

部分構造論理と論理定項

大西琢朗*

1. はじめに

本論の目的は次の二つである。(1) 証明論における**部分構造論理**(substructural logic)の研究から派生した、あるテーゼを紹介する。すなわち「論理定項とは、シークエント・レベルの構造に対する、命題レベルでの反映である」。(2) その紹介を通じて、部分構造論理の研究を行う目的とその意義を考察する。本論が取り出すのは「部分構造論理は、古典論理の成り立ちを、より精密に解明してくれる」というものである。

一般に非古典論理は、古典論理では扱えない現象をうまく定式化する、という効用を持つ。これは哲学の分野でも多く論じられてきたことでもあり、今さら問題にすることでもない。本論で明らかにしたいのは、非古典論理、特に部分構造論理は、ある特定の場面における古典論理の代替物としてだけでなく、その分析ツールとしても使える、ということである。その分析結果のひとつの表現が、冒頭に挙げたテーゼである。論理を部分構造論理によっていわば「分解」(cf. 照井, 2006) し、その部品をそれぞれ詳しく調べることで、元の論理をよりよく理解することができる。

本論の構成は以下のとおりである。まず、議論の土俵となるシークエント算、および部分構造論理の基本的な特徴を紹介する。次に、ドッシェンの業績をもとに、上述のテーゼの内実を解説する。さらにドッシェンと同様の考え方を採る、サンビンの**基本論理**(Basic Logic)を紹介する。基本論理は、部分構造論理が実際に「分析ツール」として働くよい実例となっている。

本論では命題論理しか扱わないが、量子化も同様の路線で扱うことができる。統一性をもたせるために、いくつかの用語、記号、規則などについては、原著と異なる場合があることをお断りしておく。また本論では、カット除去定理についてはほとんど触れない。カット除去はその重要性ゆえに、別の場所でスペースをとって論じられるべきである。しかし同時に、筆者としては、本論全体がカット除去定理の理解のための準備ともなりうる、と考えている。

2. シークエント算—部分構造論理へ

まずわれわれの議論の土俵となるシークエント算に関する用語を導入する。 $\mathcal{L}_0$ をもって命題論理の言語を不特定に表わすことにする。また、 Γ 、 Δ を $\mathcal{L}_0$ の論理式の有限多重集合（要素の複数回の現れを許す集合）とする⁽¹⁾。このとき、

$$\Gamma \vdash \Delta$$

の形の表現を**シークエント**と呼ぶ。ここでの Γ を**左辺**(antecedent)、 Δ を**右辺**(succedent)と呼ぶことにする。以下でシークエント算の一般的な特徴を説明する。

シークエント算における推論の前提と結論は、シークエントから構成される。シークエントは直観的には命題間の帰結関係を表わす（ただし常識的な帰結関係とは違い、左辺の仮定部分だけでなく、右辺の帰結部分にも、複数の論理式が現れうる）。つまり、シークエント算は、命題に対してではなく、その帰結関係に対して働く、一種の**メタ推論体系**である。それゆえシークエント算の中には、 $\mathcal{L}_0$ という命題レベルとその帰結関係レベルという、二つの異なるレベルが内在していることになる。

それに合わせて、公理と推論規則も、シークエント・レベルと命題レベル、それぞれに関する二つの種類に分かれる。シークエント・レベルでの規定として、常に置かれるのが次の二つである。

$$(Ax) : A \vdash A \quad (Cut) \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

どちらも体系によって定式化は異なる場合があるが、これが標準的な形である。 Ax と Cut はそれぞれ、帰結関係の反射性と推移性を表わしている。 Ax は唯一の公理図式であり、 Ax に順次推論規則を適用することで、シークエント算の演繹は構成される。

次の四つは**構造規則**と呼ばれ、体系によって措定されたりされなかったりする：

$$(LW) \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad (RW) \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \quad (LC) \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad (RC) \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

LW (左 Weakening) と LC (左 Contraction) は直観的に理解しやすい。すなわち「余分な仮定を増やしてもよい」、「同じ仮定は複数回使っても一回と見なせる」である。 RW と RC はこれらの対称と考えればよい。後で見るように、左辺と右辺の対称性（ないし双対性）がシークエント算の大きな特徴である。

以上の定式化に現れるのは、図式文字とコンマ、 $\vdash$ だけであり、 $\mathcal{L}_0$ の定項は現れない。つまり、これらはもっぱらシークエント・レベルにのみ関わる規定である。そのような規定としては、左辺あるいは右辺の多重性を制限する、というものも考えられる（これについては後述）。これらの規定を以下では「構造規定」と呼ぶことにする。

