

科学計算から e と π を追放しよう

二 宮 市 三 (中 部 大 学)

Ichizo NINOIMIYA (Chubu University)

1. 三角関数の利用の合理化

科学計算で三角関数が使われる典型的な場合は次のようなものである。周期 2π の整数分の一を増分として引数を変化させながら、正弦や余弦を含む数式を計算する。例えば、グラフィックスなどでは、次のようなプログラムの断片 (A) (B) をときどき見かける。

(A)	(B)	(C)
DT=ATAN(1.0)*8.0/64.0		DT=4.0/64.0
DO 10 I=0,64	DO 10 I=0,64	DO 10 I=0,64
T=DT*REAL(I)	X=R*COS(3.141593*2.0/64.0*I)	T=DT*REAL(I)
X=R*COS(T)	Y=R*SIN(3.141593*2.0/64.0*I)	X=R*COSQ(T)
Y=R*SIN(T)		Y=R*SINQ(T)

さて、多少のプログラミングの巧拙を度外視すれば、このような三角関数の使い方にはなんらの問題もないように思われる。ところが、詳細に見ると、実は大きな無駄が行われているのがわかる。

三角関数がフォートランの組み込み関数の中で計算される仕組みはつぎのとおりである。周期性などの加法定理を利用して、引数を一定の標準区間内の値に還元するための、不可欠の手続きである区間縮小 (RANGE REDUCTION) を効率よく行うために、変数変換 $T=X/Q$ を行う。ただし、 $Q=\pi/2$ である。これは、ラジアンに基づく、 2π 周期の通常の三角関数を、直角あるいは象限を角度の単位とする、4 の周期の、象限三角関数に置き換えることに相当する。例えば正弦は $\sin(X)=\sin_Q(T)=\sin_Q(X/Q)$ として計算される。したがって、 $\sin(Q*X)$ と書くと実際には $\sin_Q(Q*X/Q)$ として計算され、無益の二度手間をふむことになる。著者は15年位も前からこの不合理に気づき、ライブラリ NUMPAC の中に $\sin_{HP}$ $\cos_{HP}$ などの名前で象限関数を導入して、その利用を奨励してきた。これらの関数は単に上のような無駄を除去するのみならず、次のような長所を備えている。

(1) 変数変換 $T=X/Q$ は、引数 X の誤差の程度以内に関数の誤差を抑えるため

に、 X の桁数よりも多くの桁数を使って行われる。したがって、倍精度の場合には、その計算量は総計算量の20%程度にもなる。新関数では、この部分が全く省略できるので、それだけ計算速度が速くなる。

(2) 精度がよく、周期性が厳格に保たれる。例えば、 $\text{SINQ}(2N)$ と $\text{COSQ}(2N+1)$ は正確に0となる。ただし N は整数である。

(3) これらの関数を使うのにほとんど抵抗がない。角度の単位としてラジアンをやめて、象限単位をとればよい。例えば、前掲のプログラム(A)は(C)のように簡潔な形に書き換えられる。

(4) 新関数を作るのに特別の努力を要しない。

以上のようにして、科学計算の多くの場面で面倒で無駄な π の計算が追放できるが、更にこれを完璧にするには、当然逆象限三角関数の導入が必要である。

2. 指数関数の利用の合理化

科学計算での指数関数の利用の典型は、次のようである。時間 t と時定数 T から $e^{-(t/T)}$ を計算し、空間変数 x と定数 a から $e^{-(x/a)^2}$ を計算する。このとき、 T のかわりに半減期 $H=T \cdot \ln(2)$ を、 a のかわりに半値幅 $h=a \cdot \ln(2)^{1/2}$ を用いて $\tau=t/H$, $\xi=x/h$ とすれば、 $e^{-(t/T)}=2^{-(\tau)}$ 、 $e^{-(x/a)^2}=2^{-(\xi^2)}$ と なって、指数関数は2底指数関数で計算される。指数関数は組み込み関数の内部では、変換 $T=X/\ln(2)$ を通じて $\text{EXP}(X)=\text{EXP2}(T)$ と計算されているので、新関数 EXP2 の導入によって、変換 $T=X/\ln(2)$ に要するかなりの計算量を省くことができる。当然その逆関数の2底対数関数 LOG2 も導入されるべきである。

3. 結言

象限三角関数、2底指数関数などの新関数は科学計算から多くの無駄を省くのに有効であるが、その効果を最大限に発揮するためには、これらの関数がフォートランなどの言語の標準規格の組み込み関数として提供されなければならない。そのためには、学者、教育者、計算家、計算機メーカー、コンピューター言語設計者の一致した協力が是非とも必要である。各位の御賛同と御援助を切に願う次第である。

(1) 二宮市三：数学ソフトウェアの現状と問題点、情報処理、V23, No. 2, 1982

(2) 二宮市三：関数ソフトウェア、数値解析研究会資料1-4、1982

(3) 二宮市三, 秦野甯世：数学ライブラリNUMPAC、情報処理 V26, No. 9, 1985