University, Kobe 657.

The velocity field in turbulence is analyzed by introducing a lattice model which is equivalent to the vorticity equation in the infinite size limit of the lattice. In particular it conserves the total vorticity and therefore even in the small lattice of 24^3 points it gives an inertial subrange in momentum space, a gaussian distribution for fluid velocity and exponential-like distribution for the spatial derivative of the velocity field, which previously have been obtained only in much larger systems.

1 序

本研究の目的は、流体における乱流の時間的及び空間的構造を解明できるような効果的な数値モデルを構築することにある。その際、目的とするのは実際の乱流の運動を正確に再現することではなく、あくまで、統計的な意味での諸量の特徴的な振舞い、例えば、スケーリング的な性質などを再現する事が出来れば充分であるとし、そのぶん、できる限り単純なモデルを構築することを目的とする。

対象となる乱流は、一様等方性乱流と呼ばれるものに限定する。これは、その名の通り全空間に於て諸量が一定であり、また、異方性もないという完全な並進及び回転対称性を持つような流れとして定義される。ここでは、3次元非圧縮性の場合に限定する。

また、ここで、我々がモデルの構築に当たって採用する描像は渦管描像である。よく知られているように流体の速度場をポテンシャルによって表現される部分（渦無しの流れ）と、ベクトルポテンシャルによって表現される部分（渦ありの流れ）とに分けた場合、後者は渦管と呼ばれる渦の連なりによって定義される管が相互作用しながら運動していることに等価であると信じられている。我々が採用するのはこの描像である。

また、計算を簡単にするために、格子モデルの構築をめざす。この場合問題になるのは、渦管の運動をどうやって格子上にはめ込むかという問題である。そのためには、まず、流体の場（速度場及び渦度場）をどうやって格子上に埋め込むかが問題になる。

2 格子上の渦度場及び速度場の表現

使用する格子は、単純立方格子である。この格子の上に3次元的速度場を埋め込むわけであるが、その際速度場は格子点上ではなく格子と格子をつなぐボンドの上に定義することとする。また、 x, y, z -bond にはそれぞれ、速度の x, y, z 成分しかないこととする。もちろん、このような離散化の仕方は一意的ではない。次に、渦度場は、単純立方格子の面上に定義する。そして、その方向は、各面に垂直であるとする。つまり、ある面が xy 面 (x ボンドと y ボンドに囲まれる面) である場合にはその面上の渦度場は z 成分のみを持つものとする。この渦度場 ω の定義は速度場 $\mathbf{v}$ との関係 $\text{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$ または $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \omega$ という関係を離散化した場合に相当する。

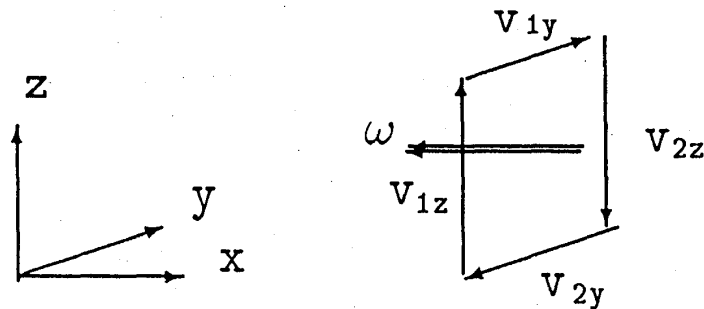


Figure 1: 格子上の速度場 $\mathbf{v}$ 、渦度場 $\boldsymbol{\omega}$

以上の事は文字で書けば難しいが、図で書けば一目瞭然であり (図1)、 $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \omega$ は図の例では $v_{1y} - v_{2y} - v_{2z} + v_{1z} = \omega$ に相当する。従って、 ω は渦度と言うより、循環というべきかも知れない。このような離散化の仕方は特殊すぎて信用がおけないように思えるかも知れないが結果から判断する限り以下にみるようにきわめてうまく機能している。