もう一種類が、命題レベルの論理定項を支配する論理規則である。これからさまざまな論理規則を見ていくことになるが、標準的な古典論理の規則を一例だけ挙げておく。

$$(L\wedge) \frac{\Gamma, A_i \vdash \Delta}{\Gamma, A_0 \wedge A_1 \vdash \Delta} \quad (i \in \{0, 1\}) \quad (R\wedge) \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma' \vdash \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', A \wedge B}$$

（構造規則も含め）規則の言明における、横線の上のシークエントを**前提**、下のそれを**結論**と呼ぶ。論理規則は、ひとつの定項に対して、左 (L) 規則と右 (R) 規則が与えられ、いずれも前提に現れない定項を結論で新しく導入する、という形である。これ

はカット除去定理を通じて、演繹の**部分論理式特性**(subformula property)を充足するために重要な性質であるが、ここでは踏み込まない。

以上がシークエント算の一般的な枠組みである。さて、ゲンツェンがシークエント算を発表したのは1935年 (Gentzen, 1935)。そこで明らかにされたことのひとつは、「古典論理と直観主義論理の違いは、論理規則の違いではなく、**構造規定の違いだけで表わせる**」ということであった。彼の直観主義論理の体系 **LJ** は、古典論理の体系 **LK** のシークエントを、右辺が複数ではなく高々一つの論理式のみを持つ含むものに制限した、**LK** の部分体系として得られる。同様の効果は、RW を適切に制限することによっても得られる。しかもそのとき、論理規則は **LK** と **LJ** でまったく同じである。

ところで直観主義論理は、古典論理・数学では気づかれていなかった、構成性という生産的な概念を明るみに出した (cf. 岡本, 2007)。そして直観主義論理は、古典論理の構造規定の制限によって表わせる。では今度は逆に、実験的に他の構造規定をも制限し、その結果できた体系について調べることで、論理と数学に関する生産的な概念を得られるのではないか。現在「**部分構造論理**」と呼ばれる路線の基本発想である。

この予想は的外れなものではなく、さまざまな部分構造論理の体系が考えられ、それぞれに興味深い応用が見出されている⁽²⁾。構造規定の変更は、**LK** から **LJ** を得るという特定の場面だけでなく、ある程度一般的に意味を持ちうる作用なのである。この状況は、「論理」なるものに対するわれわれの理解に、どのような意味を持ちうるのだろうか。本論で紹介するテーゼが、そのひとつの答えである。

3. 句読点としての論理定項

二つの論理、例えば古典と直観主義論理の違いを考えると、われわれは普通、その違いはそれぞれの論理を構成する論理定項の違いなのだ、と考えがちである。しかし、**LK** と **LJ** が教えてくれるのは、そうとは限らないということである。**LK** の RW を制限するだけで **LJ** が得られ、排中律や二重否定除去則は（一般的には）成り立たなくなる。同じ論理規則に従うという意味で両者は「同じ」論理定項を共有し、しかしそれらを含む同じ論理式の証明可能性に関して異なる。それでは論理の違いは何に存するのか、そして異なる論理が共通して持つ「同じ」論理定項とは何なのか。次のように考えることができる。

テーゼ 論理定項とは、シークエント・レベルの構造に対する、命題レベルでの**反映**(reflection)である

このテーゼに従えば、**LK**と**LJ**の関係も説明がつく。**LK**と**LJ**の論理定項は同じ仕方で、しかし異なる構造を反映しているのである。

このテーゼの内実を、ドッシェンとともに見ていこう。彼は上のテーゼを“句読点”という比喻を用いて表明した (Došen, 1989)。すなわち、論理定項はシークエント（彼の言葉では演繹）の構造的特徴に対する、“句読点”として働く。具体的に見るのが早いだろう。標準的な論理定項を、次のような“二重線規則”で特徴づけよう：

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

二重線は、これらが双方向の規則であることを意味する。上述の構造規定に、これら論理規則（ $\perp$ の規則も作っておき、否定は $A \rightarrow \perp$ で定義する）を加えた体系は、古典論理と同じ証明力を持つ。そして大事なことだが、構造規則だけを制限することで、直観主義や適切さの論理が定式化できる。

“句読点”の意味は次のようなものである。 $\rightarrow$ は、 $\Gamma, A \vdash B, \Delta$ における、 A と B の間の $\vdash$ を、命題レベルで代理ないし反映 (mirror) する。 $\wedge (\vee)$ は、「二つのシークエントは右辺（左辺）の一箇所だけで異なる」というシークエントの構造的特徴を、命題レベルで代理ないし反映する。そしていずれの場合も、二重線の下から上への移行によって、命題レベルの論理定項から、元のシークエント・レベルの構造を復元することができる。

これがドッシェンの基本アイディアである。彼はこのアイディアを次のように発展させる。(1) 様相論理の様相オペレータも、 $\vdash$ の入れ子を許す、高階のシークエント・システムを考えれば、“句読点”として見ることができる。その結果、様相論理 (**S4, S5**) は普通の一階述語論理に対する、一種のメタ論理として捉えられる (Došen, 1985, 1992)。(2) “句読点”という比喻の哲学的明晰化。“句読点”というアイディアに基づいて定式化された規則は、論理定項の「定義」と呼べるだろうか。あるいはこのアイディアは、論理定項とそうでないものの弁別規準として働きうるだろうか (Došen, 1989)、等々。

どちらも興味深いのだが、ここでは紹介しない。彼の議論の詳細に立ち入るよりも、次のサンビンらの基本論理を見た方が、本論の目的のためにはわかりやすいからである。基本論理では、ドッシェンのアイディアがさらに徹底されるのだが、そのプロセスで、われわれは部分構造論理の役割をより明確に理解することができる。

4. 基本論理と反映原理

前節で挙げたテーゼは（少し言葉は違うが）G. サンビンらが自らの**基本論理**の基本思想として打ち出した、**反映原理**(principle of reflection) である (Sambin, Battilotti &

Faggian, 2000)。「基本論理」とは、ひとつの論理体系の名前であると同時に、その内部で線形・量子・直観主義・古典論理など、さまざまな論理が定式化できる、シーケント言語の枠組みである。反映原理は、さしあたっては基本論理を構築するための方法論的原則であるが、論理定項という概念に関する、ある程度普遍的なテーゼとして読むこともできる。なぜなら今から見るように、基本論理は古典論理の分解と再構成に成功しているのだから。

4.1 反映原理による定項の導入

シーケント言語の成り立ちを考えることから出発する。シーケント $A, B \vdash C, D$ は「 A と B から C と D が出てくる」であり、シーケントにより構成される推論 $\frac{S_1 \ S_2}{S}$ は「 S_1 と S_2 から S が出てくる」である。シーケント・レベルの言語は、対象レベル $\mathcal{L}_0$ の論理式と、メタ・レベルの「と (コンマ)」と「出てくる ($\vdash$)」で構成される。後者を (メタ言語的) **リンク** と呼ぶ。反映原理とは「論理定項はメタ的なリンクの対象レベルでの反映だ」ということに他ならない。

このような言語の上に、シーケント算が組み立てられる。まず、 Ax と Cut は、シーケントの基本性質として措定し、構造規則は無しとして出発する。

次に、基本論理に登場する論理定項はすべて反映原理に従って導入される。具体的に、シーケント $A, B \vdash \Delta$ の左辺のコンマから考えよう。 $\mathcal{L}_0$ 中の定項 (2 項結合子) $\otimes$ が、左辺のコンマを反映しているのは次が成り立つときである。

$$A \otimes B \vdash \Delta \quad \text{iff} \quad A, B \vdash \Delta.$$

ここでの反映とは要するに、左辺のコンマと $\otimes$ は、レベルの違いを越えて互いに置き換え可能ということである。この同値式を $\otimes$ の定義とする。サンビンはこの定義を**定義方程式**と呼び、 $\otimes$ の論理規則は、この定義方程式を「解く」ことで得られる。

「解く」とは、定義方程式から、 Ax と Cut のもとでそれと同値な、左辺と右辺に対する導入規則 (シーケント算の論理規則の標準的な形式) を導くことである。左規則は定義方程式の一方方向を使って $\frac{A, B \vdash \Delta}{A \otimes B \vdash \Delta}$ ($L\otimes$) とできる。逆方向から得られるのは $\frac{A \otimes B \vdash \Delta}{A, B \vdash \Delta}$ (r) であるが、これは導入規則ではない。そこで Ax と Cut を使って、

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \frac{\Gamma' \vdash B \quad \frac{(Ax) A \otimes B \vdash A \otimes B}{A, B \vdash A \otimes B} (r)}{A, \Gamma' \vdash A \otimes B} (Cut)}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B} (Cut)$$

とする。つまり、右規則は $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B}$ ($R\otimes$) である。また $R\otimes$ と Ax, Cut を使えば、再び (r) が得られる。つまり、定義方程式の左から右方向と $L\otimes$ 、逆に右から左方向と

$R\otimes$ がそれぞれ同値である。このように、メタ的なリンクの反映を表わす定義方程式から、それと同値な論理規則（左右の導入規則）が導けたなら、その定項は「反映原理に従って導入された」という。