基本的には以上でおしまいであるが、我々が構築しようとしているモデルは渦管の運動モデルであり、与えられた渦管の配置に対してその配置に対応する速度場を逆に求められなくてはならない。この点が多少難しい。やらなくてはいけないことは、基本的には $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \omega$ を離散化して得られる方程式を変数 $\mathbf{v}$ をもつ連立方程式系 $A v_i(\mathbf{r}) = \omega_j(\mathbf{r})$ (A は係数行列) とみて解く事であるが、これには多少問題がある。第一の問題は周期的境界条件をとっているために、独立な方程式の数が、変数である $\mathbf{v}$ の数よりも1つだけ多くなってしまい方程式の解が不定になってしまうことである。もう一つの問題は、非圧縮性の条件 $\text{div} \mathbf{v} = 0$ が何処にも入っていないことである。この困難を克服するために、 $A v_i = \omega_j$ という連立方程式の内の一個を $\text{div} \mathbf{v} = 0$ という式を離散化した式 $v_x(x + \frac{1}{2}, y, z) - v_x(x - \frac{1}{2}, y, z) + v_y(x, y + \frac{1}{2}, z) - v_y(x, y - \frac{1}{2}, z) + v_z(x, y, z + \frac{1}{2}) - v_z(x, y, z - \frac{1}{2}) = 0$ でおきかえた (x, y, z はどの一点でも構わない)。これにより、解の一意性は保証される。更に、これは理由が明らかではないが $\text{div} \mathbf{v} = 0$ も全空間で満たされた。ただし、これは数値的にこうなっているというだけで数学的に証明された事実ではない。しかし、現実的には各点で $\text{div} \mathbf{v} = 0$ を満たしているのでこの離散化は非圧縮性流体が満たすべきすべき全ての条件を満たしているといえる。

3 動力学

前節で述べられたような格子上に埋め込まれた流体の動力学はどのようなものになるであろうか。古典的な描像では、渦管は流体と共に流れる、つまり、渦管は渦管上の流体の速度 $\mathbf{v}$ で移動するとみなされる。しかし、前節で述べたように、速度場の乗っている格子と渦度場の乗っている格子は互いにデュアルな関係にあるので渦管上の速度は直接には求まらない。そこで、注目する渦管の部分に最も近い速度場の値を平均して渦管の速度とするものとする。具体的には、例えば z ボンド上では格子定数を単位として $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_0) = ([v_x(\mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{y}}/2) + v_x(\mathbf{r}_0 - \hat{\mathbf{y}}/2)]/2, [v_y(\mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{x}}/2) + v_y(\mathbf{r}_0 - \hat{\mathbf{x}}/2)]/2, 0)$ というようにする ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ は、格子ベクトル)。この速度で渦管を動かすわけであるが、ただ動かしたのでは、渦管がぶつぶつ切れてしまう。渦管は粘性が無いときには、切れてはならないのでこれでは困る。そこで、「引き延ばし」の効果を入れる。つまり、ある点 $\mathbf{r}$ での渦度の z 成分が、速度 $\mathbf{v}$ によって隣のボンドに流れたとすると、この流れた分の渦管がちぎれないように、 y または x 成分の渦管を付け加えることにする。これだけでもよいのであるが、動力学の対称性をよくするために、流れの速度とは反対の方向に反対符号の渦管を置くようにする。これを具体的に数式で書くと

$$\begin{aligned} \omega_x(\mathbf{r}_0, t + \Delta t) = & \omega_z(\mathbf{r}_0, t) + \Delta t [\pm J_{yz}(\mathbf{r}_0 \mp \hat{\mathbf{y}}, t) \pm J_{xz}(\mathbf{r}_0 \mp \hat{\mathbf{x}}, t) \\ & \mp J_{zx}(\mathbf{r}_0 - \hat{\mathbf{z}}/2 \mp \hat{\mathbf{x}}/2, t) \mp J_{zy}(\mathbf{r}_0 - \hat{\mathbf{z}}/2 \mp \hat{\mathbf{y}}/2, t) \\ & \mp J_{zx}(\mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{z}}/2 \mp \hat{\mathbf{x}}/2, t) \mp J_{zy}(\mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{z}}/2 \mp \hat{\mathbf{y}}/2, t)]/2 \end{aligned}$$

である。(ただし、 $J_{ij}(\mathbf{r}, t) = \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \omega_j(\mathbf{r}, t)$ である。) ここで、 Δt は時間刻みである。 Δt は、別に小さく取る必要はなく、1 節で述べたようなスケーリング的な性質が再現できる程度でよい。具体的には、 $\max_{\mathbf{r}} |J_{ij}(\mathbf{r}, t) \Delta t| = 0.1$ を満たすように決められる。この動力学の特徴は、 $\sum_{\mathbf{r}} \bar{\omega}(\mathbf{r})$ をきちっと保存することである。乱流の本質が、渦にあるとすれば、このアルゴリズムは乱流の本質をきちっと押さえることが出来るはずである。ただし、このアルゴリズムにはどこにもエネルギーを保存するという要請が入っていないので、 $\sum_{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r})^2/2$ を一定にするように、 $\mathbf{v}, \bar{\omega}$ を規格化しながら実行する。