ここで基本論理のもうひとつの原理、**対称性**を導入する。前節でも示唆しておいたが、対称性（双対性）はシーケント算の特徴であり、基本論理はそれを徹底する。つまり、左辺で行えることは、右辺でも対称的に行える。だから、右辺のコンマを反映する、次の $\wp$ に対する定義方程式が考えられる。

$$\Gamma \vdash A, B \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash A \wp B$$

論理規則はやはり、 $\otimes$ の場合と対称的な仕方で定義方程式を解くことで得られる。

$$\frac{A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta'}{A \wp B \vdash \Delta, \Delta'} (L\wp) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B}{\Gamma \vdash A \wp B} (R\wp)$$

以上の二つの定項はともにコンマ、すなわち「と」の反映であるが、そのコンマは $\vdash$ のスコープの中の「と」である。先に見たように、シーケント言語の「と」は $\frac{S_1 \quad S_2}{S}$ にも、すなわち $\vdash$ のスコープの外側にもある。すなわち、

$$\Gamma \vdash A \& B \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash A \text{ と } \Gamma \vdash B$$

という定義方程式が考えられる。論理規則は定義方程式を解き、次を得る。

$$(L\&) \frac{A_i \vdash \Delta}{A_0 \& A_1 \vdash \Delta} (i \in \{0, 1\}) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} (R\&)$$

再び対称的に、次のような定義方程式も考えられる。

$$A \oplus B \vdash \Delta \quad \text{iff} \quad A \vdash \Delta \text{ と } B \vdash \Delta$$

論理規則は次のようになる。

$$\frac{A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta}{A \oplus B \vdash \Delta} (L\oplus) \quad (R\oplus) \frac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_0 \oplus A_1} (i \in \{0, 1\})$$

$\&$ と $\oplus$ は、ただひとつの場所でのみ異なる二つのシーケントの間の「と」を、その異なる場所をひとつにまとめることで反映する。

このように、基本論理におけるすべての定項は、反映原理（と対称性）に従って導入される。他には、これら4つの定項に対する“単位元”、 $0, 1, \perp, \top$ や、また後で見るとように含意も導入されるが、ここで話を次に進める。上の $\otimes$ と $\wp$ は、 $\vdash$ のスコープ内の「と」を、 $\&$ と $\oplus$ はスコープ外の「と」を反映する。しかしこれで何が得られたのだろうか。次節では、これらから古典論理の $\wedge$ と $\vee$ を得るプロセスを見る。

4.2 基本論理の諸体系

先に、基本論理はシーケント言語の枠組みであると述べた。その枠組みで定式化される論理体系はすべて、次のようにして得られる。まず、もっとも「ベーシック」な論理体系が **B** (Basic logic) である。**B** は Ax と論理規則のみからなる（構造規則は

なし。Cut はカット除去定理により許容可能と示せるので措定しない)。論理規則は、反映原理に従う定義方程式と対称性から得られるものに限られる。

ここで**可視性**(visibility)という概念を紹介する⁽³⁾。ある規則、例えば $L_{\otimes}$ において、多重集合の図式文字 (Δ) により表わされる部分を**文脈**と呼ぶ。また、文脈に入っていない論理式の現われを、前提においては *active formula* (A, B)、結論においては *principal formula* ($A \otimes B$) と呼ぶ。このとき、ある規則が**可視的**であるとは、active 及び principal formula の側（この場合左辺）に文脈が存在しないときである。

反映原理、対称性と並ぶ **B** の三つめの特徴が、可視性である。すなわち、上で挙げた規則を含め、**B** の規則はすべて可視性を満たす。可視性は、対象レベル $\mathcal{L}_0$ の定項に言及せずに定義される、シークエント・レベルの性質（つまりわれわれの言う構造規定の一種）であり、そして最初に挙げた古典論理の $L_{\wedge}$ 、 $R_{\wedge}$ などは可視性を満たさない。**B** は、古典論理に可視性および構造規則の禁止という、構造規定の制限を課した、部分構造論理の一種である。

この最も弱い **B** から、基本論理の枠組でのすべての論理体系は、

1. 左辺あるいは右辺の可視性条件を緩める、あるいは
2. 左辺あるいは右辺での構造規則を追加する、

これらの制限緩和の組み合わせによって、**B** の拡張として得られる。ただし、その際に論理規則の形は（文脈のあるなしを除いて）不変に保たれる。**B** のすべての論理規則に対し、左辺での可視性を無くした体系を **BL** と書く。このとき例えば $L_{\otimes}$ は $\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta}$ となる。ただしこのとき、すでに左辺に文脈が存在している規則、例えば $R_{\otimes}$ は変化しない。対称的に、右辺での可視性を緩めたものを **BR** と書く。両辺で緩和すれば **BLR** である。同様に、Weakening を付け加えれば **BW**、Contraction なら **BC**、両方付け加えた場合は **BS** と書く。すると、代表的な論理、例えば古典論理は **BLRS**（すべての制限を無くしたもの）、直観主義論理は **BLS**（古典論理に右辺の可視性）、線形論理は **BLR**（**B** の可視性緩和、古典論理から W, C を除去）として得られる。

しかし、基本論理の $\otimes, \wp, \&, \oplus$ といった結合子は、古典論理のそれとは違うではないか、と思われるかもしれない。これについては次のように考える。**BW** においては、 $A \otimes B \vdash A \& B$ と $A \oplus B \vdash A \wp B$ が証明可能であり、**BC** においては、 $A \& B \vdash A \otimes B$ と $A \wp B \vdash A \oplus B$ が証明可能である (Sambin et al., 2000, Prop.5.4)。そして基本論理内の体系では、 $\vdash$ に関して同値な ($A \vdash B$ かつ $B \vdash A$) 論理式は、任意の論理式の中で、証明可能性を変えずに置換可能である (Sambin et al., 2000, Prop.2.2 (a))。それゆえ、**BS**(=**BWC**) においては、 $\otimes$ と $\&$ 、 $\wp$ と $\oplus$ が同一視できる。逆に **B** においてこれらを同一視すると、

Contraction, Weakening が派生的規則として導出できる。その意味で、この同一視と構造規則の追加は同値である。さて、同一視したものをそれぞれ $\wedge, \vee$ と置けば、 $L\&, R\otimes, L\wp, R\oplus$ からそれぞれ、 $L\wedge, R\wedge, L\vee, R\vee$ の可視的バージョンが得られる。最後に可視性を、左辺だけ緩めれば **LJ** の、両辺で緩めれば **LK** の規則が得られる。このようにして **B** から **LK** が再現できるというわけである。

簡単に言うところのことだ。まず、古典論理の $\wedge (\vee)$ は、 $\otimes, \& (\wp, \oplus)$ という二つの結合子が融合した（同一視された）ものである。われわれは実は、 $\wedge (\vee)$ というひとつの結合子を、状況に応じて柔軟に使い分けていたのである。次に、この柔軟性（結合子の融合）は、構造規則の無制限な使用と同じことである。構造規則を無制限に使うということは、例えば「証明の中である仮定を何回使ったか」などといったことは気にしない、言い換えれば帰結関係の構造を柔軟に（悪く言えば無頓着に）扱うことができるということである。つまり、命題（論理定項）のレベルと帰結関係（シーケント）のレベル、それぞれの柔軟性が対応している。これは不思議なことではない。なぜなら、論理定項はメタ・レベルの構造の反映なのだから。

このように、古典論理そのままを扱うのではなく、その構造規則を制御することで、古典論理の定項が持つ機能を、より明確に、よりきめ細かく定式化することができる。部分構造論理は、確かに古典論理に対する分析ツールとしての役割を果たしており、さらにその結果、われわれは論理定項を、反映原理という統一的な原則の下で理解できるようになるのである。

4.3 含意

前節で取り上げた二種類の連言・選言は、ジラルールの線形論理の発見（ $\otimes, \wp, 1, \perp$ は乗法的、 $\&, \oplus, \top, 0$ は加法的結合子と呼ばれる）である⁽⁴⁾。にもかからわず、その説明として基本論理を取り上げたのは、その発見に対して、反映原理がきわめてわかりやすい概念的説明を与えてくれるからである。一方で、基本論理の主要な技術面での新しさは、含意の取り扱いである。ここでは、その取り扱いを紹介し、さらにそれを線形論理の含意と比較することで、両者のアプローチの違いを浮かび上がらせてみたい。

話の都合上、先に線形論理に触れる。線形論理は簡単に言えば、**LK** から Weakening と Contraction を除いた体系であるが、それに加えて新しい1項結合子！（および？というその双対結合子。これらは exponential と呼ばれる）をもつ。これらの役割を、含意に焦点を絞って説明する。線形論理では含意 $\multimap$ は $A \multimap B \equiv A^\perp \wp B$ （ただし $A^\perp$ は線形論理の involutive な否定）により定義される。構造規則の欠如により、 $A \multimap B$ は直観的には「仮定 A をちょうど1回だけ使えば B が帰結する」と読める。これに対し