以上が、基本的な部分であるが、実際のシミュレーションでは、粘性を必要とする。これは、渦管の拡散を用いて表現する。具体的には、ある点 $\mathbf{r}$ での渦度の i 成分が $\omega_i(\mathbf{r})$ であったとすると、粘性係数が ν のとき、 Δt 後には、 $\omega_i(\mathbf{r}) \nu \Delta t/6$ ずつを周りの最近接のボンドに付け足し、元のボンドには $\omega_i(\mathbf{r})(1 - \nu \Delta t)$ だけ残すようにする。

さらに、定常乱流が目的である場合には、外力の効果も考える必要がある。これは、外力が $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ であるとき、 $\bar{\omega}_{ex}(\mathbf{r}) = \text{rot} \mathbf{f}(\mathbf{r})$ で定義される渦管を注入することで、代用する。具体的に使用された外力は、波数の小さい方ほうのみを励起するようなものであり、Taylor-Green-vortex に $2\sqrt{2}\pi/L$ の波数の外力を加えたものである。

この格子モデルはかなり乱暴なモデリングのように思えるが、これによってどのくらい乱流の性質を捉えることが出来るかを実際に数値計算で行ってみた。

4 結果

実際のシミュレーションは、 $L = 24$ という、比較的小さい格子で行われた。乱流がほぼ定常な状態に達するまで待った後、9 ないし 10 個程度の瞬間値をサンプリングし、

平均をとることにより、様々な物理量を求めた。また、粘性の効果も確認するため、4種類の異なった値の場合について行った。求めた物理量は速度場の z 成分の k_x 成分のエネルギースペクトル、 $E_z = \langle |\int v_x(x, y, z) \exp(-ikx) dx|^2 \rangle_{y,z}$ ($\langle \dots \rangle_{y,z}$ は y, z についての平均である。)、速度場 v_x の大きさ分布、速度場の微分の大きさ分布の、3つである。

まず、エネルギースペクトルであるが、粘性が小さくなるとずれがひどくなるものの大体、コルモゴロフのスケールリングが成立している。実線は、 $-5/3$ 乗のべきを表している。 24^3 という小さいサイズで、かなり粗いタイムステップの計算であることを考えるとかなりよい結果といえるであろう。

次に、速度場の分布関数であるが、これは、ほぼガウス分布である。実線は分散が等しいガウス分布を表している。片対数プロットにしてあるので v_x の値の小さいところまでガウス分布にきわめて近いことがよく解る。また、全体の形が粘性の大きさにあまりよらないことがよく解る。

最後に、速度場の分布関数であるが、これは大体、指数分布である。また、その形は速度場の分布関数と異なり、粘性の大きさに強くよることが解る。

これらの結果は実験や大規模な数値シミュレーションで得られたものとよく一致しており、この格子渦管モデルが乱流の性質をよく捉えていることを示している。

5 考察

ここで我々が提案した格子渦管モデルは、かなり荒っぽいモデルであるにも関わらず、乱流の定性的な性質をきわめてよく捉えていることが解った。この理由は一つには、「スケールリング性等の定性的な性質は、モデルの細かい定義にはよらない」という「ユニバーサリティークラスの存在」を示唆するものである。この考え方は、近年、統計力学の様々なモデル化において採用される考え方であり、また、非常に多くの場合に正しいことが経験的に知られている。このモデルの成功により、流体に於ける乱流のような古くから研究されてきた複雑な現象にも成立することが示唆されたといえよう。この点をもっと突き詰めて行けば、「何が乱流の本質であるか」という点に於て何等かの貢献ができるかも知れない。

また、紙面の関係上触れなかったが、このモデルは、時間差分と空間差分の連続極限において渦度方程式と完全に等価になることも示されており、新しい乱流計算スキームを与える可能性もあることも解っている。この研究の詳しい内容は、このシンポジウムの直後に行われた「計算流体力学シンポジウム」の報告書が *Fluid Dynamic Research* の特集号として発刊される予定なのでこれに投稿する予定である。