$\vdash A \rightarrow B$ は「仮定 A を不特定有限回（0 回含む）使えば B が帰結する」。そしてこれが、直観主義の含意に一致する（**LJ** では左辺の構造規則は自由に使える）。

ここでのポイントは二つ。まず、線形論理は構造規則の制限により、古典・直観主義論理に暗黙のうちに含まれていた概念的要素、すなわち exponential を明らみに出した。つまり、分析ツールとしての役割を果たしている。次に、exponential を新しい結合子として加えることで、次のような状況が生じる。すなわち、古典・直観主義論理を、線形論理と構造規則を異にする、別の論理体系としてではなく、線形論理という単一の体系の断片として、見なすことができるようになる。これは、基本論理とは異なるアプローチであるが、比較の前に、基本論理における含意を見ておこう。

基本論理では、連言・選言は「と」を反映していた。すると含意は「出てくる ($\vdash$)」を反映するはずである。定義方程式は（条件付きながら）次のようになる。

$$\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \text{iff} \quad \Gamma, A \vdash B.$$

この方程式から直に論理規則を得ようとする、可視性が満たされなくなる。それゆえに、ここで詳しくは述べないが、少し工夫が必要であり、さらに追加的な規則 $\rightarrow U$ が必要になる。結果得られるのは次である。

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B} (\rightarrow R) \quad \frac{\vdash A \quad B \vdash \Delta}{A \rightarrow B \vdash \Delta} (\rightarrow L) \quad \frac{A \vdash B \quad C \vdash D}{B \rightarrow C \vdash A \rightarrow D} (\rightarrow U)$$

さて、基本論理の対称性は、ここではどのように考えればよいだろうか。対称性を素直に当てはめれば、定項 $\leftarrow$ に関する、次のような規則が得られる。

$$\frac{A \vdash B}{A \leftarrow B \vdash} (\leftarrow L) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash}{\Gamma \vdash A \leftarrow B} (\leftarrow R) \quad \frac{D \vdash C \quad B \vdash A}{D \leftarrow A \vdash C \leftarrow B} (\leftarrow U)$$

$\rightarrow R$ と $\leftarrow L$ は同じ形の前提を持っている。 $A \vdash B$ においては、左辺から右辺方向への、何らかのプロセスが存在しており、 $A \rightarrow B$ はそれを命題レベルで反映する。これはよいだろう。対称性とは、そのとき同時に、右辺から左辺方向へのプロセスも存在する、ということである。 $A \leftarrow B$ はそれを命題レベルで反映する。そしてその直観的な意味は、 $\leftarrow R$ を見ればわかるように反証（ Γ のもとで A が真、かつ B が偽）である。 $\leftarrow L$ は、 $A \vdash B$ なら反証は不可能、ということに他ならない。

$\vdash$ のもつ、この対称性は、古典論理では対偶に示されている。逆に言えば基本論理は、この命題レベルにおける含意の対称性の起源を、メタ・レベルでの $\vdash$ の対称性に見出し、左から右、右から左、対称的な二つの移行を、二つ別々の定項でもって明示的に取り出すのである。一方、 $\vdash$ に関して対称的ではない直観主義では、対偶の同値性は成り立たない。この事情は、基本論理においては次のように現れてくる。

まず、左辺の可視性を緩和すると、 $\rightarrow$ は線形論理の $\multimap$ と一致する。 $\rightarrow$ の双対 $\leftarrow$ は、右辺の可視性の緩和により $\multimap$ の双対 ($\multimap$ とする) と一致する。つまり **BLR** は一種の

線形論理と見なすことができる (Sambin et al., 2000, Prop.5.4 (b))。線形論理に構造規則を付け加えた **BLRS** (古典論理) においては、 $\rightarrow$ と $\multimap$ 、 $\leftarrow$ と $\multimap$ 、さらに $A \rightarrow B$ と $A \leftarrow B$ の否定が同一視できる。一方、直観主義論理に当たる **BLS** では、 $\rightarrow$ と $\multimap$ は同一視できる (直観主義の含意は復元できる) が、 $\leftarrow$ と $\multimap$ が同一視できない。すなわち、両者は同じ形の推論規則に従うにもかかわらず、 $A \leftarrow B \vdash A \multimap B$ が導出できない (Sambin et al., 2000, Prop.5.5)。これは、規則による一意的な特徴づけが不可能、つまり、 $\leftarrow$ は直観主義論理では定義できない⁽⁵⁾、ということである。

線形論理は構造規則の制限により、標準的な含意を exponential と $\multimap$ に分解した。基本論理は、可視性 (構造規定のより精密な制御) と、対称性・反映原理によって、 $\leftarrow$ という定項を明るみに出した。これは古典論理における対偶の同値性に暗黙のうちに含まれていたものであり、そして他方、直観主義にとっては (定義不可能という意味で) 本質的に新しい定項である。サンビンらの示唆によれば、 $\leftarrow$ をプリミティブとして導入し、そのふるまいを見ることで、直観主義論理において否定的な概念 (例えば反証) を扱うことができる。

つまり、含意に関しても、線形論理と基本論理、両者ともに分析ツールとしてはたらいっている。ただし、古典・直観主義論理を単一の体系の断片として扱おうとする線形論理とは異なり、基本論理の枠組みではそれらは **B** の拡張、別の論理体系である。その一方で、種々の論理体系を、構造規定の違いのみによって表わすことができ、その際に不変のまま保たれる論理規則はすべて、反映原理に従って導入される。両者とも、構造規定の観点から、多様な論理を統一的に理解しようという目的は同じであり、ただその統一性へのアプローチが異なるのである⁽⁶⁾。

5. おわりに

本論の目標は「非古典論理 (部分構造論理) は、古典論理に対する分析ツールとして使える」ことを示し、その分析結果のひとつとして、反映原理、「論理定項とは、シークエント・レベルの構造に対する、命題レベルでの反映である」を紹介することだった。分析の過程で見出される新しい概念的要素 (二つの連言・選言や exponential、含意の双対) の個別の性質についての検討は他の機会に譲らざるをえないが、「分析ツールとしての部分構造論理」という状況は示せたとしてよいだろう。最後に、反映原理と基本論理に関して短く考察しておくことにする。

伝統的に、論理的推論とは、前提の内容の一部を分析して取り出すだけの、言うなればトリビアルな移行だとされてきた。その一方で、フレーゲ以来の現代論理学が明らかにしたのは、そのトリビアルな関係で結びつく命題たちは、それ自身が数学的探

究の対象となりうる、十分に豊かな構造をなしているということであった。反映原理と基本論理は、論理のもつこの一見相反する性格を、一定程度説明してくれるだろう。

命題たちの構造は、論理定項を介して形成される。基本論理の定義方程式が教えてくれるのは「論理定項とは、すでに成立している帰結関係（シーケント）の構造の一部を明示的に取り出しただけのものだ」ということ、思い切って言えば、論理的推論とは、暗黙的にはあるがすでに存在しているものを明示化するだけの、言わば「トリビアル」な移行と見ることができる。他方、命題たちの構造の「豊かさ」は、定義方程式を解くことでもたらされる。例えば、 $\otimes$ は左辺のコンマを明示化しただけのものであり、 $A \otimes B \vdash \Delta$ は $A, B \vdash \Delta$ へと還元されてしまう。左辺の $\otimes$ を用いて表現されることは、それなしでも表現できるのであり、そこでは何も新しいことは生じていないのであり、それが論理の「トリビアルさ」である。だが、定義方程式を解くことにより、 $\otimes$ は右辺にも現れることができる。右辺の $\otimes$ は、（左辺の $\otimes$ のように）左辺のコンマに単純には還元できない使用法であり、それゆえ、反映原理による論理定項の導入により、命題レベルの言語は本質的に豊かになると言えるのである⁽⁷⁾。

論理定項は、シーケントの構造の一部を、「反映」というトリビアルな仕方で明示化しただけのものである。しかし、いったん明示化されたなら、その定項はその「一部」とは別の場所にも、すなわちトリビアルさには還元されない仕方で現れることができる。そのようにして、論理の言語と、その中で命題たちが結び結ぶ関係は豊かになっていく。まだかなり粗雑なものであるが、反映原理と基本論理が提示してくれる、「論理とは何か」に関する描像はこのようなものだと思われる。この描像を、従来の論理観と比較しつつ、より明確で精緻なものへと洗練していくことは、これからの論理の哲学が取り組むべき仕事のひとつだと言ってよいだろう。

註

* takuro.onishi@gmail.com

(1) Γ や Δ を多重集合としたことで、われわれはコンマの結合性と可換性 (**LK, LJ** における **Exchange**) を暗黙のうちに仮定していることになる。シーケントの構造をどこまでも精密に調べるなら、コンマの可換性や結合性まで削ってみることもできる。次の註を参照。