なお、以上の研究はすべて、田口がドイツのユーリッヒ研に滞在中に行われたものである。

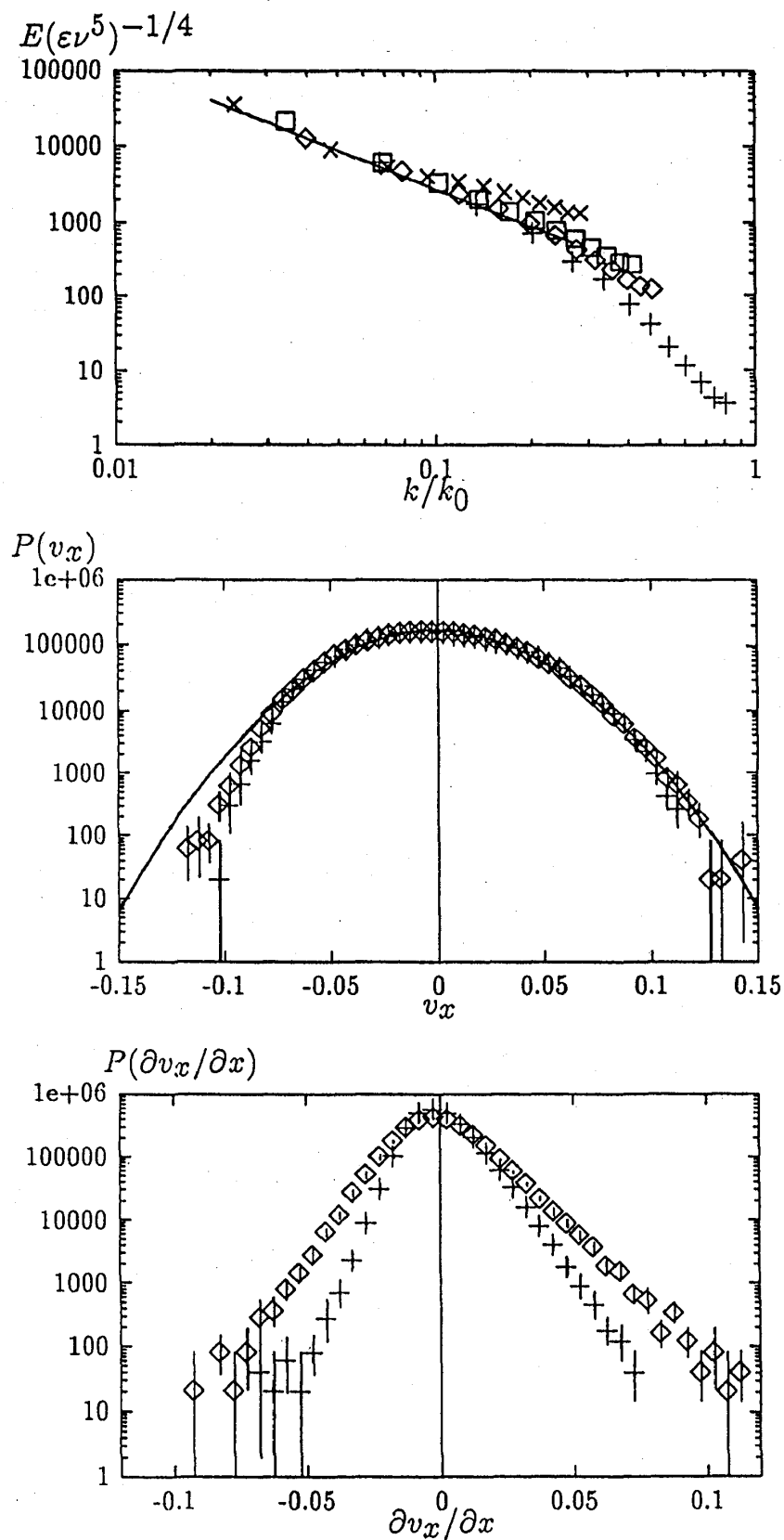


Figure 2: 上：スケールされたエネルギースペクトル、 ε :散逸エネルギー、 ν :粘性、 $k_0 = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4} \pi/12$ 。実線は $k^{-5/3}$ 。+、 $\diamond$ 、 $\square$ 、 $\times$ の順に粘性がそれぞれ、 $20, 10, 8, 5 \times 10^{-3}$ である。記号は他の図と共通。中：速度場の大きさ分布 下：速度場の微分の大きさ分布