(2) もちろん直観主義論理も部分構造論理である。その他のものを主要な応用分野とともに挙げると (cf. Došen, 1997)、**Weakening** を禁止する適切さの論理（実質含意の反直観的側面の改良）、**Contraction** だけなら **BCK** 論理（集合論的パラドクスの回避）、両者を禁止すると線形論理（計算機科学）。**Exchange** を禁止するのがランベック計算。さらにコンマの結合性を無くすと非結合的ランベック計算（数理言語学）。これらについての詳細なリファレンスは、Došen & Schroeder-Heister (1993) を参照。

(3) 言葉は違うが、可視性はベルナップのディスプレイ論理における「ディスプレイ」と共通のアイディアである。彼の体系においては、規則における **principal formula** の側に文脈が存在しない。ベルナップはその枠組を用いて、カット除去定理が成り立つための十分条件を提示し

ている (Belnap, 1982)。

(4) 線形論理についてはまずは Girard (1995) を参照。照井 (2006) も参考になる。線形論理を基盤にしたジラルの研究は、きわめて独創的なアイディアに満ちており、ここで紹介しきれものではない。反映原理も、線形論理がもたらす洞察の一部を発展させたものにすぎないとも言える。もちろん以下で見るように基本論理も、線形論理とは異なるアプローチで、独自の啓発的な考え方を生み出してくれている。

(5) ここでは詳しく見ないが、「一意的特徴づけ」の正確な定義と、さまざまな定項（特に含意と様相オペレータ）に関するテクニカルな議論は Došen (1985) を参照。また、この概念に関する哲学的分析、Došen (1989) においては、一意性は（明示的）定義よりも弱い「分析」概念の必要条件である。

(6) ここで、基本論理の対称性と可視性のテクニカルな特徴についても、言及しておくべきだろう。対称性はすべてのレベルで成り立つ。基本論理におけるある体系の演繹に対し、すべての式中の論理定項をその対称で置き換え、その演繹全体を左右対称に裏返せば、元の体系の対称体系（例えば **BL** に対する **BR**）の演繹になる。左右対称の体系（**B**, **BS**, 線形論理 **BLR**, 古典論理 **BLRS**）なら、できる演繹も同じ体系の演繹である (Sambin et al., 2000, Thm.3.2)。この徹底した対称性はもちろん、可視性の設定による $\leftarrow$ の発見に基づく。そしてさらに、可視性は明らかに演繹の構造のバリエーションを狭めるため、**B** のカット除去は二重帰納法ではなく、カット式の degree のみに関する帰納法で証明できる (Sambin et al., 2000, Prop.4.3)。

(7) とはいえ、右辺の $\otimes$ の使用法、すなわち $R\otimes$ は、定義方程式の一方向と同値なのではなかったか？つまり、新しいことはやはり何も生じていないのではないか？ここには、そもそも「定義方程式を解く」とはどういうことかに関する微妙な問題がある。その問題については、まだ不十分な考察であるが、大西 (2009) を参照いただきたい。

文献

- Belnap, N. (1982). 'Display logic,' *Journal of Philosophical Logic*, 11, 4, 375–417.
- Došen, K. & Schroeder-Heister, P. (1993). *Substructural Logics*: Oxford University Press New York.
- Došen, K. (1985). 'Sequent-systems for modal logic,' *Journal of Symbolic Logic*, 149–168.
- (1989). 'Logical Constants as Punctuation Marks,' *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30, 3, 362–381.
- (1992). 'Modal logic as metalogic,' *Journal of Logic, Language and Information*, 1, 173–200.
- (1997). 'Logical consequence: a turn in style,' in *Logic and Scientific Methods: Volume Two of the Tenth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Florence, August 1995*, 289, Kluwer Academic Pub.
- Gentzen, G. (1935). 'Untersuchungen ueber das logische Schliessen. I,' *Mathematische Zeitschrift*, 39, 1, 176–210.
- Girard, J. (1995). 'Linear logic: its syntax and semantics,' *Advances in Linear Logic*, 222, 1–42.
- Sambin, G., Battilotti, G., & Faggian, C. (2000). 'Basic logic: reflection, symmetry, visibility,' *Journal of Symbolic Logic*, 979–1013.
- 大西琢朗 (2009). 「基本論理と反映原理」. 京都・数学の哲学研究集会研究発表, <http://staff.aist.go.jp/shunsuke.yatabe/Onishi090516.pdf>.
- 岡本賢吾 (2007). 「数学基礎論の展開とその哲学」, 飯田隆 (編) 『哲学の歴史 11—論理・数学・言語』, 中央公論新社, 281–344 頁.
- 照井一成 (2006). 「線形論理の誕生」, 『数理解析研究所講究録』, 第 1525 巻, 94–131 頁.

〔京都大学大学院 OD・哲学／日本学術振興会特別研究員〕